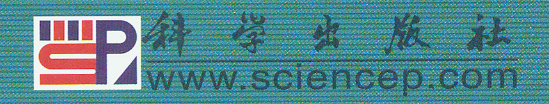
现代物理基础丛书 26

中子引发轻核反应的统计理论

张竞上 著



现代物理基础丛书　26

中子引发轻核反应的统计理论

张竞上　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

由于轻核的核反应行为与中重核有明显的不同，为此发展了专门描述轻核反应的统计理论. 建立了可以描述粒子预平衡发射末态为分立能级的统一的 Hauser-Feshbach 和激子模型理论，给出描述非有序粒子发射的理论方法以及严格考虑反冲效应的核反应运动学.

本书介绍了各轻核反应道开放的分析，给出了轻核反应动力学和运动学有关理论公式的详细表示和计算结果. 使读者了解核反应统计理论在轻核反应中发展的新内容.

本书可作为理论核物理专业教师、研究生、高年级本科生和相关领域的科研人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

中子引发轻核反应的统计理论/张竞上著. —北京：科学出版社，2009

(现代物理基础丛书；26)

ISBN 978-7-03-024183-2

Ⅰ. 中… Ⅱ. 张… Ⅲ. 中子反应：核反应-应用统计学 Ⅳ. O571.42

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009) 第 028529 号

责任编辑：胡 凯 刘凤娟／责任校对：张怡君
责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 3 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009 年 3 月第一次印刷 印张：19 3/4
印数：1—2 000 字数：382 000

定价：59.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈科印〉)

序

1p 壳核的 Li, Be, B, C, N 和 O 通常被称为轻核. 这些核素的核反应研究不仅具有学术价值, 还具有很强的应用价值. 但是长期以来, 由于轻核的反应机制的复杂性, 理论上它是一个难度颇大的课题. 国内外自 20 世纪 70 年代就开始着手进行轻核反应的理论研究, 但是始终没能找到成功的理论模型方法. 我很高兴地看到这个难度大的理论课题有所突破, 这就是 “统一的 Hauser-Feshbach 和激子模型理论” 的建立. 本书清晰、深入地论述了轻核反应机制的理论基础, 恰当地介绍了理论的最新发展并着重地阐述了作者及合作者长期从事这方面科研工作所取得的创造性成果.

以往用平衡态核反应统计理论或用直接核反应理论都不能成功描述轻核反应的行为, 然而新的研究表明, 轻核反应是应以预平衡机制为主, 这正是国际上现有核反应统计模型计算程序中所缺少的, 也是描述不好轻核反应行为的主要原因. 本研究成果成功揭示了轻核反应中的预平衡机制的重要性及其伴随的复杂粒子的形成与发射的规律, 得到了新的认识和相应的理论计算公式, 建立了一套完整的轻核反应理论.

作者以明晰地方式分析出了轻核各有独自特色的反应开放道状况, 为建立计算程序打下扎实的基础. 计算结果能在相当好的程度上再现实验测量的中子双微分截面数据, 这是以前的理论所不能及的, 证实了新理论的成功之处. 在分析中发现了轻核的许多反应道中包含了剩余核的两体和三体崩裂过程, 以及直接三体崩裂过程, 这种非有序发射过程是轻核不同与中重核反应的特点之一.

对于低能中子诱发的轻核反应, 从复合核发射粒子后, 所有的剩余核都是处在分立能级状态. 而分立能级具有自身的自旋和宇称. 而在统一的 Hauser-Feshbach 和激子模型理论中, 包含可以描述以预平衡发射粒子方式到分立能级并保证角动量和宇称守恒的机制, 这是轻核反应理论创新的关键点.

研究中还建立了各种复杂粒子的预形成概率和双微分截面的理论计算公式. 并考虑了不稳定核 ^{5}He 发射的可能性, 以改善理论计算与实验测量的双微分截面在低能端的符合.

由于轻核质量轻, 核反应过程中的反冲效应很强, 需要严格考虑粒子发射过程中的反冲效应. 通过作者细致深入的研究, 发现所有的有序与无序粒子发射过程的运动学可以归为四类. 使得很复杂的轻核发射的运动学行为只需要四类公式就可以进行严格的描述. 这些运动学公式严格保证了核反应的能量平衡. 这是新轻核反

应模型中的另一个创新关键点. 轻核反应动力学给出了发射各种粒子的概率大小, 而轻核反应的运动学给出了各种粒子发射分谱在各发射角度上准确的位置和形状. 在此基础上, 作者提供了建立轻核的中子评价数据库中双微分截面文档的理论方法.

我认为该书论述严谨, 内容详实, 是学术上有所创新的优秀科技著作, 比较系统地发展了在轻核反应领域的核反应理论模型方法, 不仅对军工、民用核工程有应用价值, 对核反应理论本身也有学术意义. 我衷心祝贺《中子引发轻核反应的统计理论》一书的出版.

吴式枢

中国科学院院士

2007 年 4 月 23 日

前 言

随着核能应用和核技术的发展, 核数据应用的领域也越来越广泛. 裂变聚变反应堆等核工程、核医学、核天体等诸多领域的探索, 都需要越来越精确的核数据. 就核反应领域而言, 已经建立了各种类型的核反应的理论, 并取得了行之有效的理论成果. 核反应统计理论在中重核、裂变核的应用中取得了很大成功, 国内外已经有许多程序进行全套核数据的计算. 在这种理论模型程序中, 包含了光学模型, 直接反应, 核反应的平衡统计、预平衡统计. 但在计算 1p 壳的轻核反应时便显得无能为力, 其原因是 1p 壳的轻核反应中出现了独特的反应行为, 以致长期以来缺少合适的理论方法能描述好 1p 壳核反应双微分截面的物理图像.

1p 壳轻核包括从 Li 到 O 等核素, 简称轻核. 轻核的能级结构与中重核有明显的不同. 对于中重核和易裂变核, 它们分立能级的平均间距从千电子伏特量级到电子伏特量级, 而轻核的分立能级的平均间距却达到兆电子伏特量级. 另外, 轻核的第 1 激发态除 ^{7}Li 为 0.4776MeV 外, 其他都大于 1MeV. 特别是 ^{16}O, 竟高达 6.049MeV. 此外, 核谱学目前给出的轻核分立能级纲图的能量区域相当高. 例如, ^{12}C, ^{14}N 和 ^{16}O 给出的最高能级能量分别达到 33.47MeV, 24.0MeV 和 35.0MeV, 能级条数分别达到 56 条、120 条和 134 条. 目前核谱学测量也在不断精细化, 能级纲图还在不断地更新. 轻核是否在更高激发态有分立能级存在, 随着测量技术的发展可能还会发现少数不稳定的共振态, 但是也可能不再存在有实际意义的分立能级了. 因为, 在 1s 壳核中, d, t, ^{3}He 始终没有发现存在激发态能级结构存在, 一旦被足够能量激发, 便会破裂. 对于 ^{4}He 已经测量到有 15 个激发态, 能量达到 29.89MeV. 那么, 对于下一个轻核 ^{6}Li, ^{7}Li 是否有激发态的上限, 这就需要核谱学的进一步研究才能回答. 因此, 对研究核反应而言, 冒然在目前轻核的分立能级之上加入连续能级是很不可靠的. 因为目前没有关于轻核能级密度的知识, 而能级密度是属于中重核研究的内容.

当前有直接反应及平衡态统计的 Hauser-Feshbach 理论, 是能够描述保证角动量守恒的向分立能级发射的核反应理论. 前者是描述复合核形成之前的核反应过程, 而后者是描述平衡态的核反应理论, 而界于两者之间的预平衡核反应过程的核反应理论中, 恰恰缺少了包含有角动量守恒的机制. 而研究表明, 从复合核向剩余核分立能级的预平衡发射正是轻核反应最主要的核反应机制. 为此, 核反应非统计理论中发展包含角动量守恒的物理因素成为关键性的研究课题. 由于核反应的平衡统计理论及直接反应理论是比较成熟的核反应理论, 本书仅做扼要介绍, 而集中阐

述了用非平衡统计方法描述中子引发轻核反应过程的理论模型内容. 当然, 可以在此基础上可以比较容易地推广到带电粒子引发的轻核反应过程.

目前计算核反应数据最通用的理论方法是核反应的半经典理论, 在这种模型理论中有模型参数, 通过合理调整这些参数可以大范围地与实验测量数据有很好符合. 另外, 描述核反应的理论中还有量子理论方法, 包括多步复合核和多步直接反应的量子理论, 其特点是在理论上比较严格的. 但是还尚未达到计算全套核反应数据的程度. 从目前发展状态来看, 量子理论的理论性强, 半经典理论的实用性强, 这种局面还将要持续相当长的时间.

本书第 1 章中分析了中子引发轻核反应道开放情况, 给出轻核反应的独有特征. 轻核反应道的开放个性极强. 除了粒子的有序发射外, 还出现了非有序的粒子发射, 使得仅描述有序粒子发射的核反应统计理论无能为力. 而要描述好轻核反应的这些特征, 需要在通常的核反应非平衡统计理论的基础上继续发展一些新内容, 这些内容在第 1 章中进行了阐述.

第 2 章对描述轻核反应机制的理论基础进行了介绍. 集中介绍如何在预平衡反应的理论中加入角动量守恒这一物理因素. 这就是统一的 Hauser-Feshbach 和激子模型理论的建立. 为了在理论上可以描述好轻核这个最主要的核反应机制, 介绍了与角动量有关的激子模型. 还介绍了对任意单粒子密度的核系统求解激子态密度核 Pauli 原理修正值的置换群方法, 以及对粒子发射率、光学模型、宽度涨落修正等理论的简介. 第 3 章介绍了单粒子发射率和单粒子发射的双微分截面的理论公式, 以及推广的激子模型主方程. 第 4 章主要介绍复杂粒子发射率, 并考虑了在轻核反应中 ^{5}He 的发射. 在原有的 Iwamoto-Harada 理论模型基础上, 考虑了与激子数有关的动量分布后, 用占据数方程得到的在相空间的平均占据数, 得到了复杂粒子预形成概率改进的理论公式及其各种复杂粒子发射的双微分截面理论模型公式.

由于轻核质量轻, 核反冲效应很强, 甄别出射粒子双微分谱的正确性之一是看是否在核反应理论中能保证能量平衡. 在第 5 章中给出了各种粒子有序发射过程中以及包括三体崩裂过程的非有序发射过程, 严格考虑粒子发射反冲效应的核反应运动学公式. 结果发现, 所有有序与无序粒子形形色色的发射过程的运动学可以归纳为四类. 看来很复杂的轻核粒子发射的运动行为只需要四类公式就可以描述. 这些运动学公式可以给出在各种形态下严格保证了能量平衡的粒子发射的双微分谱公式描述. 另外, 在本章中还对核医学等领域中关心的 Kerma 系数进行了简介.

第 6 章给出理论计算结果如何与实验测量数据比较的内容, 包括能谱展宽效应, 运动坐标系转换的公式. 检验数据的准确性可以来自两个方面, 一个是与实验测量的双微分截面的符合, 称为核数据的微观检验, 另一个是与中子穿透大块物质的中子泄漏谱实验测量数据的符合, 称为核数据的基准检验 (Benchmark). 第 6 章

给出在上述两个方面检验的示例.

由于以前没有合适的理论方法对轻核反应行为进行准确的描述, 1995 年, 在当时主管核数据的胡进修女士建议下开展了轻核反应理论研究这个课题. 在其后不断得到她的大力支持和鼓励, 在这里表示我的诚挚的感谢.

在统一的 Hauser-Feshbach 和激子模型理论框架下, 发展了一个专门描述轻核反应的理论模型. 对个性极强的轻核反应, 逐核编写了中子引发轻核反应数据理论计算的 LUNF 程序系列. 在此基础上, 成功地再现了中子双微分截面实验测量数据, 提供了用理论方法建立双微分截面文档手段, 给出了保证了能量平衡的全部出射粒子的发射信息. 研究发现, 确实是以预平衡方式发射粒子到分立能级的反应机制占了最主要的成分, 这是当初发展统一的 Hauser-Feshbach 和激子模型理论所始料未及的, 这才展现了这个半经典核反应理论的真正价值所在, 也就理解了在预平衡发射过程中, 不考虑角动量守恒这个物理因素就不能描述好轻核反应行为的主要原因.

通过对复杂轻核反应途径的明晰分析以及在轻核反应中粒子非有序发射的特征, 建立了轻核反应理论, 由此将核反应统计理论应用的核素范围拓宽到了 1p 壳轻核.

一位德高望众理论物理界老前辈的话铭记心头:“理论要联系实际, 但是一个‘理论’是不能完全准确地描述好‘实际’的, 因为‘实际’是包罗万象的, 太复杂了, 我们要看能不能抓住主要矛盾. 因此, 理论的发展永远是无止境的, 需要继续不断创新”. 轻核反应理论的发展仍是任重道远, 正如书中指出的存在问题那样, 需要进行不懈的继续努力, 做出更好的成果.

参加轻核反应理论研究的还有韩银录研究员和研究生们, 大家协同合作, 共同完成了这一研究课题. 蔡崇海教授和孙小军副教授对本书稿进行了认真的审阅, 并提出了宝贵的建议, 段军锋博士在理论计算、数据评估和本书绘图等方面做了大量工作, 在此表示衷心的感谢. 本书出版获得了中国核数据中心和国家重点研究项目“加速器驱动洁净核能系统的物理及技术基础研究”的资助.

作 者

2008 年 1 月 20 日于北京

目　　录

第 1 章　中子引发 1p 壳轻核反应道的开放途径

1.1　引　　言

1p 壳轻核包括 Li, Be, B, C, N, O 等核素, 被称为轻核. 其中有的轻核仅有一个稳定同位素, 而有的轻核具有几个稳定同位素. 以下所称的轻核就是指 1p 壳的核素. 从目前来说, 中子引发的中重核以及易裂变核的核反应行为已经有比较成熟的统计理论模型来描述, 并且有相当多的理论计算程序, 可以计算各种类型的核反应数据, 而且国际上已建立了相当多核素的评价中子数据库.

然而, 在中子引发轻核的核反应过程中, 却出现了中重核反应所没有的某些独特行为, 比如会出现非有序的粒子发射, 不同轻核之间开放的反应道会是彼此非常的不同. 同样, 由带电粒子引发的轻核反应也具有相同的特征. 因此轻核反应机制具有相当的复杂性, 使得描述轻核反应过程比描述中重核反应具有更大的难度. 粒子入射到靶核之中, 形成了被激发的复合系统 (Excited Composite Nuclear System). 当初, 在仅有低能核反应的玻尔 (Bohr) 时代, 建立了著名的复合核理论, 从此复合核 (Compound Nucleus) 一词就意味着平衡态核反应统计理论. 但是, 随着入射粒子能量的提高, 从该激发的复合系统发射的粒子行为超出平衡态统计理论所能描述的理论框架, 因此, 继而发展了平衡前发射的非平衡统计理论, 被称为预平衡发射机制. 这时从激发的复合系统发射的粒子, 既有平衡态发射, 又有预平衡态发射. 需要强调说明的是, 本书中仍称这个激发的核系统为复合核 (Composite Nucleus), 但是它已超出了原有玻尔的复合核含义. 因此, 下面的复合核一词就指粒子入射到靶核之中形成的被激发的复合系统, 从而它既可以有平衡态机制的发射, 也可以有预平衡机制的发射.

在入射中子能量不是很高时, 中子诱发轻核反应的一个突出的特点是, 从复合核发射一次粒子后, 其剩余核都是处于分立能级态, 而二次以上的粒子发射, 这被称为次级粒子发射, 都是从剩余核的分立能级发射到其后剩余核的分立能级. 从轻核的能级纲图上可以看出, 它们的分立能级中有相当多的能级宽度达到几百千电子伏特, 甚至达到几个兆电子伏特的数量级, 这说明了这些分立能级是很不稳定的, 可以继续发射次级粒子, 而有些不稳定能级存在既可发射次级粒子又可伴随 γ 退激的竞争过程. 中子引发轻核反应的另一个特点是, 由于这些核的质量比较小, 发射粒子后的有些剩余核会是不稳定的核素, 例如, ^{5}Li, ^{5}He, ^{6}He, ^{8}Be 等, 它们都会自发产生两体崩裂或三体崩裂, 上述这种核反应机制在中重核反应中是没有的. 另

外, 由于核素的能级结构都具有各自的自旋和宇称, 因此, 从不同的分立能级发射粒子的行为彼此各不相同. 这就会造成发射到同一个剩余核的不同能级可以属于不同的核反应道. 同时, 由于轻核的质量轻, 其发射粒子的反冲效应比较强, 由运动学的结果可以看出, 一次粒子发射的剩余核的能量在质心系中虽然是单能的, 但是在质心系中, 从这个剩余核的分立能级发射次级粒子时, 出射粒子在质心系中的双微分截面谱是环型谱, 其能量宽度可以达到几个兆电子伏特以上, 在第 5 章中将详细介绍这方面的内容. 因此, 这种次级粒子发射在质心系中是一个连续谱, 这是需要用双微分截面来描述的. 而一次粒子发射后, 剩余核是通过 γ 退激来结束核反应过程, 这时是两体问题, 用角分布来描述. 中子诱发的轻核反应的又一个特点是, 由于它们的核素内的核子数较少, 入射粒子进入核内发射级联碰撞的概率较小, 使得到达平衡态的概率比较小, 因此轻核反应的一个重要特征是在平衡前发射的概率很大.

在表 1.1 中给出了 ^{5}Li, ^{5}He, ^{6}He 的能级纲图, 包括能级能量、自旋、宇称, 它们分别取自 (Firestone et al., 1996) 和 (Tilley et al., 2004). 可以看出, 20 世纪末与 21 世纪初之间相比较, 这些轻核的能级纲图内容已经有了明显的改进. 某些能级的能量、自旋、宇称有了改变. 有增加的新能级, 也有被新实验测量证实要删除的能级. 可以说随着实验测量手段和精度的提高, 能级纲图将会不断更新. 特别是, ^{5}Li 的第 2 激发能级由原来的 7.5MeV 变为 1.49MeV, ^{5}He 的第 2 激发能级由原来的 4.0MeV 变为 1.27MeV, 这就会使该能级的开放阈能大大降低. 同样, 新测量出 ^{6}He 的第 2 激发能级在 5.6MeV, 这样从 ^{6}He 发射中子的阈能比原来在 13.6MeV 的第 2 激发能级下降很多, 相应的双微分截面谱也会发生明显变化. 这样在 n + ^{6}Li, n + ^{7}Li, n +^{9}Be 等中子引发的轻核反应中, 剩余核是在 ^{6}He 的情况下, 会较早地出现由 ^{6}He 的第 2 激发能级发射中子, 而这时剩余核是 ^{5}He, 它是不稳定核素, 会自发崩裂为 n + α. 而原来 ^{6}He 的第 2 激发能级在 13.6MeV 时, 当入射中子能量在 17MeV 以下时, 没有激发

表 1.1　^{5}Li, ^{5}He, ^{6}He 的能级纲图

^{5}Li		^{5}He		^{6}He	
1996 $[E(J^\pi)]$/MeV	2004 $[E(J^\pi)]$/MeV	1996 $[E(J^\pi)]$/MeV	2004 $[E(J^\pi)]$/MeV	1996 $[E(J^\pi)]$/MeV	2004 $[E(J^\pi)]$/MeV
$gs(3/2^-)$	$gs(3/2^-)$	$gs(3/2^-)$	$gs(3/2^+)$	$gs(0^+)$	$gs(0^+)$
	$1.49(1/2^-)$		$1.27(1/2^-)$	$1.797(2^+)$	$1.797(2^+)$
$7.5(1/2^-)$		$4.00(1/2^-)$			$5.6\ (2^+)$
$16.66(3/2^+)$	$16.87\ (3/2^+)$	$16.75(3/2^+)$	$16.84(3/2^+)$	$13.6(1^-)$	$14.6(1^-)$
$18.0(1/2^-)$			$19.14(5/2^+)$	15.5	15.5
	$19.28(3/2^-)$		$19.26(3/2^+)$	25	23.3
$20.0(3/2,5/2^+)$	$20.53(1/2^+)$	$19.8(3/2,5/2^+)$	$19.31(7/2^+)$	32	32
				36	36

注：1996 表示取自同位素第八版 (Firestone et al., 1996), 2004 表示取自美国三角大学国家实验室 (Tilley et al., 2004).

^{6}He 的第 2 激发能级的反应途径出现. 因此, 按照老的能级纲图进行理论计算时, 就会丢失来自 ^{6}He 的第 3 激发能级出射中子后, 相继产生的两个中子和一个 α 粒子, 使得理论计算中的双微分截面谱丢掉了相应的分谱成分.

由此可见, 随着新的能级测量手段的不断精确化, 能级能量位置可以出现几个兆电子伏特的变化, 新能级被添加, 未被确定的能级自旋宇称逐渐被确定. 当然, 在更高激发能状态的分立能级还有相当多的不确定因素. 可以说, 核结构的知识在不断深化, 而且这个发展过程还任重道远.

上述这些不稳定核素, 它们的基态和激发态都会自发进行两体崩裂, 如对于基态而言, 对两体崩裂 $^5\text{Li} \to \text{p}+\alpha$, 释放出 1.966MeV 的能量, 而对两体崩裂 $^5\text{He} \to \text{n} + \alpha$, 释放出 0.894MeV 的能量. 另外, 对于 ^{5}Li 核, 第三分立能级 $E_k = 16.87(3/2^+)$ 及以上的激发态还可以发射 d 核, 剩余核为 ^{3}He, 表示可以发生 $^5\text{Li} \to \text{d} + {}^3\text{He}$ 的衰变过程, 同时释放出 $E_k - 16.387$MeV 的能量. 同样, 对于 ^{5}He 核, 第三分立能级 $E_k = 16.84(3/2^+)$ 及以上的激发态也可以发射 d 核, 剩余核为 t, 表示可以发生 $^5\text{He} \to \text{d} + \text{t}$ 的衰变, 同时释放出 $E_k - 16.696$MeV 的能量.

尤其特殊的是 ^{6}He 核, 其基态是不稳定的, 是由 β^- 衰变到 ^{6}Li 核. ^{6}He 核第 1 激发态能级的激发能是低于发射中子的阈能, ^{6}He 是通过三体崩裂反应 $^6\text{He} \to \text{n} + \text{n} + \alpha$ 进行衰变, 释放出 0.824MeV 的能量, ^{6}He 的第 2 激发态已经允许发射中子, 即 $^6\text{He} \to \text{n} + {}^5\text{He}$, 而 ^{5}He 又是不稳定核, 自发崩裂为 $\text{n} + \alpha$. 虽然其结果也是 $^6\text{He} \to \text{n} + \text{n} + \alpha$, 但是上述两个不同反应过程的出射中子能谱是彼此不相同的. ^{6}He 的第 3 激发态 $E_k = 14.6(1^-)$ 及以上的分立能级还可以分裂为两个氚核, 即 $^6\text{He} \to \text{t} + \text{t}$ 过程, 并释放出 $E_k - 12.306$MeV 的能量.

对于 ^{8}Be 核, 其能级纲图的最新版本是在 2004 年公布的 (Tilley et al., 2004), 它的基态和低激发态分立能级都是不稳定的, 可自发崩裂为两个 α 粒子, 即 $^8\text{Be} \to \alpha + \alpha$ 过程, 并释放出 $E_k + 0.092$MeV 的能量, 其中 E_k 是 ^{8}Be 的激发能级的能量. 在 ^{8}Be 的第 5 激发态 $17.640(1^+)$ 及以上的分立能级都可以发射质子, 剩余核为 ^{7}Li, 而在它的第 7 激发态 $18.91(2^-)$ 及以上的分立能级都可以发射中子, 剩余核为 ^{7}Be, 而 ^{7}Be 又是不稳定核, 由电子俘获衰变为 ^{7}Li, 寿命是 53.29 天. 因此, ^{8}Be 的第 5 和第 6 激发态存在 $^8\text{Be} \to \alpha + \alpha$ 与 $^8\text{Be} \to \text{p} + {}^7\text{Li}$ 的竞争, 而在第 7 激发态以上则存在 $^8\text{Be} \to \alpha + \alpha$ 与 $^8\text{Be} \to \text{p} + {}^7\text{Li}$ 以及 $^8\text{Be} \to \text{n} + {}^7\text{Be}$ 的竞争.

由上面的介绍可以看出, 在中子诱发的轻核反应过程中, 由于若包含了上述的不稳定剩余核, 就会出现剩余核集团的两体崩裂或三体崩裂过程, 以及高激发态能级存在多种粒子发射竞争的反应机制, 这是造成轻核反应复杂性的原因之一, 也是轻核反应的特征之一.

记中子入射能为 E_n, 而 m_n, M_T 和 M_C 分别表示中子、靶核和复合核的质量. 当中子轰击在实验室系中处于静止的靶核时, 入射中子必然要付出一定能量产生复

合核在实验室系中的运动动能, 由动量守恒条件, 在非相对论情况下得到质心运动速度为

$$V_{\mathrm{C}}=\frac{\sqrt{2m_{\mathrm{n}}E_{\mathrm{n}}}}{M_{\mathrm{C}}} \tag{1.1.1}$$

而复合核在实验室系中的动能 E_{R} 为

$$E_{\mathrm{R}}=\frac{1}{2}M_{\mathrm{C}}V_{\mathrm{C}}^2=\frac{m_{\mathrm{n}}}{M_{\mathrm{C}}}E_{\mathrm{n}} \tag{1.1.2}$$

由能量守恒条件, 入射粒子进入靶核贡献到核激发的动能为 $E_{\mathrm{C}}=M_{\mathrm{T}}E_{\mathrm{n}}/M_{\mathrm{C}}$, 再加上中子带入到复合核中的结合能 B_{n} 后, 得到的复合核激发能公式：

$$E^*=\frac{M_{\mathrm{T}}}{M_{\mathrm{C}}}E_{\mathrm{n}}+B_{\mathrm{n}} \tag{1.1.3}$$

可以看出, 入射中子贡献到激发能部分与贡献到复合核在实验室系中的动能部分之比为 $M_{\mathrm{T}}/m_{\mathrm{n}}$. 对于质量重的靶核, 这个比值很大, 而对于轻核而言, 这个比值就明显相对小了. 这说明, 对于轻核而言, 质心运动速度就比较大, 因此, 在质心系和实验室系中的运动行为就有明显差别, 而对中重核的这种差别就相对比较小了. 特别是易裂变核, 质量数超过 200 时, 在质心系和实验室系的行为就几乎相同了.

下面介绍反应道的 Q 值和阈能值的计算方法. 一个反应道的 Q 值是指核反应前后的质量差, 可以用质量表计算给出. Q 值大于 0 的反应是放能反应, 而 Q 值小于 0 的反应是吸热反应, 也称有阈反应. 对于中子引发的核反应过程中的非弹性散射道而言, 是指发射一个中子后, 达到剩余核的某个激发态能级, 而这个能级只是由 γ 退激方式来结束核反应过程. 上面所说非弹性散射道, 对于中重核来说, 总是由第 1 激发态能级开始, 而对于轻核却有所不同, 例如, ^{6}Li 的第 1 激发态能级能发射氘核, 剩余核是 ^{4}He, 属于 (n,nd)α 反应道, 而第 2 激发态能级才是以 γ 退激的方式来结束核反应过程, 因此发射中子到 ^{6}Li 的第 2 激发态能级才属于真正的非弹性散射. 这又是轻核反应不同于中重核反应的特征之一.

所谓一个反应道的阈能是指开放这个反应道需要最小的中子入射能量. 以中重核反应为例, 对于仅发射一个粒子的反应道而言, 复合核激发能需要付给出射粒子发射带走的结合能 B_1, 再考虑发射粒子产生的反冲动能后, 反应道的阈能值为

$$E_{\mathrm{th}}=\max\left\{0,\frac{M_{\mathrm{C}}}{M_{\mathrm{T}}}(B_1-B_{\mathrm{n}})\right\}=\max\left\{0,-\frac{M_{\mathrm{C}}}{M_{\mathrm{T}}}Q\right\} \tag{1.1.4}$$

其中, 一个反应道的 Q 值等于入射中子结合能减去出射粒子的结合能. (1.1.4) 式是在中重核反应中常用的公式. 但是, 这个公式的应用是具有局限性的, (1.1.4) 式的成立仅用于剩余核为稳定核素. 对于轻核反应, 由于发射各种粒子后剩余核都处于分立能级态, 而有些剩余核是不稳定的, 会在自发崩裂过程中释放能量, 这时就不能

简单用核反应的 Q 值来确定反应道的反应阈能值了. 例如, ^{6}Li(n,d) 反应道的剩余核是 ^{5}He, ^{5}He 会自发崩裂成一个中子和一个 α 粒子, 并释放出 0.894MeV 的能量. 这时中子在 ^{7}Li 中的结合能是 7.249MeV, 而氘核在 ^{6}Li 中的结合能是 9.619MeV. 由 (1.1.4) 第一式计算得到的这个反应道的阈能为 2.765MeV. 另一方面, 由于 ^{6}Li 与 d+α 的质量差是 −1.475MeV, 这就是这个反应道的 Q 值, 而代入到 (1.1.4) 式计算出的阈能是 1.721MeV, 显然与前者的结果不同, 相差的能量达到一个兆电子伏特之多. 这就是因为这个反应道的剩余核是非稳定核素, 会自发崩裂, 并释放出能量. 在这种情况下, 一个反应道的阈能只能由出射粒子的结合能减去中子的结合能, 再乘上反冲效应产生的因子 $M_{\mathrm{C}}/M_{\mathrm{T}}$ 来得到. 而该反应道的 Q 值却是由这个反应道的前后所有粒子的质量差得到的. 因此, 在这种情况下, 在 (1.1.4) 式中由反应 Q 值来确定核反应阈能的途径是不成立的. 也就是说, 公式 (1.1.4) 不是普遍适用的公式, 仅用于剩余核为稳定核素的情况. 而当轻核反应的剩余核为 ^{5}Li, ^{5}He, ^{8}Be 等情况下, 这时 (1.1.4) 式的第二个关系就不成立了. 换句话说, (1.1.4) 式中第一个关系式求解阈能值是普遍成立的, 而第二个关系式就不是普遍成立的.

对于带电粒子发射, 由于库仑位垒的阻止效应, 实际出现带电粒子发射对应的中子入射能量要大于 (1.1.4) 式给出的阈能值. 核的电荷数越大, 库仑位垒阻止带电粒子出射的效应越强. 但对于轻核, 由于电荷数小, 库仑位垒的阻止效应要比中重核的要弱. 下面给出库仑位垒高度的估算方法. 如果将核看成均匀带电球时, 库仑位垒高度 V_{coul} 可以近似地表示为

$$V_{\mathrm{coul}} \approx \frac{Z_B Z_b e^2}{R_{\mathrm{C}}} \tag{1.1.5}$$

这里 Z_b 和 Z_B 分别表示被发射的带电粒子和剩余核的电荷数, 对于中子入射情况而言, 库仑场半径 R_{C} 可以近似表示为

$$R_{\mathrm{C}} \approx r_{\mathrm{C}}(A_b^{1/3} + A_B^{1/3}) \tag{1.1.6}$$

这里 A_b 和 A_B 分别表示被发射的带电粒子和剩余核的质量数. 公式 (1.1.6) 中的半径参数约为 $r_{\mathrm{C}} \approx 1.2 \sim 1.5$fm, 其值大小与剩余核的变形状态有关. 另外对于 $A_b \leqslant 4$ 的粒子, 它们的均方根半径有实验测量值 (参见表 4.4), 因此可以直接使用半径的实验测量值, 而不用近似估算的 $r_{\mathrm{C}}A_b^{1/3}$ 公式表示计算, 因为两者之间会有明显差别.

因此, 带电粒子从处于激发态的分立能级发射到剩余核的某个分立能级时, 允许发射的条件是, 这两个分立能级之间的能量差必须大于出射粒子在母核中的结合能加上库仑位垒值. 公式 (1.1.5) 能给出库仑位垒高度的近似估算值. 仍以 ^{6}Li 为例, 氘核在 ^{6}Li 中的结合能为 1.475MeV, 由 (1.1.5) 式估算的发射氘核的库仑位垒高度

为 0.674MeV, 两者相加为 2.149MeV, 而它的第 1 激发能级能量为 2.186MeV, 因此, ^{6}Li 的第 1 激发态能级是可以发射氘核的, 这与实验观测的事实相符.

对于整个非弹性散射道, 其反应道的 Q 值就是以 γ 退激方式来结束反应过程的最低分立能级能量 $E_{k,\min}$, 因此整个非弹性散射道的阈能值为

$$E_{\mathrm{th}}=\frac{M_{\mathrm{C}}}{M_{\mathrm{T}}}E_{k,\min} \tag{1.1.7}$$

正如前面所述, 在轻核反应中, 发射非弹性散射的最低分立能级可以不是靶核的第 1 激发能级. 如果在靶核中有多个靶核的能级存在非弹性散射过程, 那么, 每个能量为 E_k 的能级对应的非弹性散射阈能值为

$$E_{k,\mathrm{th}}=\frac{M_{\mathrm{C}}}{M_{\mathrm{T}}}E_{k} \tag{1.1.8}$$

对于多次粒子发射的反应道, 激发能需要付出多次粒子发射在母核中的结合能. 同样, 剩余核是稳定核时, 阈能值的计算公式为

$$E_{\mathrm{th}}=\frac{M_{\mathrm{C}}}{M_{\mathrm{T}}}\left(\sum_{i}B_{i}-B_{n}\right) \tag{1.1.9}$$

其中, B_i 是第 i 次粒子发射在母核中的结合能. 同样, 对于带电粒子发射, 仍然存在库仑位垒的阻止粒子发射效应, 需要将每次带电粒子出射对应的库仑位垒值加入, 这时在 (1.1.9) 式中的 B_i 就需要改写为 $B_i+V_{i\mathrm{coul}}$. 由此可见, 对于是多次带电粒子发射的反应道, 实际能竞争开放这个反应道的概率很小. 而真正出现多次带电粒子发射的反应对应的中子入射能量值, 远比 (1.1.9) 式直接给出的值要明显高.

另外, 需要指出的是, 由于多次粒子发射过程都是经过若干中间核素的分立能级, 因此实际开放这个反应道的入射中子能量要明显比 (1.1.9) 式给出的要高. 这又是由于轻核反应的特点而造成. 对于中重核反应而言, 核反应统计理论中是应用了连续能级的, 而连续能级表示在任何的能点都有能级的存在. 而在轻核反应中, 发生一个粒子发射需要的能量最小值在母核的激发能处没有能级存在, 而只能从比这个能量最小值更高的分立能级处发射该粒子. 而多次粒子发射从最后发射的粒子反推到第一粒子发射, 这种积累效应更加明显, 因此造成实际开放这个反应道的入射中子能量要明显比 (1.1.9) 式给出的要高得多. 这种情况的具体讨论详见下一节.

在下面各节中, 将分别给出中子引发轻核中每个丰度比较大的轻核的核反应道开放的途径. 而这些内容可以很容易推广到带电粒子引发的轻核反应的反应道开放的途径分析.

由这些开放道的分析可以看出, 它们开放的反应道彼此之间是非常不同的, 个性极强, 而且会出现非有序发射的核反应过程, 并且发射一个粒子后剩余核处在不

同的能级有可能属于不同的反应道. 对于中重核而言, 可以按公共反应道的方式设计一个统一的理论计算程序对许多核的反应过程做统一的理论描述. 因此, 首先要对 1p 壳中的每个轻核的反应过程进行仔细分析, 不仅要对开放的反应道进行仔细剖析, 而且还需要对各种粒子发射的核反应机制进行研究, 才有可能对 1p 壳轻核的核反应过程做出比较准确的理论描述.

1.2 n + ^{6}Li 的反应道的开放途径

^{6}Li 是 1p 壳核素中最轻的核, 天然丰度为 7.59%, 是造氚的重要核素. 表 1.2 给出了 ^{6}Li 的分立能级纲图, 其中 1996 取自同位素第八版 (1996 年)(Firestone et al., 1996), 2002 则是美国三角大学在 2002 年更新的能级纲图 (Tilley et al., 2002a). 由表 1.2 可以看出, 后者与前者相比较, 去掉了一些能级, 也增加了一些能级, 若干能级的能量、自旋、宇称和能级宽度都有不少改进.

表 1.2 ^{6}Li 的分立能级纲图

1996		2002	
$[E(J^\pi)]$	Γ	$[E(J^\pi)]$	Γ
$gs(1^+)$	稳定	$gs(1^+)$	stable
$2.186(3^+)$	24.2keV	$2.186(3^+)$	24.2keV
$3.56288(0^+)$	8.2eV	$3.56288(0^+)$	8.2eV
$4.310(2^+)$	1.72MeV	$4.312(2^+)$	1.30MeV
$5.366(2^+)$	540keV	$5.366(2^+)$	541keV
$5.65(1^+)$	1.52MeV	$5.65(1^+)$	1.5MeV
$15.8(3^+)$	17.8MeV		
		$17.985(2^-)$	3.012MeV
$21(2^-)$			
$21.5(0^-)$			
$23(4^+)$	12.2MeV		
		$24.779(3^-)$	6.754MeV
$25(4^-)$		$24.89(4^-)$	5.316 MeV
$26.6(3^-)$		$26.59(2^-)$	8.684 MeV
$31(3^+)$			

注：能级能量单位是 MeV, Γ 表示能级宽度, 表中没给出能级宽度的能级表示目前实验上还无法确定.

由表 1.2 以及下面各表可以看出, 能级宽度也可以用时间来表示能级寿命. 如果能级寿命较长则可用时间单位表示, 比如 1fs 表示 10^{-15}s, 这是电磁相互作用的时间尺度. 但是, 轻核的许多能级都非常不稳定, 用时间单位表示很不方便. 因此利用量子力学中能量与时间的不确定性关系 $\Delta t\Delta E \approx \hbar$, 将时间单位表示的寿命换成能量单位表示的宽度会更方便. 例如, 1MeV 的能级宽度对应的能级寿命为

$\Delta t \approx 6.6 \times 10^{-22}$s, 这是直接反应或预平衡核反应过程的时间尺度. 而 1eV 的能量不确定度对应的时间不确定度为 6.6×10^{-16}s, 这相当于平衡态复合核的寿命. 而 1fs 对应的能级宽度为 0.66eV.

由表 1.2 可以看出, ^{6}Li 的能级除基态外, 其他能级的能级宽度都比较大, 仅第 2 激发能级的宽度是电子伏特量级, 第 1 激发能级宽度是几十千电子伏特, 其他的能级宽度可达到几个兆电子伏特的数量级. 其中除第 2 激发能级是通过 γ 退激外, 其他激发能级都可以发射次级粒子. 原来在同位素第八版 (Firestone et al., 1996) 给出的第 6 激发能级宽度竟然达到 17.8MeV, 对应的能级寿命是 3.7×10^{-23}s, 比一般能量情况下的核子穿过核素的时间还要短, 很难想像这是一条什么样的能级, 应用这个能级进行理论计算时, 能级展宽后的双微分谱的宽度大得出奇. 在计算的总中子出射双微分谱中的分谱中几乎是很低一条平线, 很难看出这个能级的实际贡献. 果然, 在 2002 年更新的能级纲图 (Tilley et al., 2002) 中, 否定了这条能级的存在.

由于在理论模型计算中, 能级纲图是用实验测量的数据作为输入数据的. 这在总出射中子双微分截面谱的计算结果可以看出, 应用新的能级纲图之后, 理论计算结果与实验测量数据之间的符合程度有了明显的改进. 当然, 计算中也包括了前面提到的 ^{5}Li, ^{5}He, ^{6}He 等有关核素能级纲图结构的改进. 可见, 准确的能级纲图对轻核反应理论计算的重要性.

中子引起 ^{6}Li 反应的开放反应道及 Q 值和阈能由下式给出

$$\mathrm{n}+{}^6\mathrm{Li}\rightarrow{}^7\mathrm{Li}^*\rightarrow\begin{cases}\gamma+{}^7\mathrm{Li}, & Q=7.2490\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=0.000\mathrm{MeV}\\ \mathrm{n}'+{}^6\mathrm{Li}, & Q=-3.5629\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=4.1603\mathrm{MeV}\\ \mathrm{p}+{}^6\mathrm{He}, & Q=-2.7250\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=3.1820\mathrm{MeV}\\ \mathrm{d}+{}^5\mathrm{He}, & Q=-2.3700\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=2.7674\mathrm{MeV}\\ \mathrm{t}+\alpha, & Q=4.7820\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=0.0000\mathrm{MeV}\\ 2\mathrm{n}+{}^5\mathrm{Li}, & Q=-5.6660\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=6.6161\mathrm{MeV}\\ \mathrm{n}+\mathrm{p}+{}^5\mathrm{He}, & Q=-4.5940\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=5.3644\mathrm{MeV}\\ \mathrm{n}+\mathrm{d}+\alpha, & Q=-1.4750\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=1.7223\mathrm{MeV}\\ \mathrm{p}+2\mathrm{t}, & Q=-15.0310\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=17.5515\mathrm{MeV}\end{cases}$$

其中氚的生成截面主要来自反应道 (n,t)α 的贡献, 其 Q 值为 4.7820MeV, 是放能反应, 在入射中子能量比较低时截面很大. 因此 ^{6}Li 是造氚的重要核材料. 在反应道 (n,p)^{6}He 中 ^{6}He 处于基态时, 属于 (n,p) 反应道; 当 ^{6}He 处于第 1 激发态时, 会通过三体崩裂为两个中子和一个 α 粒子, 属于 (n,2np)α 反应道. 而 (n,2n)^{5}Li 和 (n,np)^{5}He 反应道的剩余核分别为 ^{5}Li 和 ^{5}He, 它们都不稳定, 分别立即崩裂为 p+α 和 n+α, 也属于 (n,2np)α 反应道. (n,d)^{5}He 剩余核 ^{5}He 自发裂变为 n+α, 则属于

(n,nd)α 反应道.

^{6}Li 是一个集团结构很强的核素, 当中子入射到 ^{6}Li上并发射一个中子后, 余核 ^{6}Li 的第 1 激发态就发射 d, 剩余核是 α 粒子. ^{6}Li的第 2 激发态虽然在能量上可以发射 d, 但是由于自旋宇称的限制, 却不能开放 (n,nd)α 反应道. 这是由于 ^{6}Li的第 2 激发态的自旋宇称为 0^+, 即总角动量为 0; 而 d 的自旋是 1, α 粒子自旋是 0, 两者总角动量是 1, 为保证角动量守恒, 发射 d 的轨道角动量必须为 l=1, 因此轨道宇称为 $(-1)^{l=1} = -1$, 这要求核反应前后核体系的宇称必须相反. 但是, 从宇称守恒看, 第 2 激发态的宇称为 +1, d 和 α 粒子的宇称都是 + 1, 因此宇称守恒要求发射 d 的轨道角动量必须为偶数, 轨道角动量 l=1 是被宇称守恒所禁戒的. 这样, ^{6}Li 的第 2 激发态只能通过发射 γ 退激到它的基态, 这是 ^{6}Li 的唯一非弹性散射道.

因此, 中子引起 ^{6}Li 反应的开放反应道归结起来有 (n,γ), (n,n′), (n,p), (n,t)α, (n,nd)α, (n,2np)α 和 (n,p2t) 七个反应道. 除 (n,γ) 辐射俘获反应道外, 其余的前三个反应道属于单粒子发射过程, 这种两体反应中出射粒子和剩余核的能量是确定的, 仅用角分布就可以描述好它们的行为, 而后三个反应道则是多粒子发射, 因此 (n,nd)α, (n,2np)α 和 (n,p2t) 三个反应道则必须用双微分截面才能准确描述 (Zhang, 2001b).

当然, 在中子入射能量足够高时, 正如前面介绍的, ^{5}Li, ^{5}He, ^{6}He 在高激发态的行为, 除了 (n,d)^{5}He→(n,ndα) 反应道外, 还可能有 (n,d)^{5}He→(n,2dt) 反应道. 相对于 (n,2n)^{5}Li→(n,2npα) 反应道, ^{5}Li 的高激发态还可能开放 (n,2n)^{5}Li→(n,2nd)^{3}He 反应道. 类似地, 相对于 (n,np)^{5}He→(n,2npα) 反应道, ^{5}He 的高激发态也可能开放 (n,np)^{5}He→(n,npdt) 反应道.

对于轻核反应, 由于发射各种粒子后剩余核都处于分立能级态, 如前所述, 因此一些反应道的阈能值不能像中重核那样, 可以由反应 Q 值来简单地得到. 而且, 对于多粒子发射核反应过程, 对于同一个反应道, 对不同粒子发射顺序可以有不同的阈能值, 这是由轻核能级纲图的特性确定的, 这也是轻核反应的另一个特点. 下面介绍估算开放两次粒子发射需要入射中子的最小能量的方法. 这个方法可以延伸用到更多次粒子发射过程.

对于发射两个粒子到剩余核的 E_2 分立能级态的情况. 其中第一次粒子发射后达到可以发射第二粒子的分立能级能量为 E_1, 记发射第二粒子能量为 ε_2. 二次粒子发射后的能量分配包含四项, 第二粒子发射携带能量 ε_2, 在质心系中剩余核携带能量为 $m_2\varepsilon_2/M_2$, 其中 m_2 是被发射第二粒子的质量, M_2 是其剩余核的质量, 另外还要付出粒子在 E_1 状态核中的结合能 B_2, 再有就是剩余核的激发能 E_2, 它是剩余核的一个特定分立能级能量. 由能量守恒得到分立能级能量为 E_1 必须满足:

$$E_1 \geqslant \varepsilon_2 + \frac{m_2}{M_2}\varepsilon_2 + B_2 + E_2 = \frac{M_1}{M_2}\varepsilon_2 + B_2 + E_2 \tag{1.2.1}$$

若在 E_1 处没有能级存在, 则需要在比 E_1 大的地方找出发射第二粒子的分立能级 $E_{k_1} > E_1$.

记第一次粒子发射能量为 ε_1 时, 剩余核在质心系的动能为 $m_1\varepsilon_1/M_1$, 一次粒子发射后的能量分配仍然包含四项, 从 (1.1.3) 给出了复合核的激发能公式出发, 由能量守恒得到有关中子入射能量所满足的条件:

$$E^* = \frac{M_\mathrm{T}}{M_\mathrm{C}}E_\mathrm{n} + B_\mathrm{n} = \varepsilon_1 + \frac{m_1}{M_1}\varepsilon_1 + B_1 + E_1 = \frac{M_\mathrm{C}}{M_1}\varepsilon_1 + B_1 + E_1 \tag{1.2.2}$$

由 (1.2.2) 式可以解出需要的中子入射能量.

下面作为例子, 用 (1.2.1) 和 (1.2.2) 式对一些反应道开放要求的入射中子能量进行估算. 例如, 在 n $+^6$Li$\rightarrow^7$Li* $\rightarrow$d$+^5$He 核反应过程中, 当中子入射能量足够高时, 发射一个 d 核, 剩余核 ^{5}He 处于它的第 3 激发态 16.84MeV 分立能级时, 可以出现 ^{5}He $\rightarrow$d+t 核反应过程, 因此属于 (n,2dt) 反应道, 这也是一个造氚道. 可以估算出中子入射需要的最小能量. ^{7}Li 的激发能由 (1.1.3) 式给出, 出射 d 核的能量记为 ε_d.

$$\frac{M_{^6\mathrm{Li}}}{M_{^7\mathrm{Li}}}E_\mathrm{n} + B_\mathrm{n} = \frac{M_{^7\mathrm{Li}}}{m_{^5\mathrm{He}}}\varepsilon_\mathrm{d} + B_\mathrm{d} + 16.84 \tag{1.2.3}$$

这里 $B_\mathrm{n} = 7.249$MeV 和 $B_\mathrm{d} = 9.619$MeV 分别是中子和 d 核在 ^{7}Li 中的结合能. 计算表明, 从 ^{7}Li 出射 d 核的库仑位垒高度大约为 0.8MeV, 因此在估算中取最小值 $\varepsilon_\mathrm{d} = 0.8$MeV, 以便给出需要最小的中子入射能量. 这时由 (1.2.2) 式得到的中子入射能量要在 23.72MeV 以上. 若用 (1.1.9) 式计算得到的阈能值为 22.24MeV, 相差一个多兆电子伏特. 这个事实说明, 轻核反应的粒子发射都是通过分立能级, 与对中重核的计算阈能值有明显不同之处. 对于中重核, 都是从连续能级发射次级粒子, 表示处处都有能级存在. 而轻核是从分立能级发射次级粒子, 因此, 若可发射次级粒子之处没有对应的能级, 则需要向高能量才能处找到可发射次级粒子的能级, 这使得真正的阈能值比 (1.1.9) 式给出的要高.

以上结果表明, 当中子入射能量在 20MeV 以下时, (n,2dt) 反应道可以不考虑, 而当入射能量明显超过 20MeV 以上时, 就需要考虑这个核反应过程.

同样, 对上述 (n,2n)^{5}Li$\rightarrow$(n,2nd) ^{3}He 反应道开放所需要的中子入射能量也可以进行估算. 当从 ^{7}Li* 连续发射两个中子后, 剩余核 ^{5}Li 处于它的第 3 激发态分立能级 16.87MeV. 由于发射中子无库仑位垒的限制, 取 $\varepsilon_\mathrm{n} = 0$, $B_\mathrm{n} = 5.666$MeV 是发射第二中子在 ^{6}Li 中的结合能, 由 (1.2.1) 式得到, $E_1 = B_\mathrm{n}$+16.87MeV=22.536MeV. 由表 1.2 给出的 ^{6}Li 的能级纲图中可以看到, 只有在 24.779(3^-) 以上的能级才有发射第二中子到 ^{5}Li 的第 3 激发态分立能级的可能. 而由激发能公式 (1.1.3) 和 (1.2.2) 式得到

$$\frac{M_{^6\mathrm{Li}}}{M_{^7\mathrm{Li}}}E_\mathrm{n} + B_\mathrm{n} = B_\mathrm{n} + 24.779 \tag{1.2.4}$$

得到 E_n 起码在 28.9MeV 以上时, 才会有 (n,2n)^{5}Li* →(n,2nd)^{3}He 反应道开放的可能. 同样明显比 (1.1.9) 式给出的阈能值要高. 因此, 当 E_n <20MeV 时, (n,2nd)^{3}He 反应道可以不考虑, 而当入射能量在 30MeV 以上时, 就需要适当考虑这个核反应过程.

综合上面分析, 对三个以不同粒子发射顺序同归于同一个反应道的可以由下面公式归结.

对于 ^{6}Li(n,ndα) 反应道, 它包括下列三种反应途径:

$$\mathrm{n} + ^6\mathrm{Li} = \begin{cases} \mathrm{n}' + ^6\mathrm{Li}^*, & ^6\mathrm{Li}^* \to \mathrm{d} + \alpha \\ \mathrm{d} + ^5\mathrm{He}, & ^5\mathrm{He} \to \mathrm{n} + \alpha \\ \mathrm{n} + \mathrm{d} + \alpha, & \text{直接三体崩裂} \end{cases} \tag{1.2.5}$$

对于 ^{6}Li(n,p2t) 反应道, 它包括下列两种反应途径:

$$\mathrm{n} + ^6\mathrm{Li} = \begin{cases} \mathrm{p} + ^6\mathrm{He}^*, & ^6\mathrm{He}^* \to \mathrm{t} + \mathrm{t} \\ \mathrm{t} + ^4\mathrm{He}^*, & ^4\mathrm{He}^* \to \mathrm{p} + \mathrm{t} \end{cases} \tag{1.2.6}$$

对于 ^{6}Li(n,2np)α 反应道, 它包括下列四种反应途径:

$$\mathrm{n} + ^6\mathrm{Li} = \begin{cases} \mathrm{p} + ^6\mathrm{He}^*, & ^6\mathrm{He}^* \to \mathrm{n} + \mathrm{n} + \alpha \\ \mathrm{n} + \mathrm{p} + ^5\mathrm{He}, & ^5\mathrm{He} \to \mathrm{n} + \alpha \\ \mathrm{p} + \mathrm{n} + ^5\mathrm{He}, & ^5\mathrm{He} \to \mathrm{n} + \alpha \\ \mathrm{n} + \mathrm{n} + ^5\mathrm{Li}, & ^5\mathrm{Li} \to \mathrm{p} + \alpha \end{cases} \tag{1.2.7}$$

当然, ^{6}Li(n, p2t) 反应道开放阈能比较高. 因为 (1.2.6) 式中第一个途径需要剩余核 ^{6}He 处于第 4 激发态 E_k=14.6MeV 以上时, 而第二个途径需要 ^{4}He 处于第 4 激发态时, 才会出现 ^{6}Li(n,p2t) 反应.

众所周知, ^{4}He 的激发能级很高, ^{4}He* 的第 1 激发态是在 20.21MeV. 而质子在 ^{4}He 的结合能为 22.239MeV, 在 ^{4}He* 的第 4 激发态 (23.330MeV) 以上才允许发射质子. 中子在 ^{4}He 的结合能为 23.002MeV, 同样在 ^{4}He* 的第 4 激发态以上的能级才允许发射中子. 因此, ^{4}He 的前三个激发态分立能级属于非弹性散射, 是由 γ 退激来结束核反应过程. 因此, 在低能核反应中一般不考虑 ^{4}He 的激发态. 然而, 在中高能粒子入射情况下, ^{4}He 的激发态是需要考虑的. 由于本书主要考虑中子入射能量在 20MeV 以下的情况, 在以下的轻核反应道开放分析中, 都不再明显给出 ^{4}He 的激发态的核反应过程. 需要考虑时, 上述内容就已经概括了 ^{4}He* →^{4}He+γ, ^{4}He* →p+t, 以及 ^{4}He* →n+^{3}He 的反应过程, 将其加入到对应的反应序列即可.

对于 ^{6}Li(n,ndα) 反应道, 上面给出只有在 ^{4}He* 的第 4 激发态以上才允许发射质子和中子. 以从 ^{4}He* 发射中子为例, 这时核反应是属于 ^{6}Li(n,2nd^{3}He) 反应道.

而氘核在 ^{6}Li 中的结合能为 13.981MeV, 由于存在库仑位垒, 上面已经给出从 ^{6}Li 发射氘核的最小能量为 0.674MeV, 由 (1.2.1) 式得到 ^{6}Li的激发能必须大于 38.32MeV, 再由表 1.2 看出, 目前观测到 ^{6}Li的最高激发能级仅是 26.59MeV. 由此可见, 目前要描述上述反应过程尚属不易. 由此下面不再考虑这种反应途径.

纵览上述分析, 在不考虑 ^{4}He 的激发态发射次级粒子的情况下, 中子引发 ^{6}Li 的开放道由下面 (1.2.9) 式给出

$$
\mathrm{n}+{}^6\mathrm{Li}\rightarrow{}^7\mathrm{Li}^*\rightarrow\begin{cases}
\gamma+{}^7\mathrm{Li} & & (\mathrm{n},\gamma)^7\mathrm{Li}\\
\mathrm{n}+{}^6\mathrm{Li}\rightarrow\begin{cases}
{}^6\mathrm{Li}, & k=gs,2\\
\mathrm{p}+{}^5\mathrm{He}\rightarrow\mathrm{n}+\alpha, & k\geqslant 4\\
\mathrm{d}+\alpha, & k=1,3,4,\cdots\\
\mathrm{n}+{}^5\mathrm{Li}\rightarrow\mathrm{p}+\alpha, & k\geqslant 6
\end{cases} & & \begin{matrix}(\mathrm{n},\mathrm{n}')^6\mathrm{Li}\\(\mathrm{n},2\mathrm{np}\alpha)\\(\mathrm{n},\mathrm{nd}\alpha)\\(\mathrm{n},2\mathrm{np}\alpha)\end{matrix}\\
\mathrm{p}+{}^6\mathrm{He}\begin{cases}
{}^6\mathrm{He}_g, & k=gs\\
{}^6\mathrm{He}^*\rightarrow\mathrm{n}+\mathrm{n}+\alpha, & k=1\\
{}^6\mathrm{He}^*\rightarrow\mathrm{n}+{}^5\mathrm{He}\rightarrow\mathrm{n}+\alpha, & k>1
\end{cases} & & \begin{matrix}(\mathrm{n},\mathrm{p})^6\mathrm{He}_g\\(\mathrm{n},2\mathrm{np}\alpha)\\(\mathrm{n},2\mathrm{np}\alpha)\end{matrix}\\
\mathrm{d}+{}^5\mathrm{He}\rightarrow\mathrm{n}+\alpha,\quad k\geqslant 8 & & (\mathrm{n},\mathrm{nd}\alpha)\\
\mathrm{t}+\alpha & & (\mathrm{n},\mathrm{t}\alpha)\\
\mathrm{n}+\mathrm{d}+\alpha\qquad\text{直接三体崩裂} & & (\mathrm{n},\mathrm{nd}\alpha)
\end{cases}
\tag{1.2.8}
$$

由 (1.2.8) 式看出, 除了最主要的造氚道 ^{6}Li(n,tα) 和发射一个中子到 ^{6}Li 的第 2 激发能级形成的非弹性散射道 ^{6}Li(n,n′) 外, 其中 ^{6}Li(n,2npα) 反应道来自三个途径:

(1) 发射一个质子到 ^{6}He 的激发能级而生成;

(2) 有序发射一个中子和一个质子, 剩余核为 ^{5}He;

(3) 有序发射两个中子, 剩余核为 ^{5}Li.

这三种途径最终形成的末态包括两个中子, 一个质子和一个 α 粒子.

而 ^{6}Li(n,ndα) 反应道来自直接三体崩裂过程和发射一个中子到 ^{6}Li 的第 1 和第 3 以上激发能级, 以及发射一个氘核生成不稳定的 ^{5}He 而生成. 理论计算表明, 直接三体崩裂过程是一个重要的核反应途径, 但是目前还需要从实验测量方面给予验证. 还需要指出的是, 由上所述, 由于在轻核反应中, 除了非弹性散射外, 所有的剩余核都会衰变为质量小于等于 4 的粒子, 因此, 各种反应道的截面实验测量难度比较大, 只能用多粒子符合法的直接测量. 这在 20 世纪五六十年代曾经进行了一些 1p 壳轻核的反应截面的实验测量, 在这种直接测量中都需要用到由能级纲图, 换

算得到出射各种粒子的出射能量. 但是, 限于当时的历史条件, 对能级纲图的知识很缺乏, 不能给出准确的出射粒子能量信息, 使得实验测量结果不是明显失实, 就是同一个反应道反应截面的不同实验测量结果彼此之间存在很大的分歧. 这种情况不仅对 ^{6}Li 这一个核素, 而且对整个 1p 壳轻核都有类似情况发生.

对于总中子出射双微分截面, 近 20 多年来有若干实验室相继在不同入射能量下对多个出射角度测量了中子双微分截面谱, 由称为分角度能谱. 这些工作包括：1990 年 M. Baba 等对入射中子能量为 $E_{\rm n}=14.1$MeV 的 ^{6}Li 中子双微分谱的测量 (Baba et al., 1990); 1993 年夏海鸿等, 对入射中子能量 $E_{\rm n}=14.1$MeV(Xia et al., 1998) 的 ^{6}Li 中子双微分谱测量; 1985 年 S. Chiba 等, 对入射中子能量 $E_{\rm n}=5.6, 11.5$MeV 的 ^{6}Li 中子双微分谱测量 (Chiba et al., 1985); 1998 年 Ibaraki 等, 对入射中子能量 $E_{\rm n}=18$MeV 的 ^{6}Li 中子双微分谱测量 (Ibaraki et al., 1998); 2004 年阮锡超、陈国长等, 对入射中子能量 $E_{\rm n}=8.0, 10.27$MeV 的 ^{6}Li 中子双微分谱测量 (陈国长等, 2004). 这些测量结果为今后理论模型计算分析双微分截面数据奠定了实验检验基础. 同时, 在双微分截面谱的理论计算结果与实验测量结果的很好符合的基础上, 可以给出各种反应道截面值的信息, 使得可以澄清原来实验测量数据中存在的分歧, 同时在理论上也可以给出目前没有实验测量的反应道截面值的数值, 为评价这些反应道截面提供了可参考值. 通过对整个 1p 壳轻核的理论计算结果可以看出, 这是一个行之有效的评价途径. 由于这种情况有很多, 在下面除各别情况下给出一些叙述外, 就不再一一详述, 因为本书的主要目的是介绍轻核反应的理论框架和公式内容, 不对具体反应截面评价给予详细的讨论.

对中子引发 ^{6}Li 反应中的中子谱的理论模型研究方面, Chiba 等用 DWBA 配合末态相互作用的机制, 以弹性散射和非弹性散射的途径对这种轻核的光学势进行了研究, 并分别对 11.5MeV, 14.1MeV, 18MeV 的入射中子引发 ^{6}Li(n,n$'$) 次级中子出射的双微分谱进行了理论计算, 在合理范围内解释了实验测量数据 (Chiba et al., 1998). 但是, 在这种理论方法中存在的问题是, 由于将上述轻核反应都用直接反应机制来描述, 全部用两体反应过程, 这种直接反应过程不能将多次粒子发射的核反应过程得以准确的描述, 因此不能建立包含全部出射粒子信息的双微分截面数据. 因此, 怎样描述轻核反应的多次粒子发射过程, 多重粒子发射的途径以及主要反应机制是什么, 仍然是一个待研究的课题.

1.3　n+^{7}Li 的反应道的开放途径

^{7}Li 的天然丰度为 92.41% , 也是造氚的重要核素, 是锂电池的主要元素. 表 1.3 给出了 ^{7}Li 的能级纲图, 其中 1996 表示取自同位素第八版 (1996 年)(Firestone et al., 1996), 2002 是美国三角大学在 2002 年更新的能级纲图 (Tilley et al., 2002).

由表 1.3 同样可以看出, 无论是能级条数还是能级能量、自旋和宇称, 后者相对于前者都有不少改进之处. 除了第 1 激发能级的能量外, 其他能级的能量都发生了变化, 能级宽度也有所不同. 特别是能量在 8.75MeV 和 9.09MeV 处新增加了两条能级, 删除了原来 9.85MeV 的能级. 与 ^{6}Li 相似, 在高激发能态的能级的自旋宇称状态仍然未能确定.

表 1.3 ^{7}Li 的能级纲图

1996		2002	
$[E(J^\pi)]$/MeV	Γ	$[E(J^\pi)]$/MeV	Γ
$gs(3/2^-)$	stable	$gs(3/2^-)$	stable
$0.477612(1/2^-)$	73 fs	$0.477612(1/2^-)$	105 fs
$4.63(7/2^-)$	93.8keV	$4.652(7/2^-)$	69keV
$6.68(5/2^-)$	0.88MeV	$6.604(5/2^-)$	918keV
$7.4595(5/2^-)$	89.7keV	$7.454(5/2^-)$	80keV
		$8.75(3/2^-)$	4.712MeV
		$9.09(1/2^-)$	2.752MeV
$9.67(7/2^-)$	400keV	$9.\ 57(7/2^-)$	473keV
$9.85(3/2^-)$	1.20 MeV		
$11.24(3/2^-)$	260keV	$11.24(3/2^-)$	260keV
13.7	500keV	13.7	500keV
14.7	700keV	14.7	700keV

注: Γ 表示能级宽度, 表中没有给出能级宽度的能级表示目前实验上还无法确定其宽度.

对于中子引起的 ^{7}Li 核反应, 其开放反应道、相应 Q 值和反应阈能为

$$
\mathrm{n}+{}^7\mathrm{Li}\rightarrow{}^8\mathrm{Li}^*\rightarrow\begin{cases}
\gamma+{}^8\mathrm{Li}, & Q=2.033\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=0.000\mathrm{MeV}\\
\mathrm{n}'+{}^7\mathrm{Li}, & Q=-0.4776\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=0.5463\mathrm{MeV}\\
\mathrm{d}+{}^6\mathrm{He}, & Q=-7.750\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=8.868\mathrm{MeV}\\
\mathrm{t}+{}^5\mathrm{He}, & Q=-3.3362\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=3.845\mathrm{MeV}\\
2\mathrm{n}+{}^6\mathrm{Li}, & Q=-7.249\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=8.532\mathrm{MeV}\\
\mathrm{n}+\mathrm{p}+{}^6\mathrm{Li}, & Q=-9.974\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=12.856\mathrm{MeV}\\
\mathrm{n}+\mathrm{d}+{}^5\mathrm{He}, & Q=-9.618\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=10.606\mathrm{MeV}\\
\mathrm{n}+\mathrm{t}+\alpha, & Q=-2.467\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=5.296\mathrm{MeV}\\
2\mathrm{n}+\mathrm{p}+{}^5\mathrm{He}, & Q=-11.842\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=15.670\mathrm{MeV}\\
2\mathrm{n}+\mathrm{d}+\alpha, & Q=-8.724\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=11.06\mathrm{MeV}
\end{cases}
$$

由此可以看出, 由于中子诱发 ^{7}Li 反应的剩余核中有很多是不稳定核, 正如前言中所述, 这些剩余核可以伴随两体崩裂和三体崩裂过程, 因而形成复杂的非有序粒子发射的反应道, 同时, 计算反应道的阈能和反应 Q 值的方法也不能直接应用 (1.1.4) 式.

由于 ^{7}Li 的第 2 激发能级以上都可以发射氚, 属于 (n,nt)α 反应道. 因此, 对于 ^{7}Li(n,nγ) 反应道仅是 ^{7}Li 的第 1 激发能级是属于真正的非弹性散射道. 这与 ^{6}Li 相似, 都仅有一条激发能级属于非弹性散射道. 不过 ^{7}Li 是第 1 激发能级, 而 ^{6}Li 是第 2 激发能级.

对于反应 ^{7}Li(n, d)^{6}He, 如果余核 ^{6}He 处于基态, 它就属于 (n,d) 反应道; 而当 ^{6}He 处于它的第 1 激发态时, 会通过三体崩裂变为两个中子和一个 α 粒子; 而当 ^{6}He 处于它的第 2 激发态以上时, 可以首先发射一个中子, 剩余核是 ^{5}He,^{5}He 是不稳定的, 它自发崩裂为一个中子和一个 α 粒子, 因而它们都最终属于 (n,2nd)α 反应道.

对于从复合核 ^{8}Li 发射两个中子后, 剩余核是 ^{6}Li. 如上所述, 如果 ^{6}Li 处于基态和第 2 激发能级时, 属于 (n,2n)^{6}Li 反应道, 而处于第 1 激发能级和第 3 激发能级以上时, ^{6}Li 可以继续发射氘核, 同样属于上面描述的 (n,2nd)α 反应道.

在 ^{7}Li 的第 6 激发能级以上, 可以发射氘核, 剩余核是 ^{5}He, 它会立即分裂为 $\mathrm{n}+\alpha$, 因而也属于 (n,2nd)α 反应道. 在 ^{7}Li 的第 7 激发能级以上, 可以发射质子, 剩余核是 ^{6}He. 当剩余核 ^{6}He 处于基态时, 它就属于 (n,np) 反应道; 而当 ^{6}He 处于它的激发态时, 会通过上述不同途径产生两个中子和一个 α 粒子, 因而它们都最终属于 (n,3np)α 反应道. 当然, 在入射中子能量足够高时, 可以达到 ^{4}He 的激发态, 这完全同与 ^{6}Li 的情况. 这里就不再重复叙述.

综合上面分析, 对四个以不同粒子发射顺序同归于同一个反应道的可以归结为造氚道 ^{7}Li(n, nt)α 是来自由 (1.3.1) 式所示的两种途径:

$$\mathrm{n}+{}^7\mathrm{Li}\rightarrow{}^8\mathrm{Li}^*\rightarrow\begin{cases}\mathrm{n}+{}^7\mathrm{Li}^*, & {}^7\mathrm{Li}^*\rightarrow\mathrm{t}+\alpha\\ \mathrm{t}+{}^5\mathrm{He}, & {}^5\mathrm{He}\rightarrow\mathrm{n}+\alpha\end{cases}\tag{1.3.1}$$

对于 (n, 2nd) α 反应道, 包括由 (1.3.2) 式所示的四种反应途径:

$$\mathrm{n}+{}^7\mathrm{Li}\rightarrow{}^8\mathrm{Li}^*\rightarrow\begin{cases}\mathrm{n}+\mathrm{n}+{}^6\mathrm{Li}^*, & {}^6\mathrm{Li}^*\rightarrow\mathrm{d}+\alpha\\ \mathrm{n}+\mathrm{d}+{}^5\mathrm{He}, & {}^5\mathrm{He}\rightarrow\mathrm{n}+\alpha\\ \mathrm{d}+\mathrm{n}+{}^5\mathrm{He}, & {}^5\mathrm{He}\rightarrow\mathrm{n}+\alpha\\ \mathrm{d}+{}^6\mathrm{He}^*, & {}^6\mathrm{He}^*\rightarrow\mathrm{n}+\mathrm{n}+\alpha\end{cases}\tag{1.3.2}$$

对于 ^{7}Li(n, 3npα) 反应道来自由 (1.3.3) 式所示的四种反应途径:

$$\mathrm{n}+{}^7\mathrm{Li}\rightarrow{}^8\mathrm{Li}^*\rightarrow\begin{cases}\mathrm{n}+\mathrm{n}+{}^6\mathrm{Li}^*, & {}^6\mathrm{Li}^*\rightarrow\mathrm{n}+{}^5\mathrm{Li}, & {}^5\mathrm{Li}\rightarrow\mathrm{p}+\alpha\\ \mathrm{n}+\mathrm{n}+{}^6\mathrm{Li}^*, & {}^6\mathrm{Li}^*\rightarrow\mathrm{p}+{}^5\mathrm{He}, & {}^5\mathrm{He}\rightarrow\mathrm{n}+\alpha\\ \mathrm{n}+\mathrm{p}+{}^6\mathrm{He}^*, & {}^6\mathrm{He}^*\rightarrow\mathrm{n}+\mathrm{n}+\alpha\\ \mathrm{p}+\mathrm{n}+{}^6\mathrm{He}^*, & {}^6\mathrm{He}^*\rightarrow\mathrm{n}+\mathrm{n}+\alpha\end{cases}\tag{1.3.3}$$

^{7}Li(n,np)^{6}He$_g$ 是由从复合核 ^{8}Li* 相继发射一个质子和一个中子或相继发射一个中子和一个质子, 剩余核为 ^{6}He* 的基态 ^{6}He$_g$, 这两种途径由 (1.3.4) 式所示:

$$\mathrm{n} + {}^{7}\mathrm{Li} \to {}^{8}\mathrm{Li}^{*} \to \begin{cases} \mathrm{n} + \mathrm{p} + {}^{6}\,\mathrm{He}_{g} \\ \mathrm{p} + \mathrm{n} + {}^{6}\mathrm{He}_{g} \end{cases} \tag{1.3.4}$$

纵览上述分析, 在不考虑 ^{4}He 的被激发情况下, 中子引发 ^{7}Li 的开放道由 (1.3.5) 式给出, 可以看出, 上述五个反应道是通过各自不同的反应途径而形成的.

在不考虑 ^{4}He 被激发的情况下, 能量在 30MeV 以下的中子引起 ^{7}Li 反应的开放反应道有 (n, γ), (n, n′), (n,d), (n,2n), (n,np), (n,nt)α, (n,2nd)α 和 (n,3np)α 八个反应道. 后五个反应道 (n,2n), (n,np), (n,nt)α, (n,2nd)α 和 (n,3np)α 中涉及了多粒子发射, 需要用双微分截面才能正确描述其反应行为 (Zhang et al., 2002).

$$\mathrm{n}+{}^{7}\mathrm{Li} \to \begin{cases}
\gamma+{}^{8}\mathrm{Li} & & & (\mathrm{n},\gamma)^{8}\mathrm{Li} \\
\mathrm{n}+{}^{7}\mathrm{Li} \to \begin{cases}
{}^{7}\mathrm{Li}, \quad k=gs & & \mathrm{elastic} \\
{}^{7}\mathrm{Li}+\gamma, \quad k=1 & & (\mathrm{n},\mathrm{n}')^{7}\mathrm{Li} \\
\mathrm{n}+{}^{6}\mathrm{Li} \to \begin{cases}
{}^{6}\mathrm{Li}, & k=gs,2 & (\mathrm{n},2\mathrm{n})^{6}\mathrm{Li} \\
\mathrm{d}+\alpha, & k=1,3,4\cdots & (\mathrm{n},2\mathrm{nd}\alpha) \\
\mathrm{p}+{}^{5}\mathrm{He} \to \mathrm{n}+\alpha, & k\geqslant 4 & (\mathrm{n},3\mathrm{np}\alpha) \\
\mathrm{n}+{}^{5}\mathrm{Li} \to \mathrm{p}+\alpha, & k\geqslant 6 & (\mathrm{n},3\mathrm{np}\alpha)
\end{cases} \\
\mathrm{p}+{}^{6}\mathrm{He} \begin{cases}
{}^{6}\mathrm{He}_{g}, \quad k\geqslant 6 & (\mathrm{n},\mathrm{np})^{6}\mathrm{He} \\
{}^{6}\mathrm{He}^{*} \to \mathrm{n}+\mathrm{n}+\alpha, & (\mathrm{n},3\mathrm{np}\alpha)
\end{cases} \\
\mathrm{d}+{}^{5}\mathrm{He} \to \mathrm{n}+\alpha, \quad k\geqslant 6 & & (\mathrm{n},2\mathrm{nd}\alpha) \\
\mathrm{t}+\alpha, \quad k=2,3,4\cdots & & (\mathrm{n},\mathrm{nt}\alpha)
\end{cases} \\
\mathrm{p}+\mathrm{n}+{}^{6}\mathrm{He} \begin{cases}
{}^{6}\mathrm{He}_{g}, \quad k\geqslant 8 & (\mathrm{n},\mathrm{np})^{6}\mathrm{He} \\
{}^{6}\mathrm{He}^{*} \to \mathrm{n}+\mathrm{n}+\alpha & (\mathrm{n},3\mathrm{np}\alpha)
\end{cases} \\
\mathrm{d}+{}^{6}\mathrm{He} \begin{cases}
{}^{6}\mathrm{He}_{g}, \quad k\geqslant 8 & (\mathrm{n},\mathrm{d})^{6}\mathrm{He} \\
{}^{6}\mathrm{He}^{*} \to \mathrm{n}+\mathrm{n}+\alpha & (\mathrm{n},2\mathrm{nd}\alpha)
\end{cases} \\
\mathrm{t}+{}^{5}\mathrm{He} \to \mathrm{n}+\alpha & & & (\mathrm{n},\mathrm{nt}\alpha)
\end{cases} \tag{1.3.5}$$

在总中子出射双微分截面实验测量工作方面, 国内外已经有相当多的实验室相继完成了在不同中子入射能量下, 对多个角度的总出射中子双微分截面的测量工作. 这些工作包括：1979 年 M. Baba 等对入射中子能量为 $E_{\mathrm{n}} = 5.1\mathrm{MeV}$ 和 $E_{\mathrm{n}} = 6.6\mathrm{MeV}$ 的测量 (Baba et al., 1979), 1985 年 S. Chiba 等, 对入射中子能量 $E_{\mathrm{n}} = 14.2\mathrm{MeV}$(Chiba et al., 1985) 和 $E_{\mathrm{n}} = 11.2, 18.0\mathrm{MeV}$ 的测量 (Chiba et al., 2001), 1993 年夏海鸿等, 对入射中子能量为 $E_{\mathrm{n}} = 14.1\mathrm{MeV}$(Xia et al., 1993) 的测量, 1998 年 Ibaraki 等, 对入射中子能量 $E_{\mathrm{n}} = 18\mathrm{MeV}$ 的测量 (Ibaraki et al., 1998), 以及 2005 年阮锡超、陈国长等, 对入射中子能量为 $E_{\mathrm{n}} = 8.0, 10.27\mathrm{MeV}$ 的测量 (阮锡超, 2005). 这些测量结果为今后理论模型的计算分析奠定了实验的检验基础. 并由对这些实验测量的双微分截面的符合来确定一些没有实验测量出射中子分截面

给出截面值, 以及造氚道中各分立能级的贡献值.

1.4 n+^{9}Be 的反应道的开放途径

^{9}Be 是核工程中得到广泛应用的重要核素, 它是铍元素唯一的稳定同位素. 在中子引发的核反应靶核质量数大于 5 的核素中, 是唯一没有非弹性散射道的核素. 这是因为 ^{9}Be 的第 1 激发态的激发能为 1.684MeV, 而中子在 ^{9}Be 中的结合能仅为 1.665MeV, 因此 ^{9}Be 的第 1 激发态就可以发射中子, 而剩余核 ^{8}Be 又是不稳定核, 会自发崩裂为两个 α 粒子. 因而 ^{9}Be 的 (n,2n) 反应最终是产生两个中子和两个 α 粒子. 作为中子增值剂, ^{9}Be(n,2n) 反应道的数据是有被广泛应用的价值.

表 1.4 给出了 ^{9}Be 核的能级纲图, 其中 2004 年发表的 (Tilley et al., 2004) 是目

表 1.4 ^{9}Be 的分立能级纲图

1996		2004	
$[E(J^\pi)]$/MeV	Γ	$[E(J^\pi)]$/MeV	Γ
gs($3/2^-$)	stable	gs($3/2^-$)	stable
1.684 ($1/2^+$)	217keV	1.684 ($1/2^+$)	217keV
2.4294 ($5/2^-$)	0.77keV	2.4294 ($5/2^-$)	0.78keV
2.78 ($1/2^-$)	1.080MeV	2.78 ($1/2^-$)	1.080MeV
3.049 ($5/2^+$)	282keV	3.049 ($5/2^+$)	282keV
4.704($3/2^+$)	743keV	4.704 ($3/2^+$)	743keV
		5.59 ($3/2^-$)	1.331MeV
		6.38 ($7/2^-$)	1.221 MeV
6.76 ($9/2^+$)	1330keV	6.76 ($9/2^+$)	1330keV
7.94 ($1/2^-$)	≈ 1MeV	7.94 ($1/2^-$)	≈ 1MeV
11.283	575keV	11. 283 ($7/2^+$)	575keV
11.81	400keV	11.81($5/2^-$)	400keV
13.79	590keV	13.79 (?)	590keV
14.3922 ($3/2^-$)	0.381keV	14.3922 ($3/2^-$)	0.381keV
14.4	≈ 800keV	14.48($5/2^-$)	≈ 800keV
15.10		15.10	350keV
15.97	≈ 300keV	15.97	≈ 300keV
16.671($5/2^+$)	41keV	16.671($5/2^+$)	41keV
16.9752($1/2^-$)	0.389keV	16.9752($1/2^-$)	0.389keV
17.298	200keV	17.298($5/2^-$)	200keV
17.493	47keV	17.493 ($7/2^+$)	47keV
18.02		18.02	
18.58		18.58	
18.650	300keV	18.650($5/2^-$)	300keV
19.20	310keV	19.20	310keV
19.90		19.420($9/2^+$)	600keV
20.47		20.51	600keV
20.74	1000keV	20.75	680keV
(21.4)		(21.4)	
(22.4)		(22.4)	
(23.8)		(23.8)	

注：1996 表示取自同位素第八版; 而 2004 表示取自由美国三角大学国家实验室公布的数据.Γ 表示能级宽度. 表中没有给出能级宽度的能级表示目前实验上还无法确定其宽度. 括号中的能量是尚待确定的值.

前最新的能级纲图, 作为比较, 同时也给出了 1996 年同位素第八版的能级纲图 (Firestone et al., 1996), 以便作为比较. 可以看出, 在新的能级纲图中, 在低激发态增加了 5.59 ($3/2^-$) 和 6.38($7/2^-$) 两条能级, 有些以前自旋宇称未被确定的现在确定了, 但是现在仍然有些能级的自旋宇称还未能确定. 例如, 6.38 ($7/2^-$), 7.94 ($1/2^-$), 13.79 (?) 等能级的自旋宇称还未能最终确定下来, 仅给出一个或者多个推荐值.

中子引发 ^{9}Be 核反应的开放道和相应的阈能值由下面给出, 这里仅给出了两次粒子发射过程, 对于剩余核处于 ^{6}Li, ^{7}Li 的激发态时, 可以由上两节给出的内容继续给出它们进一步的粒子发射过程.

$$
\mathrm{n}+{}^9\mathrm{Be}={}^{10}\mathrm{Be}\rightarrow\begin{cases}
\gamma+{}^{10}\mathrm{Be}, & Q=6.811\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=0.000\mathrm{MeV}\\
\mathrm{p}+{}^9\mathrm{Li}, & Q=-12.825\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=14.260\mathrm{MeV}\\
\alpha+{}^6\mathrm{He}, & Q=-0.598\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=0.6649\mathrm{MeV}\\
\mathrm{d}+{}^8\mathrm{Li}, & Q=-14.663\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=16.3041\mathrm{MeV}\\
\mathrm{t}+{}^7\mathrm{Li}, & Q=-10.439\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=11.6037\mathrm{MeV}\\
{}^3\mathrm{He}+{}^7\mathrm{He}, & Q=-21.623\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=24.0431\mathrm{MeV}\\
{}^5\mathrm{He}+{}^5\mathrm{He}, & Q=-3.362\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=3.7383\mathrm{MeV}\\
2\mathrm{n}+{}^8\mathrm{Be}, & Q=-1.665\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=1.8514\mathrm{MeV}\\
(\mathrm{np}+\mathrm{pn})+{}^8\mathrm{Li}, & Q=-16.887\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=18.7770\mathrm{MeV}\\
(\mathrm{n}\alpha+\alpha\mathrm{n})+{}^5\mathrm{He}, & Q=-2.467\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=2.7431\mathrm{MeV}\\
(\mathrm{nd}+\mathrm{dn})+{}^7\mathrm{Li}, & Q=-16.696\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=18.5646\mathrm{MeV}\\
(\mathrm{nt}+\mathrm{tn})+{}^6\mathrm{Li}, & Q=-17.688\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=19.6677\mathrm{MeV}\\
(\mathrm{p}\alpha+\alpha\mathrm{p})+{}^5\mathrm{H}, & Q=-16.135\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=17.9048\mathrm{MeV}\\
(\mathrm{pt}+\mathrm{tp})+{}^6\mathrm{He}, & Q=-20.413\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=22.6976\mathrm{MeV}\\
2\mathrm{t}+\alpha, & Q=-12.906\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=14.3504\mathrm{MeV}\\
(\mathrm{td}+\mathrm{dt})+{}^5\mathrm{He}, & Q=-20.058\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=22.3029\mathrm{MeV}
\end{cases}
$$

如果对同一条分立能级从能量上看, 既允许发射中子, 也允许发射某些带电粒子时, 就会产生多粒子发射的竞争过程. 当然, 角动量和宇称守恒是其中的制约因素之一, 当一种粒子发射被这个守恒定律禁戒时, 该粒子发射就会退出竞争. 但是, 如果它们都满足角动量和宇称守恒定律的要求, 它们就会按一定规则竞争, 下一章将给出发射概率的计算公式以及不同粒子的发射分支比. 由于带电粒子发射都存在库仑势垒的阻碍, 与中子相比, 带电粒子的发射分支比都显得小. 前面列出的后 4 个反应道都连续发射两个带电粒子. 实际计算表明, 发射两个带电粒子的反应截面都非常小, 以致可以忽略不计. ^{9}Be 的俘获辐射截面很小. 研究表明复合核 ^{10}Be 可以发生直接三体崩裂, 产生两个中子和一个 ^{8}Be, 而 ^{8}Be 是不稳定核, 自发崩裂为两个 α 粒子, 由下式所示:

$$
\mathrm{n}+{}^9\mathrm{Be}\rightarrow{}^{10}\mathrm{Be}^*\rightarrow\mathrm{n}+\mathrm{n}+{}^8\mathrm{Be}, \quad {}^8\mathrm{Be}\rightarrow\alpha+\alpha \tag{1.4.1}
$$

由于最终产生两个中子和两个 α 粒子, 因此属于 ^{9}Be 的 (n,2n) 反应道.

如果从复合核 ^{10}Be 发射的第一个粒子是中子, 除了剩余核为 ^{9}Be 基态属于复合核弹性散射道外, 发射到 ^{9}Be 的其他分立能级的过程都属于 ^{9}Be 的 (n,2n) 反应道. 而从 ^{9}Be 的第 4 激发能级以上还可以出现发射 α 粒子的竞争, 剩余核是 ^{6}He. 由已经给出 ^{6}He 核素的性质, 发射到 ^{6}He 的基态是属于 (n,α) 反应道, 而发射到 ^{6}He 的第 1 激发态, ^{6}He 是通过三体崩崩裂成为两个中子和一个 α 粒子. 当发射到 ^{6}He 的第 2 激发态以上时, ^{6}He 可以直接发射中子, 剩余核是 ^{5}He, 自发崩裂为一个中子核一个 α 粒子. 上述反应给出最终的产物均为两个中子和两个 α 粒子, 因此都属于 ^{9}Be 的 (n,2n) 反应道. 上述核反应过程由 (1.4.2) 式所示：

$$\mathrm{n} +^9 \mathrm{Be} \to {}^{10}\mathrm{Be}^* \to \begin{cases} \mathrm{n} +^9 \mathrm{Be}_g \\ \mathrm{n} + {}^9\mathrm{Be}, \quad {}^9\mathrm{Be} \to \mathrm{n} +^8 \mathrm{Be}, \quad {}^8\mathrm{Be} \to \alpha + \alpha, & k \geqslant 1 \\ \alpha +^6 \mathrm{He}_{k=1}, \quad {}^6\mathrm{He}_{k=1} \to \mathrm{n} + \mathrm{n} + \alpha, & k \geqslant 4 \\ \alpha +^6 \mathrm{He}_{k>1}, \quad \mathrm{He}_{k>1} \to \mathrm{n} +^5 \mathrm{He}, \quad {}^5\mathrm{He} \to \mathrm{n} + \alpha, & k \geqslant 4 \end{cases} \tag{1.4.2}$$

此外, ^{10}Be 还可以发生 ^{5}He+^{5}He 两体崩裂过程, 每个 ^{5}He 自发崩裂为一个中子和一个 α 粒子, 最终产物为两个中子和两个 α 粒子, 因此也属于 ^{9}Be 的 (n,2n) 反应道.

$$\mathrm{n} + {}^9\mathrm{Be} \to {}^{10}\mathrm{Be}^* \to {}^5\mathrm{He} + {}^5\mathrm{He}, \quad 2{}^5\mathrm{He} \to 2\mathrm{n} + 2\alpha \tag{1.4.3}$$

综上所述归结起来, 对于最主要的 ^{9}Be(n,2n) 反应道, 是由下面六种反应途径来实现的：

$$n+^9\mathrm{Be} \to {}^{10}\mathrm{Be}^* \to \begin{cases} \mathrm{n}+{}^9\mathrm{Be}^*, \quad {}^9\mathrm{Be}^* \to \mathrm{n}+{}^8\mathrm{Be}^*, \quad {}^8\mathrm{Be}^* \to \alpha+\alpha, \quad \text{两体崩裂} \\ \mathrm{n}+{}^9\mathrm{Be}^*, \quad {}^9\mathrm{Be}^* \to \alpha+{}^5\mathrm{He}^*, \quad {}^5\mathrm{He}^* \to \mathrm{n}+\alpha, \quad \text{两体崩裂} \\ \alpha+{}^6\mathrm{He}^*, \quad {}^6\mathrm{He}^* \to \mathrm{n}+\mathrm{n}+\alpha, \quad \text{第 1 激发态, 三体崩裂} \\ \alpha+{}^6\mathrm{He}^*, \quad {}^6\mathrm{He}^* \to \mathrm{n}+{}^5\mathrm{He}^*, \quad {}^5\mathrm{He}^* \to \mathrm{n}+\alpha, \quad \text{第 2 激发态以上} \\ {}^5\mathrm{He}+{}^5\mathrm{He}, \quad 2{}^5\mathrm{He} \to 2\mathrm{n}+2\alpha, \quad \text{双两体崩裂} \\ \mathrm{n}+\mathrm{n}+{}^8\mathrm{Be}, \quad \text{直接三体崩裂; } {}^8\mathrm{Be} \to \alpha+\alpha, \quad \text{两体崩裂} \end{cases} \tag{1.4.4}$$

当入射中子能量比较高时, 如果发射一个中子达到剩余核 ^{9}Be 的第 18 激发态能级以上时, 就开始发生第二个发射粒子为质子的竞争过程, 剩余核是 ^{8}Li, 属于 ^{9}Be(n,np) 反应道. 但是该反应道阈能为 18.875MeV. ^{8}Li 的前三条能级不再发射任何粒子, 而从第 4 激发能级以上时可以继续发射中子. 剩余核 ^{7}Li 处于不同发态能级, 这会属于不同的反应道. 处于 ^{7}Li 的第 2 激发态以上时, 就会出现 $^7\mathrm{Li} \to \mathrm{t} + \alpha$ 反应, 属于 ^{9}Be(n,2nptα) 反应道. 正如上面所述, 最后都变成质量数小于等于 4 的粒子集团. 详细描述可以参见关于 ^{7}Li 开放道的分析一节, 它们的反应阈能都很高. 利用上面的公式, 可以计算 ^{9}Be(n, 2nptα) 反应道开放的阈能. ^{7}Li 的第 3 激发能级能量是 4.652MeV, 中子在 ^{8}Li 中的结合能是 2.033MeV, ^{8}Li 的第 4 激发能级能量是

3.210MeV, 质子在 ^{9}Be 中的结合能是 19.636MeV. 由此可以计算出 ^{9}Be(n, 2nptα) 反应道开放的阈能为 24.907MeV.

关于发射一个中子和一个质子后的反应道开放情况由 (1.4.5) 式给出

$$\mathrm{n}+{}^9\mathrm{Be} \to {}^{10}\mathrm{Be}^* \to \begin{cases} \mathrm{n}+{}^9\mathrm{Be}, \quad {}^9\mathrm{Be} \to \mathrm{p}+{}^8\mathrm{Li}_{k\leqslant 1} & k \geqslant 18 \\ \mathrm{n}+{}^9\mathrm{Be}, \quad {}^9\mathrm{Be} \to \mathrm{p}+{}^8\mathrm{Li}_{k\geqslant 2}, \quad {}^8\mathrm{Li}_{k\geqslant 2} \to \mathrm{n}+{}^7\mathrm{Li}_{k\leqslant 1}, & k \geqslant 18 \\ \mathrm{n}+{}^9\mathrm{Be}, \quad {}^9\mathrm{Be} \to \mathrm{p}+{}^8\mathrm{Li}_{k\geqslant 2}, \quad {}^8\mathrm{Li}_{k\geqslant 2} \to \mathrm{n}+{}^7\mathrm{Li}_{k\geqslant 2}, & \\ \qquad {}^7\mathrm{Li}_{k\geqslant 2} \to \mathrm{t}+\alpha, & k \geqslant 18 \end{cases} \tag{1.4.5}$$

对于从复合核 ^{10}Be 发射的第一粒子是质子时, 剩余核是 ^{9}Li. 由于质子在复合核内的结合能比较大, 因此发射质子的阈能可高达 14.26MeV. 而 ^{9}Li 的寿命很短, 为 178.3ms, 通过 β^- 衰变成为 ^{9}Be. 从 ^{9}Li 的第 2 激发能级开始可以继续发射第二中子, 属于 ^{9}Be(n,pn) 反应道, 阈能为 19.037MeV, 剩余核是 ^{8}Li. 如上所述, 有关开放的反应道由 (1.4.6) 式给出

$$\mathrm{n}+{}^9\mathrm{Be} \to {}^{10}\mathrm{Be}^* \to \begin{cases} \mathrm{p}+{}^9\mathrm{Li}, & k = gs, 1 \\ \mathrm{p}+{}^9\mathrm{Li}, \quad {}^9\mathrm{Li} \to \mathrm{n}+{}^8\mathrm{Li}_{k\leqslant 1}, & k \geqslant 2 \\ \mathrm{p}+{}^9\mathrm{Li}, \quad {}^9\mathrm{Li} \to n+{}^8\mathrm{Li}_{k\geqslant 2}, \quad {}^8\mathrm{Li}_{k\geqslant 2} \to \mathrm{n}+{}^7\mathrm{Li}_{k\leqslant 1}, & k \geqslant 4 \\ \mathrm{p}+{}^9\mathrm{Li}, \quad {}^9\mathrm{Li} \to \mathrm{n}+{}^8\mathrm{Li}_{k\geqslant 2}, \quad {}^8\mathrm{Li}_{k\geqslant 2} \to \mathrm{n}+{}^7\mathrm{Li}_{k\geqslant 2}, & \\ \qquad {}^7\mathrm{Li}_{k\geqslant 2} \to \mathrm{t}+\alpha, & k \geqslant 4 \end{cases} \tag{1.4.6}$$

当从复合核 ^{10}Be 发射的第一粒子是氘核时, 剩余核是 ^{8}Li. 同上所述, ^{8}Li 的前三条能级不能发射任何粒子, 因此属于 ^{9}Be(n,d) 反应道, 阈能为 16.30MeV. 而从 ^{8}Li 的第 4 激发能级以上时, 可以继续发射中子. 若剩余核 ^{7}Li 处于基态和第 1 激发态, 这就属于 ^{9}Be(n,nd) 反应道, 阈能为 18.612MeV. 而当 ^{7}Li 处于第 2 激发态以上时, 就会出现 $^7\mathrm{Li} \to \mathrm{t}+\alpha$ 反应, 属于 ^{9}Be(n,ndtα) 反应道, 阈能为 24.119MeV. 有关开放的反应道由 (1.4.7) 式给出.

$$\mathrm{n}+{}^9\mathrm{Be} \to {}^{10}\mathrm{Be}^* \to \begin{cases} \mathrm{d}+{}^8\mathrm{Li}, & k \leqslant 2 \\ \mathrm{d}+{}^8\mathrm{Li}, \quad {}^8\mathrm{Li} \to \mathrm{n}+{}^7\mathrm{Li}_{k\leqslant 1}, & k \geqslant 3 \\ \mathrm{d}+{}^8\mathrm{Li}, \quad {}^8\mathrm{Li} \to \mathrm{n}+{}^7\mathrm{Li}_{k\geqslant 2}, \quad {}^8\mathrm{Li}_{k\geqslant 2} \to \mathrm{n}+{}^7\mathrm{Li}_{k\leqslant 1}, & k \geqslant 6 \end{cases} \tag{1.4.7}$$

当从复合核 ^{10}Be 发射的第一粒子是氚核时, 剩余核是 ^{7}Li. 如果剩余核 ^{7}Li 处于基态和第 1 激发态, 这就属于 ^{9}Be(n,t) 反应道, 阈能为 11.6037MeV. 而当 ^{7}Li 处于第 2 激发态以上时, 就会出现 $^7\mathrm{Li} \to \mathrm{t}+\alpha$ 反应, 属于 ^{9}Be(n,2tα) 反应道, 阈能为 23.795MeV. 由 ^{7}Li 的有关开放的反应道由 (1.4.8) 式给出. 当然, 这些反应道的阈能都很高.

$$
\mathrm{n}+^9\mathrm{Be}\rightarrow\begin{cases}
\mathrm{t}+^7\mathrm{Li}(k=gs,1) & (\mathrm{n,t})^7\mathrm{Li}\\
\mathrm{t}+^7\mathrm{Li}(k\geqslant 2),\quad ^7\mathrm{Li}\rightarrow\mathrm{t}+\alpha, & (\mathrm{n,2t\alpha})\\
\mathrm{t}+^7\mathrm{Li}(k\geqslant 6),\quad ^7\mathrm{Li}\rightarrow\mathrm{n}+^6\mathrm{Li}(k=gs,2), & (\mathrm{n,nt})^6\mathrm{Li}\\
\mathrm{t}+^7\mathrm{Li}(k\geqslant 6),\quad ^7\mathrm{Li}\rightarrow\mathrm{n}+^6\mathrm{Li}(k=1,3,4,\cdots) & \\
\qquad ^6\mathrm{Li}\rightarrow\mathrm{d}+\alpha, & (\mathrm{n,ndt\alpha})\\
\mathrm{t}+^7\mathrm{Li}(k\geqslant 6),\quad ^7\mathrm{Li}\rightarrow\mathrm{n}+^6\mathrm{Li}(k\geqslant 4) & \\
\qquad ^6\mathrm{Li}\rightarrow\mathrm{p}+^5\mathrm{He},\quad ^5\mathrm{He}\rightarrow\mathrm{n}+\alpha, & (\mathrm{n,2npt\alpha})\\
\mathrm{t}+^7\mathrm{Li}(k\geqslant 6),\quad ^7\mathrm{Li}\rightarrow\mathrm{n}+^6\mathrm{Li}(k\geqslant 6) & \\
\qquad ^6\mathrm{Li}\rightarrow\mathrm{n}+^5\mathrm{Li}\quad ^5\mathrm{Li}\rightarrow\mathrm{p}+\alpha, & (\mathrm{n,2npt\alpha})\\
\mathrm{t}+^7\mathrm{Li}(k\geqslant 8),\quad ^7\mathrm{Li}\rightarrow\mathrm{p}+^6\mathrm{He}(gs), & (\mathrm{n,npt})^6\mathrm{He}\\
\mathrm{t}+^7\mathrm{Li}(k\geqslant 8),\quad ^7\mathrm{Li}\rightarrow\mathrm{p}+^6\mathrm{He}(k\geqslant 1) & \\
\qquad ^6\mathrm{He}\rightarrow\mathrm{n}+\mathrm{n}+\alpha, & (\mathrm{n,2npt\alpha})\\
\mathrm{t}+^7\mathrm{Li}(k\geqslant 8),\quad ^7\mathrm{Li}\rightarrow\mathrm{d}+^5\mathrm{He} & \\
\qquad ^5\mathrm{He}\rightarrow\mathrm{n}+\alpha, & (\mathrm{n,ndt\alpha})
\end{cases}
\tag{1.4.8}
$$

这里对 (1.4.8) 式中最后一个反应途径的阈能进行估算, 由 ^{7}Li 的能级纲图表给出的第 8 激发能级的能量是 11.24MeV, 而氚在 ^{10}Be 中的结合能是 17.25MeV, 得到的反应阈能为 24.09MeV. 再考虑到考虑位垒的限制, 中子入射能量在 30MeV 以下时, 这种 ^{9}Be(n,ndt α) 反应的概率小得可以被忽略. 实际计算表明, 考虑造氚的反应道, 在中子入射能量在 20MeV 以下时, 仅有 (n,t)^{7}Li 反应道, 其阈能是 11.6037MeV, 而中子入射能量在 30MeV 以下时, 仅还需要考虑 (n,nt)^{6}Li 反应道, 其阈能是 19.6677MeV.

当从复合核 ^{10}Be 发射的第一粒子是 ^{3}He 时, 剩余核 ^{7}He 是不稳定核, ^{3}He 在 ^{10}Be 中的结合能是 28.434MeV, 因此反应阈能为 24.043MeV. 这是一个高阈能的反应道. 目前对 ^{7}He 能级纲图的知之甚少, 原来仅知道它仅有的基态是 $(3/2)^-$(Firestone et al., 1996), 后来的进一步测量表明, 在 2.92MeV$(5/2)^-$ 和 5.8MeV 处有新能级存在, 但后者的自旋宇称状态尚未确定 (Tilley et al., 2002b). ^{7}He 一定发射中子, 因此没有单独的 ^{9}Be(n,^{3}He) 反应道存在. 由于 ^{3}He 在 ^{10}Be 中的结合能很大, 反应阈能比较高, 与其他粒子发射的竞争概率非常小, 目前能级纲图方面的匮缺, 因此不再细致考虑第一粒子是 ^{3}He 的反应情况.

当然, 前面已经指出, 当中子入射能量足够高, 而剩余核处于 ^{5}He, ^{6}He, ^{6}Li, ^{7}Li 等核的激发态时, 可以由上面对 ^{6}Li, ^{7}Li 的反应道开放的分析, 继续给出它们的进一步核反应过程. 例如, 从 ^{10}Be 发射一个中子和一个 α 粒子, 剩余核为 ^{5}He, 如果 ^{5}He 处于低激发态, 它将分裂为一个中子和一个 α 粒子, 因此属于 (n,2n2α) 反应道; 然而, 如果 ^{5}He 处于高激发态能级, 它可以分裂为氘核和氚核, 因此属于 (n,ndtα)

反应道. 同样, 从 ^{10}Be 发射一个中子和一个 d 核, 剩余核为 ^{7}Li, 它的第 2 激发态就可以发射 t, 因此也属于 (n,ndtα) 反应道. 另外, 从 ^{10}Be 发射一个中子和一个 t 核, 剩余核为 ^{6}Li, 而 ^{6}Li 的第 1 激发态和第 3 激发态以上能级可以发射 d 核, 该过程仍然属于 (n,ndtα) 反应道. 不同的粒子发射顺序, 达到不同的中间剩余核的不同激发能级. 通过进一步的粒子发射, 有些最终达到不同的末态, 属于不同反应道, 而有些又最终达到相同的末态, 因而属于同一个反应道. 这又是轻核反应的另一个特征.

另外, 当中子入射能量足够高时, 在发射一个 α 粒子后, 剩余核 ^{6}He 处于它的第 3 激发态 E_2 =14.6MeV 分立能级时, 可以出现 ^{6}He→t+t 核反应过程, 因此属于 (n,2tα) 反应道. 作为一个例子, 可以沿用前面介绍的方法估算出中子入射需要的能量 $E_{\rm n}$ 值. 由 (1.1.3) 式可以得到 ^{10}Be 的激发能, 用 ε_α 表示出射 α 粒子的能量, 于是由能量关系式得到

$$\frac{M_{^9\rm Be}}{M_{^{10}\rm Be}}E_{\rm n}+B_{\rm n}=\varepsilon_\alpha+\varepsilon_{\rm 6He}+E_2+B_\alpha \tag{1.4.9}$$

这里 $B_{\rm n}$ = 6.811MeV 和 B_α = 7.409MeV 分别是中子和 α 粒子在 ^{10}Be 中的结合能. 计算表明, 从 ^{10}Be 的激发态发射 α 粒子的库仑势垒高度大约为 1.41MeV, 因此为了估算上述核反应过程中的需要最低的中子入射能量, 取 $\varepsilon_\alpha \approx$ 1.41MeV, 得到 $\varepsilon_{\rm 6He}\approx$ 1.18MeV 估算出来的最低中子入射能量大约为 19.8MeV. 这个结果表明, 当中子入射能量在 20MeV 以下时, 可以不考虑 (n,2tα) 反应道, 而当入射能量在 20MeV 以上时, 就需要考虑这个核反应过程.

同样, 对上述 (n, ndtα) 道开放需要的最低中子入射能量也可以进行估算. 这时 ^{5}He* 至少处于它的第 3 激发态 (E_2 = 16.84MeV), 才可能分裂为氘核和氚核. 首先先考虑发射一个中子后再发射一个 α 粒子的 ^{9}Be(n,nα)^{5}He* 反应过程, 当剩余核 ^{5}He* 处于它的第 3 激发态时, 对于第二次粒子发射, 由能量关系式 (1.2.2) 得到一次粒子发射的剩余激发能:

$$E_1=\varepsilon_\alpha+\frac{m_\alpha}{M_{^5\rm He}}\varepsilon_\alpha+B_\alpha+E_2 \tag{1.4.10}$$

已知 α 粒子在 ^{9}Be 中的结合能为 B_α = 2.467MeV, 取 ε_α = 1.46MeV, 估计出来的剩余核最低激发能约为 $E_1\approx$ 21.93MeV, 这说明了, 需要在发射第一个中子后让 ^{9}Be 最低处在 22.4MeV 这条能级以上才能发生 (n,ndtα) 反应. 再由公式 (1.2.2) 得到开放 ^{9}Be(n,ndtα) 反应道的中子入射能量需要在 24.9MeV 以上. 而由表 1.4 给出 ^{9}Be 的能级结构来看, 虽然在能量在 21.4MeV 以上有一些能级, 但是它们的自旋和宇称尚未确定, 因此目前要描述好上述核反应过程也尚属不易.

下面再考虑 ^{9}Be(n,αn)^{5}He* 反应过程, 它先发射一个 α 粒子后再发射一个中子. 当剩余核 ^{5}He 处于它的第 3 激发态分立能级 E_2 = 16.84MeV 时, 可以出现

^{5}He→d+t 反应过程, 而总的属于 ^{9}Be(n,ndtα) 反应道. 首先考虑从 ^{6}He 发射一个中子达到 ^{5}He 的第 3 激发分立态, 中子在 ^{6}He 中的结合能为 $B_n = 1.869$MeV, 取 $\varepsilon_n = 0$, 由公式 (1.2.1) 得到 $E_1 \approx 18.709$MeV. 由 ^{6}He 的能级纲图可以看到, 需要在发射第一个 α 粒子后让 ^{6}He 至少处于 23.3MeV 这个能级. 而 α 粒子在 ^{10}Be 中的结合能为 $E_\alpha = 7.409$MeV, 中子在 ^{10}Be 中的结合能为 $B_n = 6.811$MeV, 而库仑位垒使得出射 α 粒子的能量最小为 $\varepsilon_\alpha \approx 3.55$MeV, 由公式 (1.2.2) 得到开放 ^{9}Be(n,αn)^{5}He$^* \rightarrow$ ^{9}Be(n,ndtα) 发射过程的中子入射能量至少需要在 33.1MeV 以上. 同样, 由表 1.1 可以看出, ^{6}He 的 23.3MeV 这个能级目前自旋宇称都没能确定, 因此目前也很难在定量上描述好这个核反应过程.

上述的关于不稳定核素 ^{5}He, ^{5}Li, ^{6}He 等作为核反应剩余核出现时, 会有许多新反应道的出现. 上面已经介绍了估算这些反应道开放所需要的入射中子最小能量的方法. 对于后面更重的轻核, 在中子入射能量足够高时, 仍然可以用此方法来分析, 以判断那些相关的新核反应道可能会出现, 并用上述途径得出是否需要考虑这些反应道的条件. 总之, 有相当多在理论上可以开放的多粒子发射反应道, 需要经过一些能级能量较高的能级, 但是目前对这些能级的结构知之甚少, 以致不能进行有效的计算.

综上所述, 在 $E_n > 20$MeV 的情况下, 虽然各种反应道的开放情况已经被详细列出, 但是, 由表 1.1 到表 1.4 所列出的能级纲图状况可以看出, 鉴于目前从 ^{5}He, ^{6}He 等直到 ^{9}Be 的高激发能级的能量、自旋、宇称都有很大不确定因素. 因此, 依据这些能级计算的轻核反应数据会相应产生很大不确定因素. 这就预示着, 目前对计算轻核反应在 $E_n \leqslant 20$MeV 的情况下的数据有比较大的准确度, 而对 $E_n > 20$MeV 的情况计算结果的可靠性就明显不足了.

n+^{9}Be 的反应特点在于, 在 1p 壳核素当中唯独没有真正核物理意义上的非弹性散射道的核. 在上述反应中除了剩余核的两体崩裂过程外, 还包括了一次粒子发射后剩余核 ^{6}He 的三体崩裂过程. 这就是典型的轻核核反应的非有序发射过程特征, 这是在中重核的核反应中所不能看到的. 因此仅用描述有序粒子发射的理论模型以及相关的程序都是不能描述好这种非有序发射过程的行为. 而新轻核反应理论就是要解决描述粒子非有序发射的理论方法.

在中子诱发 ^{9}Be 的核反应中, 辐射俘获截面很小, 而 (n,2n) 的截面却很大. ^{9}Be 很早就被选择用于可控聚变堆的中子增值层 (Blanket) 的优选材料 (Schulke, 1985); 同时, 热堆、快堆、加速器驱动次临界堆也都提出了对 ^{9}Be(n,2n) 反应双微分截面评价数据的需求. 为满足核工程应用的需要, 1977 年 Drake 等在中子能量分别为 $E_n = 5.9, 10.1$MeV 和 14.2MeV 对中子诱发的 ^{9}Be 次级中子谱进行了实验测量 (Drake et al., 1997), 其后 Baba 等在 1978 年又测量了中子能量在 3.25~7.0MeV 以及 14.1MeV 的中子双微分截面 (Baba et al., 1978). Takahashi 等在 1983 年也测量

了中子能量为 $E_{\rm n} = 14.1{\rm MeV}$ 的中子双微分截面 (Takahashi et al., 1983), 并发布于 1988 年 (Takahashi et al., 1988). M. Ibaraki 和 M. Baba 在 1998 年对中子入射能量在 11.5~18MeV, 又对 ^{9}Be 次级中子的双微分截面谱进行了测量 (Baba et al., 1998).

其后, 中国原子能科学研究院对中子诱发的 ^{9}Be 次级中子的双微分截面谱也进行了一系列的实验测量工作, 包括在 2002 年, 阮锡超, 周祖英等, 对中子入射能量为 $E_{\rm n} = 10.1{\rm MeV}$, 以及在 2004 年, 阮锡超等, 对中子入射能量为 $E_{\rm n} = 8{\rm MeV}$ 的测量 (阮锡超等, 2004).

为了满足核工程和其他方面的应用需要, 国际上对中子诱发 ^{9}Be 中子双微分截面进行了深入研究. 美国 (ENDF/B 库) 和欧洲为建立 ^{9}Be 双微分截面文档, 在 20 世纪 80 年代初就开始了一系列的国际合作, 试图找到合适的理论方法去建立 ^{9}Be 的双微分截面文档, 这一段合作过程在 Beynon 等的文章中给出了详细的叙述 (Beynon et al., 1988). 当时在美国的 ENDF/B4 中仅用了 ^{9}Be 的 4 条能级, 以无宽度形式评价了 ^{9}Be 的中子信息, 但是发现无法构成双微分截面文档. 后来 Young, Steuart(1978) 采用了 33 条赝能级 (Young et al., 1979), 以非弹性散射方式去符合 Drake(1977) 的中子双微分截面的实验测量结果, 相对 B4 有了明显改进, 但是这种方式仍然不能建立文档六. 为此, 国际上成立了截面评价工作组 CSEWG(Cross Section Evaluation Workshop Group), 但是最后该工作组仍然没有能找到建立双微分截面文档的理论模型计算方法, 使得 B5 结果与 B4 一样. 1986 年荷兰学者 Gruppelaar 在 European Community 进行了 EFF(European Fusion File) 与 JEF-1(Joint Evaluation Data File) 的聚变堆选材研究, 发现 ENDF/B5 仍然不能满足聚变堆的需求. 但最终也没有得到成功的理论方法来建立 ^{9}Be 的双微分截面文档. Beynon 等还对各分立能级产生的中子出射分谱进行了研究, 当时用了描述平衡态发射的 Hauser-Feshbach 理论方法, 将其计算结果与 Drake 等实验测量的三个中子入射能点的双微分截面进行比较, 发现相差甚远. 这说明对于轻核反应过程, 仅用平衡态理论来描述是不成功的.

在 1985 年 Perkins 等用 Monte-Carlo 技术模拟各分立能级之间的发射过程 (Perkins et al., 1985), 用 Monte-Carlo 抽样技术给出各能级的发射概率, 从五百万的抽样过程中挑选出能与 Drake, Baba, Takahashi 实验测量值符合较好的结果, 以此为基础建成了 ^{9}Be 双微分截面文档, 但是, 把它应用到 Julish 在 8~10cm 的 ^{9}Be 反射层实验测量的中子泄漏 (Leakage) 谱数据分析时 (Bash et al., 1979), 仍然与实验测量结果偏离了许多. 后来又对 Perkins 的结果进行了不断的调整改进, 使得越来越好地符合中子泄漏谱的基准检验结果. 但这意味着, 为成功建立轻核双微分截面文档, 仍然没能找到合适的理论方法或理论模型. 直到 1997 年, Pronyaev 等在意大利的国际核数据大会上还提出用最小二乘法符合 ^{9}Be 的实验测量双微分截面

的方法 (Pronyaev et al., 1997). 总之, 国际核数据界仍在不断努力去寻找一种合适的核反应理论方法或手段, 以便建立更加准确的双微分截面文档以进一步满足核工程应用的需要.

国内无论在实验测量和理论研究方面都进行了研究工作的开展. 实验方面也曾经进行了 10MeV 中子引发的 ^{9}Be(n,2n) 次级中子双微分截面的测量 (祈步嘉等, 1995), 并对 ^{9}Be(n,2n) 双微分谱也进行过理论模型方法的分析 (孙伟力等, 1995).

在新发展的轻核反应理论中, 不仅可以考虑粒子非有序发射的复杂过程, 还可以用非平衡统计理论方法描述粒子的预平衡发射机制, 因而可以用理论计算结果符合实验测量的双微分截面数据, 并分析了双微分截面谱中各种产生中子的成分. 实际的理论计算表明, 在中子入射能量在 20MeV 以下, ^{9}Be(n,2n) 反应道的双微分截面数据具有广泛的应用价值, 需要进行非常仔细的研究. 而随着中子入射能量的提高, 也需要对 (n,np), (n,nd) 和 (n,nt) 等这些包含中子出射反应道的双微分截面数据进行认真的研究.

1.5 n+^{10}B 的反应道的开放途径

^{10}B 的天然丰度为 19.8%. 目前 ^{10}B 的能级纲图已经给到 23.1MeV(Firestone et al., 1996; Tilley et al., 2004), 大约 30 条, 这里就不再详细列出. 由于硼的中子吸收截面较大, 它经常用于中子防护系统, 也可以在快中子堆中用作控制棒材料, 在某些反应堆中作为 "可燃毒物". 而作为集团结构, ^{5}He 在 n+^{10}B 反应的发射已经被实验测量观测到 (Turk et al., 1984), 因此必须考虑 ^{5}He 的发射.

对于 n+^{10}B 反应, 主要开放的反应道以及对应的阈能和 Q 值如下：

$$
\mathrm{n}+{}^{10}\mathrm{B}\rightarrow{}^{11}\mathrm{B}^{*}\rightarrow\begin{cases}
\gamma+{}^{11}\mathrm{B}, & Q=11.53\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=0.000\mathrm{MeV}\\
\mathrm{n}'+{}^{10}\mathrm{B}, & Q=-0.71835\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=0.79077\mathrm{MeV}\\
\mathrm{p}+{}^{10}\mathrm{Be}, & Q=0.225\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=0.0000\mathrm{MeV}\\
\alpha+{}^{7}\mathrm{Li}, & Q=2.790\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=0.0000\mathrm{MeV}\\
\mathrm{d}+{}^{9}\mathrm{Be}, & Q=-4.362\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=4.8104\mathrm{MeV}\\
\mathrm{t}+{}^{8}\mathrm{Be}, & Q=0.230\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=0.0000\mathrm{MeV}\\
{}^{5}\mathrm{He}+{}^{6}\mathrm{Li}, & Q=-5.355\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=5.8944\mathrm{MeV}\\
2\mathrm{n}+{}^{9}\mathrm{B}, & Q=-8.436\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=9.2858\mathrm{MeV}\\
(\mathrm{np}+\mathrm{pn})+{}^{9}\mathrm{Be}, & Q=-6.586\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=7.2494\mathrm{MeV}\\
(\mathrm{n}\alpha+\alpha\mathrm{n})+{}^{6}\mathrm{Li}, & Q=-4.459\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=4.9082\mathrm{MeV}\\
(\mathrm{nd}+\mathrm{dn})+{}^{8}\mathrm{Be}, & Q=-6.027\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=6.341\mathrm{MeV}\\
(\mathrm{p}\alpha+\alpha\mathrm{p})+{}^{6}\mathrm{He}, & Q=-7.184\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=7.9077\mathrm{MeV}\\
2\alpha+\mathrm{t}, & Q=0.323\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=0.0000\mathrm{MeV}
\end{cases}
$$

其中, ^{5}He 发射后就自发崩裂为一个中子和一个 α 粒子, 当剩余核 ^{6}Li 处于基态或第 2 激发态时, 属于 (n,nα) 反应道; 而剩余核 ^{6}Li 处于第 1 激发态或第 3 激发态及以上能级时, 可以发射 d 核, 因此属于 (n,nd2α) 反应道 (Zhang, 2003a)：

$$\mathrm{n}+{}^{10}\mathrm{B}\to{}^{11}\mathrm{B}^*\to{}^{5}\mathrm{He}+{}^{6}\mathrm{Li}\to\mathrm{n}+\alpha+{}^{6}\mathrm{Li}\begin{cases}k=g,2\to(\mathrm{n,n\alpha})^6\mathrm{Li}\\ k=\text{其他}\to(\mathrm{n,nd2\alpha})\end{cases}\tag{1.5.1}$$

^{9}B 是不稳定核, 它的基态和激发态都可以通过不同途径分裂为一个质子和两个 α 粒子. 因此, ^{11}B* 有序发射两个中子后, 余核 ^{9}B → p+2α, 属于 (n,2np2α) 反应道. 即

$$\mathrm{n}+{}^{10}\mathrm{B}\to{}^{11}\mathrm{B}^*\to\mathrm{n}+\mathrm{n}+{}^{9}\mathrm{B}\to\mathrm{n}+\mathrm{n}+\mathrm{p}+2\alpha\tag{1.5.2}$$

对于 (np + pn)^{9}Be 反应道, ^{11}B* 发射中子和质子后, 剩余核处于 ^{9}Be 的基态, 因此属于 (n,np)^{9}Be$_g$ 反应道. 而当剩余核 ^{9}Be 处于激发态时, 由上面对 ^{9}Be 的反应途径分析给出的结果是, ^{9}Be* 会通过不同途径出射一个中子和两个 α 粒子, 因此属于 (n, 2np2α) 反应道.

对于 (nα + αn)^{6}Li 反应道, ^{11}B* 发射一个中子和一个 α 粒子后, 剩余核是 ^{6}Li; 而直接发射 ^{5}He(^{11}B* → ^{5}He + ^{6}Li) 的剩余核也是 ^{6}Li. 正如前面对 ^{6}Li 开放反应道所分析的那样, 当 ^{6}Li 处于它的基态或第 2 激发态时, 属于 (n, nα)^{6}Li 反应道; 而当 ^{6}Li 处于第 1 和第 3 激发态及以上能级时, ^{6}Li 可以发射 d 核, 而剩余核是 α 粒子, 这时它们应该属于 (n,nd2α) 反应道. 因此有

$$\mathrm{n}+{}^{10}\mathrm{B}\to{}^{11}\mathrm{B}^*\to\mathrm{n}+\alpha+{}^{6}\mathrm{Li}\begin{cases}k=g,2\to(\mathrm{n,n\alpha})^6\mathrm{Li}\\ k=\text{其他}\to(\mathrm{n,nd2\alpha})\end{cases}\tag{1.5.3}$$

对于 (nd + dn)^{8}Be 反应过程, 由于 ^{8}Be 自发分裂为两个 α 粒子, 因而也属于 (n,nd2α) 反应道：

$$\mathrm{n}+{}^{10}\mathrm{B}\to{}^{11}\mathrm{B}^*\to\mathrm{n}+\mathrm{d}+{}^{8}\mathrm{Be}\to\mathrm{n}+\mathrm{d}+2\alpha\tag{1.5.4}$$

对于 (pα + αp)^{6}He 反应过程, 当 ^{6}He 处于基态时, 核反应过程属于 (n, pα)^{6}He$_g$ 反应道, 而当 ^{6}He 处于激发态时, ^{6}He 可以通过上述不同方式衰变为两个中子和一个 α 粒子, 因此属于 (n,2np2α) 反应道. 因此有

$$\mathrm{n}+{}^{10}\mathrm{B}\to{}^{11}\mathrm{B}^*\to\mathrm{p}+\alpha+{}^{6}\mathrm{He}\begin{cases}k=g\to(\mathrm{n,p\alpha})^6\mathrm{He}(g)\\ k=\text{其他}\to(\mathrm{n,2np2\alpha})\end{cases}\tag{1.5.5}$$

这与先发射两个中子的结果相同. 但是不同的粒子发射顺序, 出射中子的双微分截面是彼此非常不同的, 需要通过理论模型计算得到每种发射过程中的出射中子双微分截面分谱, 将各分出射中子双微分截面加起来才能得到该反应道总的出射中子双微分截面.

发射一个 α 粒子后, 如果剩余核 ^{7}Li 处于基态和第 1 激发态, 则属于 (n,α)^{7}Li 反应道; 如果剩余核 ^{7}Li 处于第 2 激发态及以上能级, 它就可以发射 t, 剩余核是 α 粒子, 该过程就属于 (n,t2α) 反应道了.

综上所述, 对不同粒子发射顺序同归于同一个反应道的情况可以归结为下面的公式表示.

对于 (n,nα) 反应道有三种反应途径:

$$\mathrm{n}+{}^{10}\mathrm{B}\to{}^{11}\mathrm{B}\to\begin{cases}\mathrm{n}+\alpha+{}^{6}\,\mathrm{Li}, & k=g,2\\ \alpha+\mathrm{n}+{}^{6}\mathrm{Li}, & k=g,2\\ {}^{5}\mathrm{He}+{}^{6}\,\mathrm{Li}^*, & {}^{5}\mathrm{He}\to n+\alpha,\quad {}^{6}\mathrm{Li}^*\to\mathrm{d}+\alpha\end{cases}\tag{1.5.6}$$

对于 (n,t2α) 反应道有两种反应途径:

$$\mathrm{n}+{}^{10}\mathrm{B}\to{}^{11}\mathrm{B}\to\begin{cases}\mathrm{t}+{}^{8}\,\mathrm{Be}, & {}^{8}\mathrm{Be}\to\alpha+\alpha\\ \alpha+{}^{7}\mathrm{Li}^*, & {}^{7}\mathrm{Li}\to\mathrm{t}+\alpha\end{cases}\tag{1.5.7}$$

在考虑了 ^{5}He 发射后, 与 ^{5}He 发射的有关反应道可以归结如下:

$$\mathrm{n}+{}^{10}\mathrm{B}\to{}^{11}\mathrm{B}\to{}^{5}\mathrm{He}+{}^{6}\mathrm{Li}^*\begin{cases}{}^{6}\mathrm{Li}+\gamma, & k=gs,2 & & (\mathrm{n,n\alpha})^{6}\mathrm{Li}\\ \mathrm{d}+\alpha, & k=1,3,4,\cdots & & (\mathrm{n,nd2\alpha})\\ \mathrm{p}+{}^{5}\mathrm{He}, & k=4,5,\cdots, & {}^{5}\mathrm{He}\to\mathrm{n}+\alpha & (\mathrm{n,2np2\alpha})\end{cases}\tag{1.5.8}$$

对于 (n,nd2α) 反应道有六种反应途径:

$$\mathrm{n}+{}^{10}\mathrm{B}\to{}^{11}\mathrm{B}\to\begin{cases}\mathrm{n}+\mathrm{d}+{}^{8}\mathrm{Be}, & {}^{8}\mathrm{Be}\to\alpha+\alpha\\ \mathrm{d}+\mathrm{n}+{}^{8}\mathrm{Be}, & {}^{8}\mathrm{Be}\to\alpha+\alpha\\ \mathrm{d}+{}^{9}\mathrm{Be}^*, & {}^{9}\mathrm{Be}^*\to\mathrm{n}+\alpha+\alpha\\ \mathrm{n}+\alpha+{}^{6}\mathrm{Li}^*, & {}^{6}\mathrm{Li}^*\to\mathrm{d}+\alpha, & k=1,3,4,5,\cdots\\ \alpha+\mathrm{n}+{}^{6}\mathrm{Li}^*, & {}^{6}\mathrm{Li}^*\to\mathrm{d}+\alpha, & k=1,3,4,5,\cdots\\ {}^{5}\mathrm{He}+{}^{6}\mathrm{Li}^*, & {}^{5}\mathrm{He}\to\mathrm{n}+\alpha, & {}^{6}\mathrm{Li}^*\to\mathrm{d}+\alpha, & k=1,3,4,5,\cdots\end{cases}\tag{1.5.9}$$

对于 (n,2np2α) 反应道有八种反应途径:

$$\mathrm{n}+{}^{10}\mathrm{B}\to{}^{11}\mathrm{B}\to\begin{cases}\mathrm{n}+\mathrm{n}+{}^{9}\mathrm{B}, & {}^{9}\mathrm{B}\to\mathrm{p}+{}^{8}\mathrm{Be}, & {}^{8}\mathrm{Be}\to\alpha+\alpha\\ \mathrm{n}+\mathrm{p}+{}^{9}\mathrm{Be}^*, & {}^{9}\mathrm{Be}^*\to\mathrm{n}+\alpha+\alpha\\ \mathrm{p}+\mathrm{n}+{}^{9}\mathrm{Be}^*, & {}^{9}\mathrm{Be}^*\to\mathrm{n}+\alpha+\alpha\\ \mathrm{p}+\alpha+{}^{6}\mathrm{He}^*, & {}^{6}\mathrm{He}^*\to\mathrm{n}+\mathrm{n}+\alpha\\ \alpha+\mathrm{p}+{}^{6}\mathrm{He}^*, & {}^{6}\mathrm{He}^*\to\mathrm{n}+\mathrm{n}+\alpha\\ \mathrm{n}+\alpha+{}^{6}\mathrm{Li}^*, & {}^{6}\mathrm{Li}^*\to\mathrm{n}+\mathrm{p}+\alpha, & k=4,5,\cdots\\ \alpha+\mathrm{n}+{}^{6}\mathrm{Li}^*, & {}^{6}\mathrm{Li}^*\to\mathrm{n}+\mathrm{p}+\alpha, & k=4,5,\cdots\\ {}^{5}\mathrm{He}+{}^{6}\mathrm{Li}^*, & {}^{6}\mathrm{Li}^*\to\mathrm{n}+\mathrm{p}+\alpha, & k=4,5,\cdots\end{cases}\tag{1.5.10}$$

归结起来, 需要用双微分截面描述的反应道有：(n,nα), (n,2np2α), (n,nd2α), (n,t2α), (n,pα)^{6}He$_g$ 等反应道.

由此可见, n+^{10}B 反应道的开放是相当复杂的, 发射一个粒子之后, 可以继续产生多重粒子发射或两体以及三体崩裂过程, 甚至于会可以发生四次粒子以上的发射过程.

实际计算表明, ^{10}B 的前五条激发态分立能级在能量上都不允许发射任何粒子, 只能通过发射 γ 光子退激, 因此纯粹属于非弹性散射反应道; 而 ^{10}B 的第 10 激发态, 能量为 5.9195MeV, 自旋、宇称为 2^+, 从能量上看可以发射 α 粒子, 但是由于角动量和宇称守恒的限制, 禁戒了 α 粒子的发射, 因而只能通过发射 γ 光子退激. 这是由于 α 粒子的自旋、宇称为 0^+, ^{6}Li 基态的自旋、宇称为 1^+, 因此末态总自旋为 1; 而 ^{10}B 第 10 激发态的角动量为 2, 于是发射粒子的轨道角动量 l 必须大于 0, 再考虑到宇称守衡, l 就必须为大于 1 的偶数, 但是在 5.9195MeV 这种能量下轨道角动量大于 1 的分波概率非常小, 再加上库仑位垒的限制, 实际上禁戒了 α 粒子的发射, 发射 γ 光子退激的概率反而最大. 所以, 对应 ^{10}B 的第 1∼5 和第 10 激发态这六条能级都贡献到非弹性散射反应道.

对于上述各种核反应过程中, 有很多反应途径是通过 ^{6}Li 的激发态发射氘核而剩余核是 ^{4}He, 而仅考虑了 ^{4}He 是处于基态. 下面考虑开放 ^{4}He 是激发态的情况, 对于 (n, nd2α) 反应道, 如果是通过 n+^{10}B→ ^{11}B→n+α + ^{6}Li*, 而 ^{6}Li* 的高激发能级发射氘核后, ^{4}He* 处于第 4 激发态 (23.330MeV), 这时才允许从 ^{4}He 发射质子和中子. 以从 ^{4}He* 发射中子为例, 这时核反应是属于 ^{10}B(n,2ndα^{3}He) 反应道. 而氘核在 ^{6}Li 中的结合能为 13.981MeV, 由于存在测量位垒, 前面已经给出从 ^{6}Li 发射氘核的最小能量为 0.674MeV, 由 (1.2.1) 式得到 ^{6}Li 的激发能必须大于 38.32MeV, 再由表 1.2 看出, ^{6}Li 的最高激发能级仅是 26.59MeV, 因此无法描述这种反应途径. 以同样理由, 在后面对于更重的 1p 壳轻核就不再考虑剩余的 ^{4}He 的激发态反应途径.

对于总的中子出射双微分截面, 目前仅有 1985 年 M. Baba 等在入射中子能量为 $E_n = 14.2$MeV 一个能点上做了实验测量 (Baba et al., 1985). 这家唯一的实验测量结果为今后理论模型的计算结果分析提供了检验基础.

这里需要指出的是, 上面给出的反应道截面很少有实验测量数据, 作为一个例子, 在 1956 年就进行了 (n,nd)2α 反应道截面的实验测量 (Glenn et al., 1956), 是用多出射粒子的直接测量法确定截面值. 其中尽可能地考虑了多种反应途径, 例如：第一个发射粒子是氘核, 剩余核是 ^{9}Be, 而从 ^{9}Be 再继续发射一个中子, 剩余核是 ^{8}Be, ^{8}Be 自动崩裂为两个 α 粒子, 因此最后结果是属于 (n,nd)2α 反应道. 但遗憾的是, 在 20 世纪 50 年代, 对轻核的能级纲图的知识知之甚少, 当时 ^{9}Be 的能级纲图中, 仅知道目前 ^{9}Be 的第 2 激发能级 2.423 ($5/2^+$), 其余 ^{9}Be 的激发能级一概不知.

因此, 来自 ^{9}Be 其他激发能级的信息全部丢失, 使得实验测量结果变得不可靠. 此外, 在上述实验测量中还考虑了 (n,nα)^{6}Li 反应途径, 但是当时 ^{6}Li 的能级纲图也与目前的相距甚远 (Glenn et al., 1956; Wang et al., 2006). 目前, 还没有对 (n,nα)^{6}Li$_g$ 和 (n,nα)^{6}Li$_{k=3}$ 的反应截面进行过认真的实验测量, 而由上面对 ^{6}Li 反应道的分析看出, 作为剩余核 ^{6}Li 处于第 1 和第 3 激发能级以及以上的激发能级时, ^{6}Li 核允许发射氘核, 而剩余核是 ^{4}He, 仍然属于 (n,nd)2α 反应道. 而从理论计算结果表明, 由计算得到的双微分截面谱的与实验测量值的很好符合说明, (n,nd)2α 反应道的截面要明显大于原来 20 世纪 50 年代的实验测量值. 再一次地说明了能级纲图的准确性无论对实验测量, 以及对理论模型计算要起多么大的作用. 为此, 希望在实验测量方面, 可以对 (n,nd)2α 反应道的截面进行更新测量. 以澄清目前在这个截面数据上的分歧, 并增加 (n,nd)2α 反应道截面数据的精度.

1.6 n+^{11}B 的反应道的开放途径

^{11}B 的天然丰度为 80.2%. 目前 ^{11}B 的能级纲图已经给到 26.5MeV(Firestone et al., 1996), 大约 40 条, 这里就不再详细列出. 可以这样说, 中子引发 ^{11}B 的反应道是 1p 壳轻核中最复杂的, 不仅分立能级多, 而且各反应道的剩余核还存在大量的不稳定核素, 而比 ^{11}B 更重的核素, 其各反应道的剩余核包含的不稳定核素逐渐减少, 使得核反应的行为逐渐倾向于中重核的行为.

对于 n+^{11}B 反应, 主要的开放反应道以及对应的阈能和 Q 值如下 (Zhang, 2003b)：

$$
\mathrm{n}+{}^{11}\mathrm{B}={}^{12}\mathrm{B}\rightarrow\begin{cases}
\gamma+{}^{12}\mathrm{B}, & Q=3.370\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=0.000\mathrm{MeV}\\
\mathrm{n}'+{}^{11}\mathrm{B}, & Q=-2.4793\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=0.79077\mathrm{MeV}\\
\mathrm{p}+{}^{11}\mathrm{Be}, & Q=-10.724\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=11.699\mathrm{MeV}\\
\alpha+{}^{8}\mathrm{Li}, & Q=-6.630\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=7.2374\mathrm{MeV}\\
\mathrm{d}+{}^{10}\mathrm{Be}, & Q=-9.004\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=9.8289\mathrm{MeV}\\
\mathrm{t}+{}^{9}\mathrm{Be}, & Q=-9.558\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=10.434\mathrm{MeV}\\
{}^{5}\mathrm{He}+{}^{7}\mathrm{Li}, & Q=-9.559\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=10.4348\mathrm{MeV}\\
2\mathrm{n}+{}^{10}\mathrm{B}, & Q=-11.228\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=12.502\mathrm{MeV}\\
(\mathrm{np}+\mathrm{pn})+{}^{10}\mathrm{Be}, & Q=-11.228\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=12.257\mathrm{MeV}\\
(\mathrm{n}\alpha+\alpha\mathrm{n})+{}^{7}\mathrm{Li}, & Q=-8.663\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=9.4567\mathrm{MeV}\\
(\mathrm{nd}+\mathrm{dn})+{}^{9}\mathrm{Be}, & Q=-15.815\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=17.262\mathrm{MeV}\\
(\mathrm{nt}+\mathrm{tn})+{}^{8}\mathrm{Be}, & Q=-11.223\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=12.152\mathrm{MeV}\\
2\alpha+{}^{4}\mathrm{H}, & Q=-16.413\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=17.7167\mathrm{MeV}\\
(\alpha\mathrm{t}+\mathrm{t}\alpha){}^{5}\mathrm{He}, & Q=-12.025\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=13.1267\mathrm{MeV}
\end{cases}
$$

反应道 (n,^{3}He) 由于阈能大于 20MeV, 所以在中子入射能量低于 20MeV 时不能开放; 而反应道 (n,^{5}He) 却能够开放, 剩余核是 ^{7}Li. ^{5}He 发射的可能性在理论上已被确认 (Zhang, 2004), 而 ^{5}He 是不稳定核, 自发裂变为一个中子和一个 α 粒子, 所以当剩余核 ^{7}Li 处于基态和第 1 激发态时, 它还是归结为 (n,nα) 反应道; 若 ^{7}Li 处于第 2 激发态及以上能级时, 就可以发射 t, 因而属于 (n,nt2α) 反应道. ^{5}He 发射后崩裂产生的中子对总中子双微分截面谱的低能部分有着很重要的贡献.

实际计算表明, ^{11}B 的前六个激发态在能量上都不允许发射任何粒子, 只能通过发射 γ 光子退激, 因此它们都属于非弹性散射反应道. ^{5}He 发射后崩裂产生的中子对总中子双微分截面谱的低能部分有着很重要的贡献:

$$\mathrm{n}+{}^{11}\mathrm{B}\rightarrow{}^{12}\mathrm{B}^*\rightarrow{}^{5}\mathrm{He}+{}^{7}\mathrm{Li}\rightarrow\mathrm{n}+\alpha+{}^{7}\mathrm{Li}\begin{cases}k=g,1\rightarrow(\mathrm{n},\mathrm{n}\alpha)^7\mathrm{Li}\\ k=\text{其他}\rightarrow(\mathrm{n},\mathrm{nt}2\alpha)\end{cases}\tag{1.6.1}$$

对于 (np + pn)^{10}Be 反应道, 相继发射一个中子和一个质子后, 剩余核是处于 ^{10}Be 的基态或低激发态, 由上一节的分析看出, ^{10}Be 的低激发态仅是通过 γ 的退激达到 ^{10}Be 的基态, 因此属于 (n,np)^{10}Be 反应道, 而 ^{10}Be 处于第 4 激发态以上时, ^{10}Be 正如对 n +^{9}Be 的核反应过程那样, ^{10}Be 会通过各种途径衰变为两个中子和两个 α 粒子:

$$\mathrm{n}+{}^{11}\mathrm{B}\rightarrow{}^{12}\mathrm{B}^*\rightarrow\mathrm{n}+\mathrm{p}+{}^{10}\mathrm{Be}\begin{cases}k=g,1,2,3,4\rightarrow(\mathrm{n},\mathrm{np})^{10}\mathrm{Be}\\ k>4\rightarrow(\mathrm{n},3\mathrm{np}2\alpha)\end{cases}\tag{1.6.2}$$

对于 (n,2n) 反应道, 剩余核是 ^{10}B, 由上节的分析知, 如果 ^{10}B 处于基态、前五个激发态以及第 10 激发态只能通过发射 γ 光子退激, 因此属于 (n,2n)^{10}B 反应道.

但是当 ^{10}B 处于第 6~9 或第 11 激发态及以上能级时, 主要通过发射 α 粒子退激, 属于 (n,2nα)^{6}Li 反应道. 如果 ^{10}B 处在第 13 激发态及以上能级, 还会有发射质子的竞争, 当剩余核 ^{9}Be 处在基态时属于 (n,2np)^{9}Be$_g$, 如果剩余核 ^{9}Be 处于激发态, 还可以通过不同途径达到一个中子和两个 α 粒子的末态, 属于 (n,3np2α) 反应道. (1.6.2) 式反应情况由 (1.6.3) 式给出

$$\mathrm{n}+{}^{11}\mathrm{B}\rightarrow{}^{12}\mathrm{B}^*\rightarrow\mathrm{n}+\mathrm{n}+{}^{10}\mathrm{B}\rightarrow\begin{cases}(\mathrm{n},2\mathrm{n})^{10}\mathrm{B},\quad k=g,1,2,3,4,5,10\\ (\mathrm{n},2\mathrm{n}\alpha)^{6}\mathrm{Li},\quad k=6,7,8,9,11,\cdots\\ \mathrm{n}+\mathrm{n}+\mathrm{p}+^{9}\mathrm{Be}\rightarrow\begin{cases}(\mathrm{n},2\mathrm{np})^{9}\mathrm{Be}_g\\ (\mathrm{n},3\mathrm{np}2\alpha)\end{cases},\quad k>13\end{cases}\tag{1.6.3}$$

而对于 (nα+αn)^{7}Li 反应过程以及 ^{5}He 发射过程, 剩余核都是 ^{7}Li. 前面已经指出, 当 ^{7}Li 处于基态和第 1 激发态时, 它属于 (n,nα) 反应道; 若 ^{7}Li 处于第 2 激

发态及以上能级时, 就可以发射 t, 属于 (n,nt2α) 反应道：

$$n + {}^{11}B \to {}^{12}B^* \to n + \alpha + {}^{7}Li \begin{cases} k = g, 1 \to (n, n\alpha)^7Li \\ k > 2 \to (n, nt2\alpha) \end{cases} \tag{1.6.4}$$

对于 (nd + dn)^{9}Be 反应过程, 当 ^{9}Be 处于基态时, 它应该属于 (n,nd)^{9}Be 反应道; 如果 ^{9}Be 处于激发态, 则可以通过几种途径变为一个中子和两个 α 粒子, 它应该属于 (n,2nd2α) 反应道：

$$n + {}^{11}B \to {}^{12}B^* \to n + d + {}^{9}Be \begin{cases} k = g \to (n, nd)^9Be \\ k > 1 \to (n, 2nd2\alpha) \end{cases} \tag{1.6.5}$$

对于 (nt + tn)^{8}Be 反应过程, 由于 ^{8}Be 不稳定, 自发分裂为两个 α 粒子, 因而也属于 (n,nt2α) 反应道. 由此看出, 许多不同顺序的粒子发射过程, 可以导致成为同一个反应道, 这又是轻核反应的特征之一：

$$n + {}^{11}B \to {}^{12}B^* \to n + t + {}^{8}Be \to n + t + 2\alpha \tag{1.6.6}$$

对于 $2\alpha + {}^4H$ 反应过程, 发射两个 α 粒子后, 剩余核 ^{4}H 是不稳定的, 自发变为 n + t, 因此也属于 (n,nt2α) 反应道：

$$n + {}^{11}B \to {}^{12}B^* \to \alpha + \alpha + {}^{4}H \to n + t + 2\alpha \tag{1.6.7}$$

对于同一个反应道, 可以有多种不同的粒子发射途径, 它们彼此有完全不同的出射中子能谱, 需要通过理论模型来计算, 然后将计算出来的各种发射过程中的出射中子双微分截面加起来才能得到该反应道总的出射中子双微分截面.

综合所述, 以不同粒子发射顺序和不同分立能级归属于同一个反应道的情况有下列情况.

对于 (n,2nα)^{6}Li 反应道有下列三种反应途径：

$$n +^{11} B \to {}^{12}B^* \to \begin{cases} n + n + {}^{10}B, & {}^{10}B \to \alpha + {}^{6}Li(gs, 2) \\ n + \alpha + {}^{7}Li, & {}^{7}Li \to n + {}^{6}Li(gs, 2) \\ \alpha + n + {}^{7}Li^*, & {}^{7}Li \to n + {}^{6}Li(gs, 2) \end{cases} \tag{1.6.8}$$

对于 (n,nα)^{7}Li 反应道有下列三种反应途径：

$$n + {}^{11}B \to {}^{12}B^* \to \begin{cases} n + \alpha + {}^{7}Li(gs, 1) \\ \alpha + n + {}^{7}Li(gs, 1) \\ {}^{5}He + {}^{7}Li(gs, 1) \end{cases} \tag{1.6.9}$$

对于 (n,2nd2α) 反应道有下列十种反应途径:

$$
\mathrm{n}+{}^{11}\mathrm{B} \to {}^{12}\mathrm{B}^* \to \begin{cases}
\mathrm{n}+\mathrm{d}+{}^{9}\mathrm{Be}^*, & {}^{9}\mathrm{Be}^* \to \mathrm{n}+\alpha+\alpha \\
\mathrm{d}+\mathrm{n}+{}^{9}\mathrm{Be}^*, & {}^{9}\mathrm{Be}^* \to \mathrm{n}+\alpha+\alpha \\
\mathrm{n}+\mathrm{n}+{}^{10}\mathrm{B}^*, & {}^{10}\mathrm{B}^* \to \begin{cases} \mathrm{d}+{}^{8}\mathrm{Be}, & {}^{8}\mathrm{Be} \to \alpha+\alpha \\ \alpha+{}^{6}\mathrm{Li}^*, & {}^{6}\mathrm{Li}^* \to \mathrm{d}+\alpha, \quad k=gs,2,3,\cdots \end{cases} \\
\alpha+\mathrm{n}+{}^{7}\mathrm{Li}^*, & {}^{7}\mathrm{Li}^* \to \begin{cases} \mathrm{d}+{}^{5}\mathrm{He}^*, & {}^{5}\mathrm{He}^* \to \mathrm{n}+\alpha \\ \mathrm{n}+{}^{6}\mathrm{Li}^*, & {}^{6}\mathrm{Li}^* \to \mathrm{d}+\alpha, \quad k=gs,2,3,\cdots \end{cases} \\
\mathrm{n}+\alpha+{}^{7}\mathrm{Li}^*, & {}^{7}\mathrm{Li}^* \to \begin{cases} \mathrm{d}+{}^{5}\mathrm{He}^*, & {}^{5}\mathrm{He}^* \to \mathrm{n}+\alpha \\ \mathrm{n}+{}^{6}\mathrm{Li}^*, & {}^{6}\mathrm{Li}^* \to \mathrm{d}+\alpha, \quad k=gs,2,3,\cdots \end{cases} \\
{}^{5}\mathrm{He}+{}^{7}\mathrm{Li}^*, & {}^{7}\mathrm{Li}^* \to \begin{cases} \mathrm{d}+{}^{5}\mathrm{He}^*, & {}^{5}\mathrm{He}^* \to \mathrm{n}+\alpha \\ \mathrm{n}+{}^{6}\mathrm{Li}^*, & {}^{6}\mathrm{Li}^* \to \mathrm{d}+\alpha, \quad k=gs,2,3,\cdots \end{cases}
\end{cases}
\tag{1.6.10}
$$

对于 (n,3np2α) 反应道有下列六种反应途径:

$$
\mathrm{n}+{}^{11}\mathrm{B} \to {}^{12}\mathrm{B}^* \to \begin{cases}
\mathrm{n}+\mathrm{n}+\mathrm{p}+{}^{9}\mathrm{Be}^*, & {}^{9}\mathrm{Be}^* \to \mathrm{n}+\alpha+\alpha \\
\mathrm{n}+\mathrm{p}+\mathrm{n}+{}^{9}\mathrm{Be}^*, & {}^{9}\mathrm{Be}^* \to \mathrm{n}+\alpha+\alpha \\
\mathrm{p}+\mathrm{n}+\mathrm{n}+{}^{9}\mathrm{Be}^*, & {}^{9}\mathrm{Be}^* \to \mathrm{n}+\alpha+\alpha \\
\alpha+\mathrm{n}+{}^{7}\mathrm{Li}^*, & {}^{7}\mathrm{Li}^* \to \mathrm{p}+{}^{6}\mathrm{He}^*, \quad {}^{6}\mathrm{He}^* \to \mathrm{n}+\mathrm{n}+\alpha \\
\mathrm{n}+\alpha+{}^{7}\mathrm{Li}^*, & {}^{7}\mathrm{Li}^* \to \mathrm{p}+{}^{6}\mathrm{He}^*, \quad {}^{6}\mathrm{He}^* \to \mathrm{n}+\mathrm{n}+\alpha \\
{}^{5}\mathrm{He}+{}^{7}\mathrm{Li}^*, & {}^{7}\mathrm{Li}^* \to \mathrm{p}+{}^{6}\mathrm{He}^*, \quad {}^{6}\mathrm{He}^* \to \mathrm{n}+\mathrm{n}+\alpha
\end{cases}
\tag{1.6.11}
$$

在 (1.6.11) 式中, ${}^{9}\mathrm{Be}^* \to \mathrm{n}+\alpha+\alpha$ 实际包括了 ${}^{9}\mathrm{Be}^* \to \mathrm{n}+{}^{8}\mathrm{Be}$, 继而 ${}^{8}\mathrm{Be} \to \alpha+\alpha$, 和 ${}^{9}\mathrm{Be}^* \to \alpha+{}^{5}\mathrm{He}$ 继而 ${}^{5}\mathrm{He} \to \mathrm{n}+\alpha$ 两种途径. 而 ${}^{6}\mathrm{He}^* \to \mathrm{n}+\mathrm{n}+\alpha$ 的反应过程中, 如果 ${}^{6}\mathrm{He}^*$ 处于第 1 激发能级时是通过三体崩裂过程, 而处于第 2 激发能级以上时是发射一个中子, 剩余核为 ${}^{5}\mathrm{He} \to \mathrm{n}+\alpha$ 的反应过程.

对于 (n,nt2α) 反应道的有下列五种反应途径:

$$
\mathrm{n}+{}^{11}\mathrm{B} \to {}^{12}\mathrm{B}^* \to \begin{cases}
\mathrm{n}+\mathrm{t}+{}^{8}\mathrm{Be}, & {}^{8}\mathrm{Be} \to \alpha+\alpha \\
\mathrm{t}+\mathrm{n}+{}^{8}\mathrm{Be}, & {}^{8}\mathrm{Be} \to \alpha+\alpha \\
\mathrm{n}+\alpha+{}^{7}\mathrm{Li}^*, & {}^{7}\mathrm{Li}^* \to \mathrm{t}+\alpha, \quad k=2,3,4,\cdots \\
\alpha+\mathrm{n}+{}^{7}\mathrm{Li}^*, & {}^{7}\mathrm{Li}^* \to \mathrm{t}+\alpha, \quad k=2,3,4,\cdots \\
{}^{5}\mathrm{He}+{}^{7}\mathrm{Li}^*, & {}^{7}\mathrm{Li}^* \to \mathrm{t}+\alpha, \quad k=2,3,4,\cdots
\end{cases}
\tag{1.6.12}
$$

对于 (n,nd)^{9}Be反应道仅有下列两种反应途径：

$$n + {}^{11}B \to {}^{12}B^* \to \begin{cases} n + d + {}^9Be(gs) \\ d + n + {}^9Be(gs) \end{cases} \tag{1.6.13}$$

在考虑了 ^{5}He发射后, 剩余核为 ^{7}Li*, 与 ^{5}He发射有关的反应道可以归结如下：

$$ {}^{12}B^* \to {}^5He + {}^7Li^* \begin{cases} t + \alpha, \quad k > 1 & (n, nt2\alpha) \\ {}^7Li + \gamma, \quad k = gs, 1 & (n, n\alpha)^7Li \\ n + {}^6Li \to \begin{cases} {}^6Li + \gamma, & k = gs, 2 \\ d + \alpha, & k = 1, 3, 4 \end{cases} & \begin{matrix} (n, 2n\alpha)^6Li \\ (n, 2nd2\alpha) \end{matrix} \\ p + {}^6He \to \begin{cases} {}^6He, & k = gs \\ {}^6He \to 2n + \alpha, & k > gs \end{cases} & \begin{matrix} (n, np\alpha)^6He_g \\ (n, 3np2\alpha) \end{matrix} \end{cases} \tag{1.6.14}$$

由此可见, n +^{11}B 开放的反应道, 与 n+^{10}B 类似, 但更为复杂. 发射一个粒子后, 可以继续产生多重粒子发射或两体和三体崩裂, 以致可以发生四次粒子以上的发射过程. 之所以说 n+^{11}B 的核反应过程是 1p 壳轻核最为复杂的, 这是由于不仅反应道开放的多, 而且许多反应道的剩余核可以是非稳定的 ^{5}Li, ^{5}He, ^{6}He*, ^{8}Be* 等, 它们都可以发生两体崩裂、三体崩裂或继续发射次级粒子. 而在后面可以看出, 当核素质量再重时, 在中子入射能量在 20MeV 以下时, 不再会出现 ^{5}Li, ^{5}He, ^{6}He* 这些非稳定的轻核, 因此开放的反应道就会变得相对简单一些. 这会由下面的几个更重的 1p 壳核素的反应状况来具体说明.

归结起来, 在中子入射能量在 20MeV 以下时, n+^{11}B 反应需要用双微分截面描述的反应道有：(n,2nα)^{6}Li, (n,nα)^{7}Li, (n,nd)^{9}Be, (n,2nd2α), (n,nt2α), (n,3np2α) 等.

在实验测量方面, 目前仅有 1985 年 M. Baba 等对入射中子能量为 E_n = 14.2MeV 测量了总的出射中子双微分截面 (Baba et al., 1985). 这家唯一的实验测量数据将作为今后对理论模型计算结果的检验基础.

1.7 n +^{12}C 的反应道的开放途径

^{12}C 的天然丰度为 98.89%. 目前 ^{12}C 的能级纲图已经给到 733.47MeV(Firestone et al., 1996), 大约有 56 条能级, 这里就不再详细列出. 碳是构成各种有机物的主要元素之一, 无论对核医学和辐射剂量方面都需要碳的核数据知识. 由于碳的中子辐射俘获截面很小, 因此用石墨做慢化剂的热中子反应堆常用来生产核燃料 ^{239}Pu. 因此 ^{12}C 的核反应数据也十分重要.

对于中子诱发的 ^{12}C 反应, 入射中子能量在 30MeV 以下时开放的反应道以及其相对应的阈能和 Q 值如下 (Zhang et al., 1999)：

$$
\mathrm{n}+{}^{12}\mathrm{C}\rightarrow{}^{13}\mathrm{C}^{*}\rightarrow\begin{cases}
\gamma+{}^{13}\mathrm{C}, & Q=4.946\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=0.000\mathrm{MeV}\\
\mathrm{n}'+{}^{12}\mathrm{C}, & Q=-4.4389\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=4.812\mathrm{MeV}\\
\mathrm{p}+{}^{12}\mathrm{B}, & Q=-12.587\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=13.645\mathrm{MeV}\\
\mathrm{d}+{}^{11}\mathrm{B}, & Q=-13.733\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=14.887\mathrm{MeV}\\
\alpha+{}^{9}\mathrm{Be}, & Q=-5.700\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=6.179\mathrm{MeV}\\
\mathrm{t}+{}^{10}\mathrm{B}, & Q=-18.929\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=20.520\mathrm{MeV}\\
{}^{3}\mathrm{He}+{}^{10}\mathrm{Be}, & Q=-19.467\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=21.103\mathrm{MeV}\\
{}^{5}\mathrm{He}+{}^{8}\mathrm{Be}, & Q=-8.260\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=8.954\mathrm{MeV}\\
{}^{6}\mathrm{Li}+{}^{7}\mathrm{Li}, & Q=-20.921\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=22.680\mathrm{MeV}\\
2\mathrm{n}+{}^{11}\mathrm{C}, & Q=-18.721\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=20.295\mathrm{MeV}\\
(\mathrm{np}+\mathrm{pn})^{11}\mathrm{B}, & Q=-15.957\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=17.298\mathrm{MeV}\\
(\mathrm{n}\alpha+\alpha\mathrm{n})^{8}\mathrm{Be}, & Q=-7.365\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=7.984\mathrm{MeV}\\
(\mathrm{nd}+\mathrm{dn})^{10}\mathrm{B}, & Q=-25.186\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=27.303\mathrm{MeV}\\
2\alpha+{}^{5}\mathrm{He}, & Q=-8.267\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=8.864\mathrm{MeV}
\end{cases}
$$

实际计算表明, ^{12}C 的前两个激发态不允许发射任何粒子, 只能通过发射 γ 光子退激, 即 ^{12}C 的第 1、第 2 激发态属于非弹性散射反应道. 这里需要特别指出的是 ^{12}C 的第 3 激发能级, 由能级纲图给出其能级能量为 9.641MeV, 自旋宇称为 3^-, 能级宽度为 $\Gamma = 34.5$keV, 这条能级可以发射 α 粒子, 又存在以 E_3 模式的 γ 退激的竞争, 因此 ^{12}C 的第 3 激发态也对非弹性散射道有所贡献. 而 ^{12}C 的第 8 激发态, 激发能为 12.71MeV, 自旋宇称为 1^+, 能级宽度为 $\Gamma = 18.1$eV, 对应的能级寿命是 3.6×10^{-17}s. 这条能级也可以发射 α 粒子, 属于 ^{12}C(n, nα) 反应道, 对应 $\Gamma_\alpha = 17.7$eV. 另外从能级纲图中也可以看出, 这条能级也有 γ 退激的竞争, 可以向基态和第 1 激发态以 M_1 模式进行 γ 跃迁, 对应宽度约为 $\Gamma_\gamma = 0.4$eV. 两种发射的宽度比为 $\Gamma_\gamma/\Gamma_\alpha \approx 0.0226$, 计算表明, 在 $E_\mathrm{n} = 14.1$MeV 时, 贡献到 ^{12}C(n,nα) 反应道的截面为 17.4mb; 而贡献到 ^{12}C(n,n$'$) 反应道的截面约为 0.04mb; 因此, 这条能级主要贡献给 ^{12}C(n,nα) 反应道. 虽然在实验测量上可以观测到它的非弹性散射的中子谱, 但是由于截面太小, 在实际应用方面的意义不是很明显的.

对于 n + ^{12}C 反应, 计算中涉及的所有剩余核都处于分立能级. 实验上还没有观察到三体崩裂过程 (Antolkovic et al., 1975).

对于 (n,2n) ^{11}C 反应道, 当 ^{11}C 处于基态时, 通过电子俘获变为 ^{11}B, 寿命为 20.39 分钟. 而 ^{11}C 处在第 17 激发态 (10.679MeV) 及以下能级时都是通过发射 γ 光子退激到 ^{11}C 的基态, 属于 (n,2n)^{11}C 反应道. 如果 ^{11}C 处在第 17 激发态以上的能

级, 就可以发射 α 粒子, 剩余核为 ^{7}Be, 通过电子俘获变为 ^{7}Li, 因此属于 (n,2nα)^{7}Be 反应道：

$$\mathrm{n}+{}^{12}\mathrm{C}\rightarrow{}^{13}\mathrm{C}^{*}\rightarrow\mathrm{n}+\mathrm{n}+{}^{11}\mathrm{C}\begin{cases}k<17\rightarrow(\mathrm{n},2\mathrm{n})^{11}\mathrm{C}\\k\geqslant18,\quad\mathrm{n}+\mathrm{n}+\alpha+{}^{7}\mathrm{Be}\rightarrow(\mathrm{n},2\mathrm{n}\alpha)^{7}\mathrm{Be}\end{cases}\tag{1.7.1}$$

对于 (np + pn)^{11}B 反应道, 如果剩余核处于 ^{11}B 的第 6 激发态及以下能级, 只能通过发射 γ 光子退激到 ^{11}B 的基态, 属于 (n,np)^{11}B 反应道. 当剩余核 ^{11}B 处于第 7 激发态及以上能级时, ^{11}B 可以发射 α 粒子, 剩余核为 ^{7}Li, 当 ^{7}Li 处于基态和第 1 激发态时, 不能发射任何粒子, 属于 (n,npα)^{7}Li 反应道而当 ^{7}Li 处于第 2 激发态及以上能级时, 可以发射 t, 这时属于 (n,npt2α) 反应道：

$$\mathrm{n}+{}^{12}\mathrm{C}\rightarrow{}^{13}\mathrm{C}^{*}\rightarrow\mathrm{n}+\mathrm{p}+{}^{11}\mathrm{B}\begin{cases}k<6\rightarrow(\mathrm{n},\mathrm{np})^{11}\mathrm{B}\\k\geqslant7,\quad\mathrm{n}+\mathrm{p}+\alpha+{}^{7}\mathrm{Li}\begin{cases}k=g,1\rightarrow(\mathrm{n},\mathrm{np}\alpha)^{7}\mathrm{Li}\\k>1\rightarrow(\mathrm{n},\mathrm{npt}2\alpha)\end{cases}\end{cases}\tag{1.7.2}$$

而对于 (nα + αn)^{8}Be反应道, 由于 ^{8}Be不稳定, 自发分裂为两个 α 粒子, 因而属于 (n,n3α) 反应道：

$$\mathrm{n}+{}^{12}\mathrm{C}\rightarrow{}^{13}\mathrm{C}^{*}\rightarrow\mathrm{n}+\alpha+{}^{8}\mathrm{Be}\rightarrow\mathrm{n}+3\alpha\tag{1.7.3}$$

对于 (nd + dn)^{10}B 反应过程, 当 ^{10}B 处于第 5 激发态及以下能级时, 不能发射任何粒子, 属于 (n,nd)^{10}B 反应道; 而 ^{10}B 的第 6 激发能级以上, 就可以发射质子, 剩余核为 ^{9}Be, 当 ^{9}Be 处于基态时, 属于 (n,npd)^{9}Be反应道; 而当 ^{9}Be 处于激发态时, 就可以通过几种途径到达末态 n + 2α, 所以属于 (n,2npd2α) 反应道. ^{10}B 的更高激发态也可以发射中子, 剩余核为 ^{9}B, 而 ^{9}B 会自发变为一个质子和两个 α 粒子, 因而也属于 (n,2npd2α) 反应道：

$$^{13}\mathrm{C}^{*}\rightarrow\mathrm{n}+\mathrm{d}+{}^{10}\mathrm{B}\begin{cases}k\leqslant5\rightarrow(\mathrm{n},\mathrm{nd})^{10}\mathrm{B}\\k>5,\quad\mathrm{n}+\mathrm{d}+\mathrm{p}+{}^{9}\mathrm{Be}\begin{cases}k=g\rightarrow(\mathrm{n},\mathrm{npd})^{9}\mathrm{Be}(g)\\k\geqslant1\rightarrow(\mathrm{n},2\mathrm{npd}2\alpha)\end{cases}\end{cases}\tag{1.7.4}$$

对于 (pα + αp)^{8}Li 反应过程, ^{8}Li 的第 1 和第 2 激发态都只能通过发射 γ 光子退激到 ^{8}Li 的基态, 再通过 β^{-} 衰变到 ^{8}Be, 其寿命为 0.838s, 这一过程属于 (pα + αp)^{8}Li 反应道, 如果 ^{8}Li 处于第 3 激发态及以上能级, 就可以发射中子, 余核

为 ^{7}Li, 这属于 $(\mathrm{n,np\alpha})^7$Li 反应道：

$$
^{13}\mathrm{C}^* \to \mathrm{p}+\alpha+^8\mathrm{Li}\begin{cases} k\leqslant 2\to(\mathrm{n,p\alpha})^8\mathrm{Li}\\ k>2,\quad \mathrm{p}+\alpha+{}^8\mathrm{Li}\to(\mathrm{n,np\alpha})^7\mathrm{Li}\begin{cases} k=g,\quad 1\to(\mathrm{n,np\alpha})^7\mathrm{Li}\\ k\geqslant 2\to(\mathrm{n,npt2\alpha})\end{cases}\end{cases} \tag{1.7.5}
$$

对于 $(\mathrm{d\alpha+\alpha d})^7$Li 反应过程, 当 ^{7}Li 处于基态和第 1 激发态时, 属于 $(\mathrm{n,d\alpha})^7$Li 反应道; 而当 ^{7}Li 处于第 2 激发态及以上能级时, 就可以发射 t, 属于 $(\mathrm{n,dt2\alpha})$ 反应道：

$$
\mathrm{n}+{}^{12}\mathrm{C}\to{}^{13}\mathrm{C}^*\to\mathrm{d}+\alpha+{}^7\mathrm{Li}\begin{cases} k\leqslant 1\to(\mathrm{n,d\alpha})^7\mathrm{Li}\\ k>1,\to(\mathrm{n,dt2\alpha})\end{cases} \tag{1.7.6}
$$

当从 ^{13}C 连续发射两个 α 粒子后, 剩余核是不稳定的 ^{5}He, 会自发分裂为一个中子和一个 α 粒子, 这属于 $(\mathrm{n,n3\alpha})$ 反应道. 另外, 还可以有直接发射 ^{6}Li 的反应道, 而剩余核是 ^{7}Li.

归结起来, 需要用双微分截面描述的反应道有：$(\mathrm{n,2n})^{11}$C, $(\mathrm{n,2n\alpha})^7$Be, $(\mathrm{n,np})^{11}$B, $(\mathrm{n,np\alpha})^7$Li, $(\mathrm{n,npt2\alpha})$, $(\mathrm{n,p\alpha})^8$Li, $(\mathrm{n,np\alpha})^7$Li, $(\mathrm{n,d\alpha})^7$Li, $(\mathrm{n,dt2\alpha})$ 和 $(\mathrm{n,n3\alpha})$ 等反应道. 在中子入射能量小于 20MeV 时, 仅需要考虑 $(\mathrm{n,n3\alpha})$ 反应道, 其他反应道的阈能都在 20MeV 以上或截面很小可以忽略不计. 但是, 当中子入射能量达到 30MeV 或更高时, 中子诱发 ^{12}C 的核反应过程就变得非常复杂, 涉及三次及四次粒子发射过程, 在理论模型描述方面增加了相当的难度.

而 (n,n3α) 反应道是通过下面四种途径来实现的, 它们是

$$
\mathrm{n}+{}^{12}\mathrm{C}\to{}^{13}\mathrm{C}\to\begin{cases}\alpha+{}^9\mathrm{Be}, & {}^9\mathrm{Be}\to\mathrm{n}+{}^8\mathrm{Be}, & {}^8\mathrm{Be}\to\alpha+\alpha\\ \alpha+{}^9\mathrm{Be}, & {}^9\mathrm{Be}\to\alpha+{}^5\mathrm{He}, & {}^5\mathrm{He}\to\mathrm{n}+\alpha\\ \mathrm{n}+{}^{12}\mathrm{C}^*, & {}^{12}\mathrm{C}^*\to\alpha+{}^8\mathrm{Be}, & {}^8\mathrm{Be}\to\alpha+\alpha\\ {}^5\mathrm{He}+{}^8\mathrm{Be}, & {}^5\mathrm{He}\to\mathrm{n}+\alpha, & {}^8\mathrm{Be}\to\alpha+\alpha\end{cases} \tag{1.7.7}
$$

这里需要指出的是, 在 (n,n3α) 反应道中, 存在双两体崩裂过程, 是典型的粒子非有序发射, 这正是新轻核反应理论所需要解决的新课题. 反应道 (n,n3α) 的反应 Q 值为 $Q=-7.275$MeV. 由于剩余核是非稳定核 ^{8}Be, 因此 (1.1.4) 式中用反应 Q 值确定反应阈能的方式不能成立. 事实上, 在 (1.7.7) 式中四种反应途径对应的阈能是彼此不同. 第一种途径要求发射 α 粒子到达 ^{8}Be 的第 1 激发能级 (1.684MeV), 从而可以继续发射第二中子. α 粒子克服库仑位垒的能量约为 0.15MeV, 由 (1.2.2) 式可以计算出对应的反应阈能约为 3.27MeV, 而第二种途径要求发射 α 粒子到达 ^{8}Be 的第 4 激发能级 (3.039MeV), 从而可以继续发射 α 粒子, 这时计算出对应的反应阈能约为 4.74MeV. 对于第三种途径, 需要发射一个中子达到 ^{12}C 的第 3 激发

能级 (9.641MeV), 从这条能级开始 ^{12}C 就可以通过发射 α 粒子到达不稳定核 ^{8}Be, ^{8}Be 再崩裂为两个 α 粒子, 因而形成 $^{12}C^* \to 3\alpha$ 的反应过程, 这时应用 (1.1.8) 式计算得到的阈能值为 10.44MeV. 对于 (1.7.7) 式中的第四种途径是发射 ^{5}He, ^{5}He 在 ^{13}C 中的结合能为 10.183MeV, 而中子在 ^{13}C 中的结合能为 6.811MeV, 发射 ^{5}He 达到 ^{8}Be 的基态需要克服库仑位垒的能量约为 0.8MeV, 这时对应的反应阈能约为 5.63MeV. 由此可见, 不同反应途径对应的阈能值彼此不同, 当然对 (n,n3α) 整个反应的阈能值是取其中最小的值, 即 (1.7.7) 式第一种途径最先开放这个反应道. 而若用 (1.1.4) 式中 Q 值确定的反应阈能为 7.881MeV, 与实际相差甚远. 实际上入射中子能量在 3.27MeV 时就开放了 (n,n3α) 反应道. 这又显示了轻核反应不同于中重核反应之处.

正如前几节中已经叙述过的, 对于同一个反应道, 可以有几种不同的粒子发射顺序, 它们各自具有彼此不同的出射中子双微分截面, 需要通过理论模型来计算它们, 然后将理论算得的各种发射过程中的双微分截面加起来才能得到该反应道总的出射中子双微分截面.

由于中子入射能量在 20MeV 以下时, (n,n3α) 反应道的截面很大, 也是主要的 α 粒子产生道, 因此有很多实验测量和理论分析的研究工作发表. 主要一些内容可参阅有关文献 (Frye et al., 1955; Stevens et al., 1976; Brede 1991; Antolkovic et al., 1991).

对于总的中子出射双微分截面的测量, 在 1985 年和 1987 年由 M. Baba 等测量了入射中子能量为 $E_{\rm n} = 14.2$MeV 的数据 (Baba et al., 1985, 1987), 其后在 1990 年又测量了入射中子能量为 $E_{\rm n} = 14.1$MeV 和 $E_{\rm n} = 18.0$MeV 的数据 (Baba et al., 1990). 这些测量数据将作为今后理论模型计算结果的检验基础. 需要指出的是, 在 1p 壳核素中, 目前非常缺乏带电粒子出射双微分截面的实验测量, 而对 ^{12}C, 存在 Haight 等对入射中子能量为 $E_{\rm n} = 14.1$MeV 的中子诱发 ^{12}C 总的 α 粒子发射双微分截面的测量 (Haight et al., 1984). 这也为检验轻核反应理论提供了一个实验基础.

1.8 n+^{14}N 的反应道的开放途径

^{14}N 的天然丰度为 99.634%. 目前 ^{14}N 的能级纲图已经给到 24 MeV(Firestone et al., 1996), 这里就不再详细列出. 氮是构成空气的最主要元素之一. 也是硝酸类炸药中的主要元素之一.

对于 20MeV 以下中子诱发的 ^{14}N 反应 (Yan et al., 2005), 开放的反应道及其相对应阈能和 Q 值给出如下：

$$
\mathrm{n}+{}^{14}\mathrm{N}\rightarrow{}^{15}\mathrm{N}^{*}\rightarrow\begin{cases}
\gamma+{}^{15}\mathrm{N}, & Q=10.833\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=0.0000\mathrm{MeV}\\
\mathrm{n}'+{}^{14}\mathrm{N}, & Q=-2.3128\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=2.4794\mathrm{MeV}\\
\mathrm{p}+{}^{14}\mathrm{C}, & Q=0.625\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=0.0000\mathrm{MeV}\\
\mathrm{d}+{}^{13}\mathrm{C}, & Q=-5.327\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=5.7107\mathrm{MeV}\\
\mathrm{t}+{}^{12}\mathrm{C}, & Q=-4.016\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=4.3053\mathrm{MeV}\\
\alpha+{}^{11}\mathrm{B}, & Q=-0.158\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=0.16938\mathrm{MeV}\\
{}^{5}\mathrm{He}+{}^{10}\mathrm{B}, & Q=-12.506\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=13.399\mathrm{MeV}\\
2\mathrm{n}+{}^{13}\mathrm{N}, & Q=-10.533\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=11.1313\mathrm{MeV}\\
(\mathrm{np}+\mathrm{pn})^{13}\mathrm{C}, & Q=-7.551\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=8.0949\mathrm{MeV}\\
(\mathrm{nd}+\mathrm{dn})^{12}\mathrm{C}, & Q=-10.273\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=11.013\mathrm{MeV}\\
(\mathrm{n}\alpha+\alpha\mathrm{n})^{10}\mathrm{B}, & Q=-11.611\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=12.447\mathrm{MeV}\\
2\alpha+{}^{7}\mathrm{Li}, & Q=-8.821\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=9.4585\mathrm{MeV}\\
(2\mathrm{np},\mathrm{npn},\mathrm{pnn})^{12}\mathrm{C}, & Q=-12.497\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=13.397\mathrm{MeV}
\end{cases}
$$

计算中涉及的所有核都处于分立能级, 所有反应中都不含有三体崩裂过程, 全部反应道都是有序粒子发射.

^{14}N 的第 1~9 激发态在能量上都不允许发射任何粒子, 只能通过发射 γ 光子退激, 因而属于非弹性散射反应道 ^{14}N 的第 10 激发态及以上能级就可以发射质子, 属于 (n,np) 反应道. 需要指出的是, 第 12~24 激发态都存在发射 γ 光子与发射质子的竞争, 这些分立能级部分属于 (n,np) 反应道, 部分属于非弹性散射反应道. 这是因为, 虽然从能量上看这些能级的激发能已明显高于发射质子所需的最低能量, 发射 γ 光子的竞争力很弱, 但是由于角动量和宇称守恒的限制, 大大地压低了发射质子的概率, 使得不能忽略 γ 光子的发射概率. 比如 8.490MeV, $J^{\pi}=4^{+}$ 的第 12 激发态, 质子的自旋宇称为 $1/2^{+}$, 剩余核 ^{13}C 的基态自旋宇称为 $1/2^{-}$, 末态总自旋为 0 或 1, 再由宇称守恒得知 l 必须为奇数, 因此发射质子的轨道角动量只能为 l=3, 最主要的低分波 l=0,1,2 都被禁戒了, 但是在这种能量下 l=3 的分波概率非常小, 再加上库仑位垒的限制, 因此发射 γ 光子的概率就可能与质子发射相竞争了.

^{5}He发射出来后就自发分裂为一个中子和一个 α 粒子, 所以发射 ^{5}He的反应属于 (n,nα)^{11}B 反应道. 连续发射两个中子后的剩余核 ^{13}N 是不稳定核, 通过电子俘获变成 ^{13}C, 而 ^{13}N 的前几个激发态都不能发射任何粒子, 只能通过发射 γ 光子退激到 ^{13}N 的基态, 因此这个反应属于 (n,2n)^{13}N 反应道. 同上, 发射一个中子和一个质子后, 剩余核为 ^{13}C, 它的前几个激发态都只能通过发射 γ 光子退激到 ^{13}C 的基态, 因此属于 (n,np)^{13}C 反应道.

发射一个中子和一个 d 核后, 剩余核为 ^{12}C, 当它处于基态和第 1、第 2 激发态时, 属于 (n,nd)^{12}C 反应道; 如果剩余核 ^{12}C 处在第 3 激发态及以上能级时, 就可以发射 α 粒子, 剩余核是 ^{8}Be, 它是不稳定核, 自发裂变为两个 α 粒子, 所以该过程属于 (n,nd3α) 反应道：

$$\mathrm{n} + {}^{14}\mathrm{N} \rightarrow {}^{15}\mathrm{N}^{*} \rightarrow \mathrm{n} + \mathrm{d} + {}^{12}\mathrm{C}\begin{cases} k \leqslant 3 \rightarrow (\mathrm{n},\mathrm{nd})^{12}\mathrm{C} \\ k \geqslant 3, \rightarrow (\mathrm{n},\mathrm{nd3\alpha}) \end{cases} \tag{1.8.1}$$

先后发射一个中子和一个 α 粒子, 或者发射一个 ^{5}He, 其剩余核都是 ^{10}B, 它的前五个激发态都只能通过发射 γ 光子退激到 ^{10}B 的基态, 因此属于 (n,nα)^{10}B 反应道, 当 ^{10}B 处于第 6 激发态及以上能级 (第 10 激发态除外) 时, 就可以发射 α 粒子, 达到剩余核 ^{6}Li. 当 ^{6}Li 处于基态或第 2 激发态时, 属于 (n,n2α)^{6}Li反应道, 如果 ^{6}Li 处于其他激发态, 就可以发射 d 核, 因此属于 (n,nd3α) 反应道. 其反应过程由 (1.8.2) 式所示：

$$\mathrm{n}+{}^{14}\mathrm{N} \rightarrow {}^{15}\mathrm{N}^{*} \rightarrow \mathrm{n}+\alpha+{}^{10}\mathrm{B}\begin{cases} k \leqslant 5, 10 \rightarrow (\mathrm{n},\mathrm{n\alpha})^{10}\mathrm{B} \\ k > 5, \rightarrow (\mathrm{n},\mathrm{n2\alpha})^{6}\mathrm{Li}\begin{cases} k = g, 2 \rightarrow (\mathrm{n},\mathrm{n2\alpha})^{6}\mathrm{Li} \\ k = 1, 3, 4, \cdots \rightarrow (\mathrm{n},\mathrm{nd3\alpha}) \end{cases} \end{cases} \tag{1.8.2}$$

从 ^{15}N 连续发射两个 α 粒子, 剩余核为 ^{7}Li, 当 ^{7}Li 处于基态和第 1 激发态时, 属于 (n, 2α)^{7}Li 反应道; 如果 ^{7}Li 处于第 2 激发态及以上能级时, 就可以发射 t, 因此属于 (n, t3α) 反应道. 其反应过程由 (1.8.3) 式所示：

$$\mathrm{n} + {}^{14}\mathrm{N} \rightarrow {}^{15}\mathrm{N}^{*} \rightarrow \alpha + \alpha + {}^{7}\mathrm{Li}\begin{cases} k \leqslant 1 \rightarrow (\mathrm{n},2\alpha)^{7}\mathrm{Li} \\ k > 2, \rightarrow (\mathrm{n},\mathrm{t3\alpha}) \end{cases} \tag{1.8.3}$$

^{15}N 发射一个 α 粒子和一个 t 之后, 剩余核 ^{8}Be 是不稳定核, 可以自发裂变为两个 α 粒子, 所以也属于 (n,t3α) 反应道：

$$\mathrm{n} + {}^{14}\mathrm{N} \rightarrow {}^{15}\mathrm{N}^{*} \rightarrow \mathrm{t} + \alpha + {}^{8}\mathrm{Be} \rightarrow \mathrm{t} + 3\alpha \tag{1.8.4}$$

^{15}N 可通过三种途径：(n,nnp), (n,npn), (n,pnn) 先后发射两个中子和一个质子, 余核为 ^{12}C, 当它处于基态和第 1、第 2 激发态时, 属于 (n,2np)^{12}C 反应道, 如果 ^{12}C 处在第 3 激发态及以上能级, 就可以发射 α 粒子, 剩余核 ^{8}Be, 是不稳定核, 可以自发裂变为两个 α 粒子, 所以它属于 (n,2np3α) 反应道：

$$\mathrm{n} + {}^{14}\mathrm{N} \rightarrow {}^{15}\mathrm{N}^* \rightarrow \mathrm{n} + \mathrm{n} + \mathrm{p} + {}^{12}\mathrm{C} \begin{cases} k \leqslant 3 \rightarrow (\mathrm{n}, 2\mathrm{np})^{12}\mathrm{C} \\ k > 3, \rightarrow (\mathrm{n}, 2\mathrm{np}3\alpha) \end{cases} \tag{1.8.5}$$

归结起来，需要用双微分截面描述的多粒子发射反应道有上述多种，但是实际计算表明，如果中子入射能量在 30MeV 以下，需要用双微分截面描述的主要反应道只有以下五个：$(\mathrm{n,2n})^{13}\mathrm{N}$, $(\mathrm{n,n}\alpha)^{10}\mathrm{B}$, $(\mathrm{n,np})^{13}\mathrm{C}$, $(\mathrm{n,nd})^{12}\mathrm{C}$, $(\mathrm{n,2np})^{12}\mathrm{C}$. 而 $(\mathrm{n,nd}3\alpha)$, $(\mathrm{n,2}\alpha)^{7}\mathrm{Li}$, $(\mathrm{n,n2}\alpha)^{6}\mathrm{Li}$, $(\mathrm{n,t}3\alpha)$, 以及 $(\mathrm{n,2np}3\alpha)$ 等反应道在能量上可以开放，由于包含多次带电粒子发射过程，竞争力很小，理论计算表明可以被忽略.

当然, 在入射能量更高时, 剩余核 $^{13}\mathrm{N}$, $^{10}\mathrm{B}$, $^{13}\mathrm{C}$, $^{12}\mathrm{C}$ 等核素, 还会有进一步的粒子发射过程, 按照前面已经给出的反应途径, 例如, (1.8.1)~(1.8.5) 式列出的反应途径那样, 除去非弹性散射外, 最后所有的反应产物几乎全是轻于 α 粒子的核素或粒子, 这是属于中能轻核反应的课题.

目前存在 $(\mathrm{n,2n})^{13}\mathrm{N}$ 反应截面的实验测量数据, 在理论计算时, 需要很多的 $^{14}\mathrm{N}$ 的能级, 而目前一些分立能级的自旋宇称还尚未确定. 初始计算时, 需要填入一个试算值, 理论计算的结果会与实验测量有明显分歧. 分析发现, 就是由这些没确定自旋宇称的分立能级而造成的. 在适当调整一些能级的自旋宇称后, 理论计算结果可以很好地符合实验测量的 (n,2n) 反应截面. 这种现象在其他比较重的轻核核素中也会出现. 这也说明, 能给出全部准确的能级纲图对理论计算是何等的重要. 在计算轻核反应的截面时, 就要检查是否与能级纲图中有些能级没有确定的自旋宇称值有关. 如果有关的话, 就需要调整这些不确定的自旋宇称值, 以给出合理的结果. 这些被调整出的能级自旋宇称值也可以作为这些能级的自旋宇称推荐值.

在双微分截面实验测量方面, 到目前为止, 仅有 1985 年 M. Baba 等对入射中子能量为 $E_\mathrm{n} = 14.2\mathrm{MeV}$ 测量的在一些特定角度下的总出射中子双微分截面数据 (Baba et al., 1985). 这家唯一的实验测量数据将作为今后对理论模型计算的双微分截面结果的检验基础.

1.9　n + ^{16}O 的反应道的开放途径

^{16}O 的天然丰度为 99.762%. 目前 ^{16}O 的能级纲图已经给到 35MeV(Firestone et al., 1996), 大约 130 多条能级, 这里就不再详细列出. 氧是水和有机物的主要成分, 无论在轻水堆、重水堆、水冷却系统中, 以及中子治癌等方面, 氧是一个必不可少的重要元素. 因此 ^{16}O 的核反应数据就有相当重要的应用价值.

在中子入射能量低于 30MeV 时, 中子诱发 ^{16}O 的开放反应道以及相应 Q 值、阈能可表示如下 (Zhang et al., 2001a; Duan et al., 2005)：

$$
\mathrm{n}+{}^{16}\mathrm{O}={}^{17}\mathrm{O}^* \to \begin{cases}
\gamma+{}^{17}\mathrm{O}, & Q=4.143\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=0.000\mathrm{MeV} \\
\mathrm{n}'+{}^{16}\mathrm{O}, & Q=-6.0494\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=6.4275\mathrm{MeV} \\
\mathrm{p}+{}^{16}\mathrm{N}, & Q=-9.637\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=10.2447\mathrm{MeV} \\
\alpha+{}^{13}\mathrm{C}, & Q=-2.215\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=2.3547\mathrm{MeV} \\
\mathrm{d}+{}^{15}\mathrm{N}, & Q=-9.903\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=10.5257\mathrm{MeV} \\
\mathrm{t}+{}^{14}\mathrm{N}, & Q=-14.479\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=15.392\mathrm{MeV} \\
{}^{3}\mathrm{He}+{}^{14}\mathrm{C}, & Q=-14.617\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=15.5387\mathrm{MeV} \\
{}^{5}\mathrm{He}+{}^{12}\mathrm{C}, & Q=-8.056\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=0.000\mathrm{MeV} \\
{}^{6}\mathrm{Li}+{}^{11}\mathrm{C}, & Q=-19.419\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=20.6436\mathrm{MeV} \\
2\mathrm{n}+{}^{15}\mathrm{O}, & Q=-15.663\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=16.6507\mathrm{MeV} \\
(\mathrm{np}+\mathrm{pn})^{15}\mathrm{N}, & Q=-12.127\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=12.8917\mathrm{MeV} \\
(\mathrm{n}\alpha+\alpha\mathrm{n})^{12}\mathrm{C}, & Q=-7.161\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=7.6126\mathrm{MeV} \\
(\mathrm{nd}+\mathrm{dn})^{14}\mathrm{N}, & Q=-20.736\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=22.0436\mathrm{MeV} \\
(2\mathrm{np}+\mathrm{npn}+\mathrm{p2n})^{14}\mathrm{N}, & Q=-22.9599\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=24.4078\mathrm{MeV} \\
\alpha\alpha+{}^{9}\mathrm{Be}, & Q=-12.861\mathrm{MeV}, \quad E_{\mathrm{th}}=13.672\mathrm{MeV}
\end{cases}
$$

先后发射一个中子和一个 α 粒子, 或者发射一个 ^{5}He, 剩余核都是 ^{12}C, 它的前两个激发态都只能通过发射γ光子退激到 ^{12}C 的基态, 因此属于 (n,nα)^{12}C 反应道, 如果 ^{12}C 处于第 3 激发态及以上能级, 就可以发射 α 粒子, 剩余核 ^{8}Be又自发分裂为两个 α 粒子, 所以它属于 (n,n4α) 反应道. 这些反应道的开放详细分解情况由公式 (1.9.1) 给出

$$
\mathrm{n}+{}^{16}\mathrm{O}\to{}^{17}\mathrm{O}^*\to\begin{cases}
\mathrm{n}+\alpha+{}^{12}\mathrm{C}\begin{cases} k\leqslant 3\to(\mathrm{n},\mathrm{n}\alpha)^{12}\mathrm{C} \\ k\geqslant 3\to(\mathrm{n},\mathrm{n}4\alpha)\end{cases} \\
\alpha+\mathrm{n}+{}^{12}\mathrm{C}\begin{cases} k\leqslant 3\to(\mathrm{n},\mathrm{n}\alpha)^{12}\mathrm{C} \\ k\geqslant 3\to(\mathrm{n},\mathrm{n}4\alpha)\end{cases} \\
{}^{5}\mathrm{He}+{}^{12}\mathrm{C}\to\mathrm{n}+\alpha+{}^{12}\mathrm{C}\begin{cases} k\leqslant 3\to(\mathrm{n},\mathrm{n}\alpha)^{12}\mathrm{C} \\ k\geqslant 3\to(\mathrm{n},\mathrm{n}4\alpha)\end{cases} \\
\alpha+\alpha+{}^{9}\mathrm{Be}\begin{cases} k=gs\to(\mathrm{n},2\alpha)^{9}\mathrm{Be}(gs) \\ k\geqslant 1\to(\mathrm{n},\mathrm{n}4\alpha)\end{cases}
\end{cases}
\tag{1.9.1}
$$

考虑 ^{5}He发射时, ^{5}He会自发分裂为一个中子和一个 α 粒子, 属于 (n,nα)^{12}C 反应道. 而连续发射两个中子后剩余核为 ^{15}O, 它的前十几个激发态都只能通过发射 γ 光子退激到 ^{15}O 的基态, 属于 (n,2n)^{15}O 反应道. 发射一个中子和一个质子后, 剩

余核为 ^{15}N, 它的前十几个激发态都只能通过发射 γ 光子退激到 ^{15}N 的基态, 属于 (n,np)^{15}N 反应道.

发射一个中子和一个 d 之后, 剩余核为 ^{14}N, 它处于第 9 激发态及以下能级时, 只能通过发射 γ 光子退激, 属于 (n,nd)^{14}N 反应道; 如果剩余核 ^{14}N 处在第 10 激发态及以上能级, 就可以发射质子, 剩余核是 ^{13}C, 因此属于 (n,npd)^{13}C 反应道; 而如果剩余核 ^{14}N 处在第 28 激发态及以上能级时, 就可以再次发射 d, 剩余核为 ^{12}C, 当 ^{12}C 处于第 2 激发态及以下能级时, 属于 (n,n2d) ^{12}C 反应道; 如果 ^{12}C 处于第 3 激发态及以上能级时, ^{12}C 可以发射 α 粒子, 剩余核 ^{8}Be是不稳定核, 可以自发裂变为两个 α 粒子, 所以它属于 (n,n2d3α) 反应道. 这种反应过程由 (1.9.2) 式给出

$$\mathrm{n}+{}^{16}\mathrm{O}\to{}^{17}\mathrm{O}^*\to\mathrm{n}+\mathrm{d}+{}^{14}\mathrm{N}\begin{cases}k\leqslant 10\to(\mathrm{n,nd})^{14}\mathrm{N}\\k>10\to(\mathrm{n,npd})^{13}\mathrm{C}\\k>28\to(\mathrm{n,n2d})^{12}\mathrm{C}\begin{cases}k\leqslant 3\to(\mathrm{n,n2d})^{12}\mathrm{C}\\k\geqslant 3\to(\mathrm{n,n2d3\alpha})\end{cases}\end{cases}\tag{1.9.2}$$

另外, 还可以通过三种不同粒子发射顺序的途径 (n,nnp), (n,npn), (n,pnn), 即先后发射两个中子和一个质子之后, 剩余核为 ^{14}N, 事实上 (n,2np) 反应到 24.4MeV 才开放, 直到 30MeV 它的截面都很小, 故而在低能核反应中可忽略不计.

^{17}O 连续发射两个 α 粒子后, 剩余核为 ^{9}Be, 当它处于基态时, 属于 (n,2α)^{9}Be$_g$ 反应道; 而当 ^{9}Be处于激发态时, 就可以通过几种途径变成一个中子和两个 α 粒子, 因此也属于 (n,n4α) 反应道：

$$\mathrm{n}+{}^{16}\mathrm{O}\to{}^{17}\mathrm{O}^*\to\alpha+\alpha+{}^{9}\mathrm{Be}\begin{cases}k=g\to(\mathrm{n,2\alpha})^{9}\mathrm{Be}\\k\geqslant 1\to(\mathrm{n,n4\alpha})\end{cases}\tag{1.9.3}$$

因此有多种渠道可以实现 (n,n4α) 反应. 由 (1.9.1) 式所示. (n,n4α) 反应道的 Q 值为 $Q=-14.737$MeV, 由于存在剩余核是非稳定核 ^{8}Be, 因此 (1.1.4) 式中用反应 Q 值确定反应阈能的方式也不能成立. 事实上, 最主要的途径时发射各种粒子到达 ^{12}C 的第 3 激发能级 (9.641MeV), 同前所述, 从这条能级开始就可以实现 $^{12}\mathrm{C}^*\to 3\alpha$ 的反应过程.

在 (1.9.1) 式中四种途径对应的阈能彼此不同. 第一种途径要求发射一个中子达到 ^{16}O 的第 72 激发能级 (18.773MeV), 计算出对应的反应阈能为 19.95MeV, 而第二种途径要求发射 α 粒子达到 ^{13}C 的第 33 激发能级 (14.984MeV), 才能发射次级中子到达 ^{12}C 的第 3 激发能级. α 粒子在 ^{17}O 中的结合能为 6.358MeV, 而中子在 ^{17}O 中的结合能为 4.143MeV, 这时计算出对应的反应阈能约为 19.37MeV. 对于第三种途径, 是通过发射 ^{5}He 到达 ^{12}C 的第 3 激发能级, ^{5}He 在 ^{17}O 中的结合能为 18.76MeV, 这时对应的反应阈能约为 26.79MeV. 而第四种途径是, 有序发

射两个 α 粒子到达 ^{9}Be 的第 1 激发能级 (1.684MeV), 再由 $^{9}\text{Be} \to \text{n} + 2\alpha$ 反应过程实现 (n,n4α) 反应. 发射第一个 α 粒子到达 ^{13}C 的第 30 激发能级 (14.390MeV) 才能继续发射第二个 α 粒子到达 ^{9}Be 的第 1 激发能级, 这时对应的反应阈能约为 18.58MeV. 由此可见, 不同反应途径对应的阈能值彼此不同, 当然对 (n,n4α) 整个反应的阈能值是其中最小的值. 总的计算结果表明, (n,n4α) 的反应截面在入射中子能量大于 19MeV 时才刚刚出现, 直到 20MeV 时截面还明显小于一个毫靶. 因此, 在 $E_{\text{n}} \leqslant 20$MeV 时可以不考虑这个反应道, 而在 20MeV 以上时, (n,n4α) 反应需要考虑, 理论计算表明在 $E_{\text{n}} \approx 30$MeV 时, 截面可以到达几十毫靶.

而用 (1.1.4) 式中 Q 值计算出的反应阈能为 15.658MeV, 与实际情况相差甚远, 这主要是在 (n,n4α) 反应中, 有多次的带电粒子发射过程, 一些能级从能量上允许发射, 但是却被库仑位垒所阻止, 因此只能从更高能量的能级来实现, 使得 α 粒子发射能量可以克服库仑位垒.

另外, 是否存在不稳定核 ^{8}Be 发射的可能还有待研究, 如果发射 ^{8}Be 后剩余核到达 ^{9}Be 的第 1 激发能级, 因而实现 (n,n4α) 反应. ^{8}Be 在 ^{17}O 中的结合能为 17.099MeV, 库仑位垒大约为 4MeV, 这时反应阈能约为 24.9MeV. 以及发射一个中子后, 激发态的 $^{16}\text{O}^*$ 崩裂为两个 ^{8}Be, 而 ^{8}Be 在 ^{16}O 中的结合能为 14.617MeV, 库仑位垒大约为 4MeV, 发射一个中子后, 激发态的 $^{16}\text{O}^*$ 崩裂为两个 ^{8}Be 的反应阈能约为 19.7MeV. 由此可见, 在 n + ^{16}O 反应中, 当中子入射能量超过 20MeV 时, ^{16}O 的 ^{8}Be 两体崩裂的反应途径令人关注.

从上面反应道开放的分析清楚地看出, 发射粒子到同一个剩余核的不同能级可以属于不同的反应道, 而通过不同顺序的粒子发射, 又可以属于同一个反应道, 这显示了轻核反应的特点.

归结起来, 需要用双微分截面描述的多粒子发射反应道有：(n,2n)^{15}O, (n,np)^{15}N, (n,nα)^{12}C, (n,n4α), (n, nd)^{14}N, (n,n2d)^{12}C, (n,n2d3α), (n,2α)^{9}Be 和 (n,2np)^{14}N 等. 中子入射能量在 20MeV 以下时, 需要用双微分截面描述的主要反应道只有四个：(n,2n)^{15}O, (n,np)^{15}N, r(n,nα)^{12}C, (n,2α)^{9}Be.

n + ^{16}O 反应的非弹性散射来自九条能级的贡献, 实际上对应的是 ^{16}O 的第 1~5, 9, 10, 12 以及第 19 激发态. 在这些能级中, 前五条是由于能量限制, 不能发射次级粒子; 而第 9, 10, 12 以及第 19 激发态虽然在能量上允许发射 α 粒子, 但是由于角动量、宇称守恒的限制而被禁戒, 也只能通过发射 γ 光子退激, 因而属于非弹性散射过程. 例如, ^{16}O 的第 9 激发态的激发能为 10.975MeV, 自旋、宇称为 0^-, 如果发射 α 粒子, 剩余核为 ^{12}C 的基态, 它们的自旋、宇称均为 0^+, 考虑角动量守恒, α 粒子的轨道角动量只能为 $l = 0$, 这样又无法保证宇称守恒, 因此 α 粒子的发射完全被禁戒, 只能通过发射 γ 光子退激, 成为非弹性散射道.

^{16}O 的第 6, 7, 8, 11, 13~17 以及第 20 激发能级都可以发射 α 粒子, 贡献到 (n,

nα) 反应道, 而 ^{16}O 的第 18 激发态则可以发射质子, 贡献到 (n,np) 反应道. ^{16}O 的第 19 态及以上能级, 都可以发射多种次级粒子, 包括中子, 质子, d, t, α, 分别属于 (n,2n), (n,np), (n,nd), (n,nt), (n,nα) 反应道. 一般而言, 一条能级一旦允许粒子发射, γ 退激的概率与粒子发射相比要小许多数量级, 可以被忽略.

在中子入射能量在 30MeV 以下时, 应该考虑的核反应道有 14 个, 它们分别是：(n,γ), (n,n′), (n,p), (n,t), (n,^{3}He), (n,α), (n,^{6}Li), (n,2n), (n,np), (n,nα), (n,nd), (n,n4α), (n,2np), (n,2α)^{9}Be$_g$.

由上述八个 1p 壳轻核开放反应道的分析中可以看到, 每个轻核开放的反应道彼此非常不同, 个性极强. 另外, 发射粒子到剩余核的不同能级可以属于不同的反应道, 而不同发射粒子顺序可以属于同一个反应道, 但是开放的阈能却可以相差很大. 再有, 在轻核反应中, 存在两体或三体崩裂过程, 存在非有序粒子发射过程. 这些都是中重核反应过程中不存在的现象. 另外, 就对发射两个中子的反应道而言, 对 ^{6}Li 是 (n, 2np) α 反应道; 对 ^{7}Li 是 (n, 2nd) α 反应道; 对 ^{9}Be 是 (n, 2n2α) 反应道; 对 ^{10}B 是 (n, 2np2α) 反应道; 对 ^{11}B 是 (n, 2n)^{10}B; 对 ^{12}C 是 (n, 2nα)^{7}Be 反应道; 对 ^{14}N 是 (n, 2np)^{12}C 和 (n, 2np3α) 反应道; 对 ^{16}O 是 (n, 2n)^{15}O 和 (n, 2np)^{14}N 反应道. 可以看出, 它们的剩余核之间彼此完全不同, 因此很难用一个公共程序描述各种所有轻核反应的内容, 因此, 轻核反应的理论描述具有更多的复杂性, 无法用公共反应道的方式设计出一个通用程序来进行理论计算.

在总的中子出射双微分截面的实验测量方面, 1985 年 M. Baba 等测量了入射中子能量为 $E_{\mathrm{n}} = 14.2$MeV 的数据 (Baba et al., 1985); 1988 年 M. Baba 等又测量了入射中子能量为 $E_{\mathrm{n}} = 14.1$MeV 和 $E_{\mathrm{n}} = 18$MeV 的数据 (Baba et al., 1988). 这些实验测量数据将作为今后对理论模型计算双微分截面结果的检验基础.

1.10　核反应统计概念的概述

对于一个多粒子系统, 具有非常大的自由度, 系统的性质会变得不可想象的复杂和紊乱, 好像宏观物体行为无规律的迹象. 但是, 大自由度体系下整体行为却出现了自身的独特的规律性, 这就是所谓的统计的规律性 (朗道等, 1964). 对核反应的这种规律性的认识也在不断的探索中逐步加深, 形成了核反应统计理论的发展.

量子系统的统计行为与经典粒子的统计行为具有不同之处. 量子统计理论的发展已经指明, 自然界中的微观粒子不是属于费米子就是属于玻色子, 它们属于不同的量子统计规律. 费米子属于 Fermi-Dirac 统计, 这种统计是由费米对电子提出的 (Fermi, 1926), 而它同量子力学的联系由狄拉克所阐明的 (Dirac, 1926), 而玻色子属于 Bose-Einstein 统计, 这种统计是由玻色对光量子提出的 (Bose et al., 1924), 而以后为爱因斯坦所推广 (Einstein, 1924). 这两种量子统计规律都不同与经典统

计 (Maxwell-Boltzman Statistics). 在经典统计中, 经典粒子是可以区分的, 而量子系统的全同粒子具有不可区分性, 称为量子力学中的全同粒子效应. 为了用对比方式说明问题起见, 以两个粒子为例, 每个粒子只有处于两个可能的状态 α, β. 它们的归一化权重分布由表 1.5 给出.

表 1.5　各种类型的粒子归一化权重分布

粒子状态	经典统计	Fermi-Dirac 统计	Bose-Einstein 统计
两个粒子同在 α 态	1/4	0	1/3
两个粒子同在 β 态	1/4	0	1/3
一个在 α 态, 一个在 β 态	1/2	1	1/3

因此, 达到平衡态的分布也彼此不同. 对于费米统计的平衡态的表示是

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{\exp[(\varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{f}})/KT] + 1} \tag{1.10.1}$$

其中, ε_{f} 是费米能, KT 是核温度. 而玻尔兹曼分布函数是 (Boltzman et al., 1871)

$$n(\varepsilon) = N\exp(-\varepsilon/KT) \tag{1.10.2}$$

其中 N 是归一化常数. 当满足条件

$$\exp[(\varepsilon_{\mathrm{f}} - \varepsilon)/KT] \ll 1 \tag{1.10.3}$$

时, 即明显在费米面以上的粒子态分布行为满足 (1.10.3) 式的条件, 这时费米统计的平衡态分布会过渡到玻尔兹曼分布. 由表 1.5 可以看出, 不同类型的粒子遵守不同的统计规律. 对于核反应来说, 核子属于费米子, 遵守 Fermi-Dirac 统计, 其中包含了 Pauli 不相容原理. 因此, 在后面的研究内容中会经常出现对 Pauli 不相容原理所产生的效应的讨论. 实际研究表明, 考虑 Pauli 不相容原理后会对改进理论计算结果的准确性.

从统计理论的内容来看, 关于平衡态性质的理论, 已经发展到比较完善的程度. 而对于非平衡态统计理论而言, 这时微观粒子之间的碰撞机制是起决定性的影响. 另外, 对于一个封闭系统, 只要时间足够长, 它的状态最终会达到统计平衡. 在趋向平衡的过程中, 系统内部各处也要趋于均匀, 这对应了不可逆的扩散过程, 或者称耗散过程. 而对于核反应过程而言, 必然是一个开放系统. 因此需要研究的是开放系统的非平衡统计行为. 但是, 所有的研究核反应过程的内容, 在退化为封闭系统时, 都要遵守统计理论的相关规律.

在统计物理中, 所有的可观测力学量都是统计平均值. 既然是统计过程, 就会出现与统计平均值的偏离, 这被称为统计过程中的涨落现象. 这种统计涨落行为, 在平衡态的核反应统计理论中, 已经被诸多的实验测量观测到. 根据涨落行为的规

律, 在理论上得到了很好的解决. 平衡态的核反应统计理论前面已经达到相当成熟的程度, 而预平衡态的核反应统计理论还正处于发展过程之中. 轻核反应的现象表明, 描述轻核反应的理论需要进一步对预平衡态的核反应统计理论进行发展.

对于多粒子系统或多自由度的系统而言, 在统计物理学中, 有一个非常重要的物理量 “熵”. 对于费米子系统来说, 由量子统计理论得到熵的表示为 (朗道等, 1964)

$$S(t) = -K\sum_j \{n_j(t)\ln n_j(t) + [1-n_j(t)]\ln[1-n_j(t)]\} \tag{1.10.4}$$

其中, K 是玻耳兹曼常数. $n_j(t)$ 是 j 相格在 t 时刻的平均占据数. 如果用连续能量态描述时, 熵可以表示为

$$S(t) = -K\int_0^\infty g(\varepsilon)\{n(\varepsilon,t)\ln n(\varepsilon,t) + [1-n(\varepsilon,t)]\ln[1-n(\varepsilon,t)]\}\mathrm{d}\varepsilon \tag{1.10.5}$$

这里, $g(\varepsilon)$ 是单粒子能级密度, $n(\varepsilon,t)$ 是能量为 ε 相格在 t 时刻的平均占据数.

如果闭合系统不处于统计平衡状态时, 那么它的宏观状态将随着时间而变化, 直到系统最后达到完全平衡的状态为止. 用能量在各个相格的分布来表征系统的一个宏观状态, 系统依次所经过的一系列状态对应越来越概然的能量分布. 在非平衡的闭合系统发生的过程是, 系统从具有较小熵的状态类型地过度道具有较大熵的状态, 直到最后熵达到了统计平衡状态的最大可能值为止. 这被称为熵增加定律 (朗道等, 1964).

另外, 由熵与平均占据数的贡献解析表示 (1.10.5) 式看出, 在多粒子系统总被占据或总未被占据的相格而言, 它们对熵值是没有任何贡献的. 例如, 在核反应过程中, 费米阱底的核子很难被激发, 这种相格总是被占据, 或足够高能量的相格, 在核反应过程中总也不能被占据的, 因此对熵值也没有任何贡献的. 因此, 核的激发系统随时间的变化, 只有满足

$$0 < n(\varepsilon,t) < 1 \tag{1.10.6}$$

的平均占据数, 用它们随着时间的变化来描述核激发系统的宏观变化. 而平均占据数是满足一定的方程. 关于这类方程的表示可参见陈仁烈 (1963) 和 Wolschin 等 (1982) 的文献. 平均占据数随时间的演化过程就是核激发系统中的耗散过程. 由熵增加定律可以得知, 任何封闭系统的耗散过程都存在熵的增加.

归纳上述对轻核反应道开放的分析得知了轻核反应与中重核反应的主要差别, 因此可以给出进一步发展核反应理论的方面入手点.

首先, 在轻核反应中, 发射粒子后的剩余核总是处于分立能级状态, 每个分立能级都有自己独特的自旋宇称, 而发射粒子以预平衡机制为主. 目前现有核数据统计模型中恰好缺少了对这一反应机制的较严格的理论描述. 而需要发展在非平衡

统计过程中加入角动量守恒的这一物理因素, 这是发展预平衡核反应理论主要课题之一. 而宇称守恒则被包含在粒子的发射率之中.

由前面给出轻核的能量纲图可以看出, 轻核的分立能级有很多是不稳定的, 其宽度甚至可以达到兆电子伏特量级, 意味着这些能级可以发射次级粒子, 而在上面轻核反应分反应道的开放分析中, 已经显示出能级纲图的准确性对理论模型计算的重要性. 更准确的能级纲图, 是轻核反应理论模型计算的可靠性的重要数据基础. 由对中子引发轻核的反应途径的分析可以看出, 发射粒子到同一个剩余核的不同分立能级会属于不同的反应道, 这又是轻核反应不同于中重核反应的主要差别之一. 而用中重核反应道开放的方式来描述轻核反应道开放途径就会出现很大的偏差. 不了解轻核反应的详细途径, 就不能准确描述轻核反应的行为.

目前, 核反应统计理论模型适合于描述有序发射核反应过程, 而中子引发的的轻核反应中, 剩余核会是不稳定的 ^{5}Li, ^{5}He, ^{6}He, ^{8}Be 核素, 都会自发产生两体崩裂或三体崩裂的非有序发射过程, 这种核反应机制在中重核反应中是没有出现的. 能够描述粒子非有序发射过程的模型方法是发展轻核对于理论的另一个要点.

在中子诱发的轻核反应中, 需要建立描述各种类型粒子发射双微分截面的理论模型公式, 包括单粒子和复杂粒子的预平衡发射. 因此需要建立轻核反应中各种类型粒子发射的双微分截面的理论模型公式. 为了确定各种粒子的预平衡发射率, 就需要给出各种复杂粒子在复合核中的预形成概率, 这是能描述好预平衡发射的又一个主要物理因素. 在统计物理学中是用微观态相格的数目多少来确定概率的大小 (朗道等, 1964), 而对微观态的平均占据概率的准确描述是各种复杂粒子在复合核中的预形成概率的重要因素.

研究表明, 在中子引发的轻核反应中不稳定核 ^{5}He的发射需要考虑. ^{5}He 自发崩裂为一个中子和一个 α 粒子, 这个中子主要贡献在中子出射能谱的低能端, 会改进一些轻核反应理论计算与实验测量的双微分截面谱的符合. 而对于中重核而言, 由于较大的库仑位垒, ^{5}He 的发射是可以被忽略的.

由于核质量轻, 粒子发射后的反冲效应非常明显, 严格考虑反冲效应显得尤为重要. 为此, 需要发展轻核反应运动学. 由于在质心系中剩余核的方程能级很大, 由此发射的次级粒子在质心系中是呈现出连续谱的形式. 因此轻核反应中的多粒子发射过程要用双微分截面来描述. 在严格考虑反冲效应后的运动学公式, 可以给出各粒子发射能谱在各种发射角度上准确的位置和形状, 就可以较严格地描述轻核反应中各种发射粒子的双微分截面了, 并且能够保证能量平衡. 所谓能量平衡是指, 每个核反应道有确定的反应 Q 值, 在实验室系中, 所有出射粒子的能量、γ 光子的能量、剩余核的能量以及核反应 Q 值之和与入射中子能量相等, 这就是核反应能量平衡的物理含义, 实质上就是能量守恒.

基于上述轻核反应与于中重核反应的不同的特殊之处, 需要进一步发展适合于

轻核反应的统计理论模型方法. 为此发展建立了一个专门描述轻核反应的统计理论, 不仅可以计算出各种反应道的截面, 而且可以用理论方法描述好粒子发射的双微分截面. 当然, 理论计算结果还需要通过各种类型的检验, 以验证数据的准确性.

参 考 文 献

陈仁烈. 1963. 统计物理引论. 北京: 人民教育出版社.

陈国长, 等. 2001. 私人通讯.

朗道, 栗弗席兹. 1964. 统计物理学. 杨训恺, 等. 译. 北京: 人民教育出版社.

祈步嘉, 等. 1995. 10MeV 中子引起 ^{238}U, ^{209}Bi, Fe 和 ^{9}Be 次级中子双微分截面测量. 原子能科学技术, 29: 315.

阮锡超, 陈国长, 等. The neutron emission double-differential cross sections measurement for beryllium at 8.17 and 10.26MeV Neutrons. 内部资料.

孙伟力, 张本爱. 1995. ^{9}Be(n,2n) 反应能量角度双微分谱分析. 原子能科学技术, 29: 360.

Antolkovic B, Dietze G, Klein H. 1991. Reaction cross sections on carbon for neutron energies from 11.5 to 19 MeV. Nucl. Sci. Eng., 107: 1.

Antolkovic B, Dolenec Z. 1975. The Neutron induced $^{12}\mathrm{C(n,n')3\alpha}$ reaction at 14.1MeV in a Kinematically Complete Experiment. Nucl. Phys. A., 237: 235.

Baba M, et al. 1978. The interaction of fast neutron with ^{9}Be. Proc. Conf. Nuclear Physics/Reactor Data, Hawell, United Kingdom Atomic Energy Authority: 198.

Baba M. et al. 1979. American Phys. Soc., 24: 863.

Baba M, et al. 1985. Scattering of 14.2MeV neutron from B-10,B11, C,N,O F and Si. Conf. nuclear data for basic and applied science. Santa Fe 1: 223.

Baba M, et al. 1987. Double differential neutron emission cross sections of Cu, Ti, Ze and C. NETU: 49.

Baba M, et al. 1988. Double differential neutron scattering cross sections of beryllium, carbon, oxygen. Nuclear Data for Science and Technology: 209.

Baba M, et al. 1990. Application of post acceleration beam chopper for neutron emission cross section measurements. TAERI-M-90-025: 383.

Basu T K, et al. 1979. Neutron multiplication studies in beryllium for fusion reactor blankets. Nucl. Sci. Eng., 70: 309.

Beynon T D, Sim B S. 1988. Modelling of the ^{9}Be(n,2n) duble-differential cross section. Ann. Nucl. Energy, 15: 27-43.

Boltzmann L, Wien Ber. 1871, 63: 397.

Bose S N. 1924. Z Physik., 26: 178.

Brede H J, Dietze G, Klein H, et al. 1991. Determination of neutron-induced alpha-particle cross sections on carbon using the response of a liquid scintillation detector. Nucl. Sci. Eng., 107: 22.

Chiba S, et al. 1985. J. Nucl. Sci. Tech., 22: 771.

Chiba S, et al. 1998. Measurements and theoretical analysis of neutron elastic scattering and inelastic reactions leading to a three-body final state for ^{6}Li at 10 to 20 MeV. Phys. Rev., C58: 2205-2216.

Chiba S, et al. 2001. 私人通讯.

Dirac P A M. 1926. Proc. Roy. Soc., A122: 661.

Drake D M, Auchampaugh C F, Ragan E D, et al. 1977. Double-differential beryllium neutron cross section at incident neutron energies of 5.9, 10.1, and 14.2MeV. Nucl. Sci. Eng., 63: 401.

Duan J F, et al. 2005. Further analysis of neutron double-differential cross sections of n+^{16}O at 14.1MeV and 18MeV. Commun. Theor. Phys., 44: 701-706.

Einstein A. Berliner Ber., 1924: 261.

Fermi E. Z. Physik, 1926, 36: 902.

Firestone R B, Shirley V S. 1996. Table of isotopes. 8th ed. New York: John Wiley & Sons.

Frye G M, et al. 1955. Disintegration of carbon into three alpha particle by 12-20MeV neutrons. Phys. Rev., 99: 1375.

Glenn M, Frye Tr, Juanita H Gammel. 1956. Phys. Rev., 103: 328.

Haight R C, Grimes S M, Johnson R G, et al. 1984. The ^{12}C(n,α) reaction and the kerma factor for carbon at E_n =14.1MeV. Nucl. Sci. Eng., 87: 41.

Ibaraki M, Baba M. 1998. ^{6}Li, ^{7}Li and ^{9}Be neutron emission cross sections at 11.5∼18MeV neutron energy. J. NST, 35: 843.

Oyama Y, Maekawa H. 1990. Measurement and analysis of an angular neutron flux on a beryllium slab irradiated with deuteron-tritium neutrons. Nucl. Sci. Eng., 97: 220-234.

Oyama Y, Yamaguchi S, Maekawa H. 1990. Experimental results of angular neutron spectra leaking from slabs of fusion reactor candidate materials(I). JAERI-M 90-092.

Perkins S T, Plechaty E F, Howerton R J. 1985. A reevaluation of the ^{9}Be(n,2n) Reaction and its effect on neutron multiplication in fusion blanket applications. Nucl. Sci. Eng., 90: 83.

Pronyaev V C, Tagesen S, Vonaih H. 1997. Reaction mechanism in the ^{9}Be+n system leading to the decay into two neutrons and two alpha particles. Conf. Proc. Of nuclear data for science and technology trieste. 19-24: 268.

Schulke A W Jr. 1985. Proc. 8th Mtg Int. collaboration advanced neutron sources (ICANS-VIII). Rutherford-Appleton Laboratory, RAL-85-110.

Stevens A P. 1976. Neutron induced alpha production from carbon between 18 and 22MeV. INIS-MF-3596.

Takahashi A , Sasaki Y, Sugimoto H. 1988. Angle integration emission spectra at 14MeV for Be, C, F, Mg, Al, Si, V, Fe, Cr, Cu, Pb and Bi. Conf. Rep. JAERI-M Reports, 88: 65.

Takahashi A, et al. 1983. Double differential neutron emission cross sections with 14MeV neutron source. OKTAV-A-83-01.

Tilley D R, et al. 2002a. Energy levels of light nuclei $A = 6$. Triangle Universities Nuclear Laboratory, Durham, NC 27708-0308.

Tilley D R, et al. 2002b. Energy levels of light nuclei $A = 7$. Triangle Universities Nuclear Laboratory, Durham, NC 27708-0308.

Tilley D R, et al. 2004. Energy levels of light nuclei $A = 8$, 9, 10. Nucl. Phys., A745: 155-362.

Turk M, Antolkovic B. 1984. Multi-particle Break-up of ^{10}B induced by fast neutrons. Nucl. Phys., A431: 381-392.

Wang J M, Duan J F, Yang Y L, et al. 2006. ^{5}He emission in neutron-induced ^{10}B reactions. Commun. Theor. Phys., 46: 527-532.

Wolschin G. 1982. Equilibration in dissipative nuclear collision. Phys. Rev. Lett., 48: 1004.

Xia H H, et al. 1993. China. J. Nucl. Phys., 15: 367.

Yan Y L, et al. 2005. Analysis of neutron double-differential cross section of n+^{14}N at 14.2 MeV. Commun. Theor. Phys., 44: 128-132.

Young P G, Stewart L. 1979. LA-7932-MS (ENDF-283). Los Alamos National Laboratory.

Zhang J S, Han Y L, Cao L G. 1999. Model calculation of n+^{12}C reactions from 4.8 to 20MeV. Nucl. Sci. Eng., 133: 218-234.

Zhang J S, et al. 2001a. Theoretical analysis of neutron double-differential cross section of n+^{16}O at 14.1 MeV. Commun. Theor. Phys., 35: 579-584.

Zhang J S. 2001b. Model calculation of n+^{6}Li reactions below 20MeV. Commun. Theor. Phys., 36: 437-442.

Zhang J S, Han Y L. 2002. Calculation of double-differential cross sections of n+^{7}Li reactions below 20MeV. Commun. Theor. Phys., 37: 465-474.

Zhang J S. 2003a. Theoretical analysis of neutron double-differential cross section of n+^{10}B at 14.2MeV. Commun. Theor. Phys., 39: 433-438.

Zhang J S. 2003b. Theoretical analysis of neutron double-differential cross section of n+^{11}B at 14.2 MeV. Commun. Theor. Phys., 39: 83-88.

Zhang J S. 2004. Possibility of ^{5}He emission in neutron induced reactions. Science in China (Ser. G), 47: 137.

第 2 章　轻核反应的动力学机制

2.1　引　　言

核反应理论是为了理解和解释由实验测量得到的核反应行为而建立的模型理论方法, 并逐步发展成描述各种类型反应的多种理论模型. 对不同入射粒子的情况下, 核反应理论模型按不同核反应机制给出相应的理论描述. 根据核反应的出射粒子的情况, 核反应被划分为：

(1) 弹性散射 A(a,a)A, 表示出射粒子与入射粒子相同, 反应 Q 值为 0, 反应前后核子系统的内禀结构不变, 包括入射粒子和靶核, 总动能不变. 弹性散射又分形状弹性散射和复合核弹性散射. 在实验测量过程中是不能区分这两种散射过程的. 而在理论计算中, 这两种弹性散射的角分布形状是彼此有所不同的, 形状弹性散射是用量子力学的 $\boldsymbol{S}$ 矩阵理论来计算, 而复合核弹性散射是用核反应统计理论计算.

(2) 非弹性散射 $\mathrm{A(a,a)A^*}$ 出射粒子与入射粒子相同, 但反应后靶核处于激发态 (用右上角的 * 号表示), 反应 Q 值是负的剩余核 $\mathrm{A^*}$ 之激发能. 在核反应理论中非弹性散射用入射粒子和靶核的内禀结构之变化来描述这种情况.

(3) 重组碰撞 A(a,b)B, 又称核子交换反应. 在这种核反应过程中入射粒子与靶核之间发生了核子交换, 在出射道中产生了新的原子核和粒子, 它们均可能处于激发态. 在核反应理论中是用粒子和靶核的内禀结构在反应前、后的变化来描述这种情况.

(4) 辐射俘获反应 A(a,γ)C, 表示入射粒子进入靶核而形成复合核 $\mathrm{C^*}$, 处于激发态的复合核是直接通过发射 γ 射线级联退激过程来结束核反应. 在核反应理论中是用 γ 退激的各种模式来描述. 例如, 直接 γ 退激, 半直接 γ 退激, 即预平衡 γ 退激, 以及平衡态 γ 退激等. 另外 γ 退激还可区分为 E_1, M_1, E_2 等电磁跃迁模式.

根据入射粒子的情况又可将核反应划分为：① 由中子引起的核反应; ② 由带电粒子引起的核反应; ③ 由光子引起的核反应 (称为光核反应); ④ 由重离子引起的核反应 (称为重离子反应) 等几类.

入射粒子进入靶核后形成处于复杂激发态的复合系统, 由 $\boldsymbol{S}$ 矩阵知识看出, 复合核的本身不是一个本征态, 没有确定的角动量宇称, 是一个由各种角动量宇称按一定规律分布的复合体系, 它们的各种角动量宇称的成分可以由光学模型给出. 因此, 这种角动量和宇称分布的准确性取决于光学模型各类位势的形式和它们的参数的准确性. 而光学模型参数的准确性取决于计算结果对全截面, 弹性散射截面和

角分布, 去弹截面于实验测量数据的符合程度. 符合程度越好, 对整个理论模型计算的结果越可靠. 因此光学模型参数的选取, 包括中子和各种带电粒子的参数选取, 是理论模型计算的重要基础之一.

复合核具有一定的激发能, 在核内核子的无规碰撞过程中, 由于统计规律, 一个核子或核子集团会有一定的概率得到足够能量, 这时该核子或核子集团就可能克服结合能以及库仑位垒被发射出去. 在低能核反应中, 必须将统计涨落一起加以考虑才能得到合理的核反应结果. 随着入射粒子能量的提高, 就会出现与复合核平衡态反应行为不同的现象. 在达到复合核平衡态之前就可能有粒子被发射出去, 称之为粒子的预平衡发射, 也就是所谓的平衡前发射. 目前比较成功的理论方法是应用激子模型来描述预平衡核反应过程. 这种理论模型描述介于直接核反应和复合核平衡态反应之间的非平衡核反应过程.

在复合核模型提出之后, 用于低能核反应取得圆满的成功. 但是, 随着入射粒子能量的提高, 实验测量发现出射中子能谱的高能部分明显高出平衡态发射理论的计算值, 这就是所谓的 "能谱硬尾" 现象. 这表明复合核在较高激发能的状态下, 核子间还没有来得及作充分的碰撞, 在达到统计平衡之前, 一些为入射粒子激发到较高能量的粒子就被发射出来, 这是一种非平衡统计行为. 这种发射粒子的角分布呈现出明显的朝前趋势, 而不是像平衡态核反应理论所预言的各向同性或 90° 对称, 表明有些出射粒子还存在对入射方向的记忆. 另外, 带电粒子的发射截面明显高于平衡态理论的预言值, 这也说明在未达到平衡态之前就有带电粒子发射, 否则复合核内达到平衡态时, 各种粒子均近似达到麦克斯韦分布时, 能克服库仑位垒的概率就会很小, 与实验观测的现象相矛盾. 上述这些物理现象均表明, 复合核内由入射粒子在核内进行的级联碰撞过程达到完全的统计平衡需要一段时间, 其间会有粒子的预平衡发射, 它是用激子模型来描述的. 在激子模型中, 对核内核子间碰撞过程是用粒子–空穴对的产生和湮没来描述核反应的动力学过程. 这种被激发的粒子与空穴被统称为激子. 该模型能够描述介于直接反应和复合核反应之间的非平衡核反应的特征.

由第 1 章描述了轻核反应的特征, 除了粒子的有序发射过程外, 还存在双两体或三体崩裂过程, 属于非有序粒子的发射过程, 这是不同于中重核的核反应行为的主要方面之一. 因而对轻核反应的理论描述具有相当的难度和复杂性. 除了散射和粒子交换反应之外, 对于轻核, 预平衡反应是最主要的核反应机制. 可以想像, 轻核中核子数目很少, 很难像中重核那样经过核内多次碰撞达到平衡态. 另外, 轻核发射粒子后, 剩余核总是处在分立能级上. 因此, 必须建立一个新核反应理论, 使其能够描述这样的核反应行为. 在非平衡状态下从复合核的发射粒子到剩余核的分立能级, 也是原有的核反应理论中尚未解决好的研究课题.

为此, 首先讨论激子态密度以及在激子态密度中的 Pauli 原理修正值的置换

群方法. 由细致平衡原理得到预平衡粒子发射率的表示, 然后介绍统一的 Hauser-Feshbach 和激子模型理论. 这个理论模型是在前人成功描述平衡态的 Hauser-Feshbach 统计理论和描述预平衡核反应过程的激子模型的基础上发展起来的. 这个新理论包含了角动量和宇称守恒的物理条件下, 描述在非平衡状态下粒子发射过程的内容, 由此给出了描述从复合核发射粒子到达剩余核分立能级态这类核反应的功能. 正如第 1 章内所述, 由于在轻核反应中, 剩余核均是处于分立能级态, 而分立能级都具有自己独特的自旋和宇称. 为此, 首先必须在原有的激子模型的基础上, 进一步发展考虑角动量守恒的激子模型. 在本章中还简单介绍了光学模型, 宽度涨落修正, 以及从分立能级发射粒子的公式表示.

2.2 激子态密度和 Pauli 原理修正值的置换群方法

多费米子系统态密度的研究在许多相关领域都得到关注. 特别是对于核反应的预平衡发射过程的计算中, 在一定的激发能情况下, 需要给出具有确定粒子数和空穴数的激子态密度 (Blann, 1975; Griffin, 1996; Cline et al., 1971). 许多作者给出过不含 Pauli 原理的激子态密度 (Ericson, 1960; Dobes et al., 1976) 或者用统计方法近似考虑了 Pauli 原理的激子态密度 (Williams, 1970, 1971). 这种多费米子系统的 Pauli 原理修正的研究也在巨共振的展宽效应和壳模型光学势中也得到了应用 (Hasse, 1985). 图 2.1 给出激发粒子空穴的示意图.

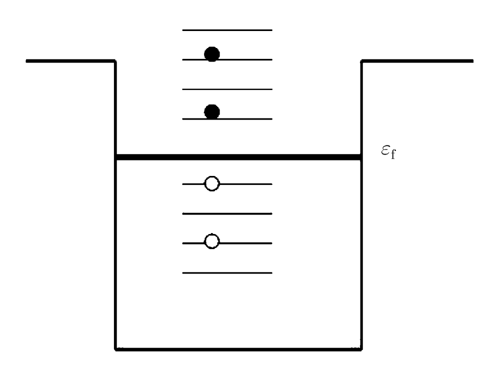


图 2.1 粒子空穴激发示意图

所谓 Pauli 原理是指在同一个微观态中只能容纳一个全同费米子, 这种物理效应将会减少态密度值, 特别是对于低激发能的多粒子和多空穴激子态, Pauli 原理会明显减小激子态密度值. 下面介绍一种可以严格考虑多费米子系统的 Pauli 原理修正的方法, 这种方法与模型无关, 可以推广到任意多费米子系统.

平衡态发射率的末态密度用能级密度表示, 而预平衡发射率的末态密度则用激子态密度表示. 下面讨论这种与模型无关、严格考虑了多费米子系统的 Pauli 原理

修正的方法 (Zhang et al., 1988). 激子态密度定义为对于一定激发能 E, 系统具有 p 个粒子和 h 个空穴的占有概率：

$$\omega(E,p,h)=\sum_{\substack{m_1<\cdots<m_p\\ n_1<\cdots<n_h}}\delta\left(E-\sum_{p=m_1}^{m_p}\varepsilon_p-\sum_{h=n_1}^{n_h}\varepsilon_h\right) \tag{2.2.1}$$

其中 $\varepsilon_p,\varepsilon_h$ 分别为单粒子和单空穴的能量. 由于粒子是在费米面之上, 而空穴是在费米面以下, 能量标记都以靶核的费米面为零点 (见图 2.1), 粒子能量是从费米面向上计算, 而空穴能量是从费米面向下计算. 粒子占据态是用 $m_1<\cdots<m_p$ 表示, 而空穴占据态则是用 $n_1<\cdots<n_h$ 表示. 由于 Pauli 原理, 这些态指标都必须各不相同. 其中 δ 函数是表示能量守恒, 即总激发能是总粒子能量与总空穴能量之和.

这里必须强调指出的是, 在激发核的系统中存在有确定的粒子数和空穴数, 在粒子或空穴之间碰撞引发的产生粒子空穴对或消灭粒子空穴对都不会改变费米面, 而在粒子发射过程中剩余核的费米面才会改变. 因此, 在这里只讨论不包含粒子发射的情况, 对确定粒子数和空穴数的 Pauli 原理修正进行研究.

由独立粒子模型可以得到 p 个粒子、h 个空穴的乘积态波函数, 用 H_i 表示单粒子或单空穴的哈密顿量, 它满足下面的定态 Schrödinger 方程

$$H_i|\mu_1\cdots\mu_p,\nu_1\cdots\nu_h\rangle=\varepsilon_i|\mu_1\cdots\mu_p,\nu_1\cdots\nu_h\rangle,\quad i=p\text{ 或 }h \tag{2.2.2}$$

这里 μ_i 表示粒子态, 而 ν_j 表示空穴态. 因此方程 (2.3.1) 可改写为

$$\omega(E,p,h)=\sum_{\substack{\mu_1<\cdots<\mu_p\\ \nu_1<\cdots<\nu_h}}\langle\mu_1\cdots\mu_p,\nu_1\cdots\nu_h|\delta\left(E-\sum_{\mu=\mu_1}^{\mu_p}H_\mu-\sum_{\nu=\nu_1}^{\nu_h}H_\nu\right)|\mu_1\cdots\mu_p,\nu_1\cdots\nu_h\rangle \tag{2.2.3}$$

利用 Laplace 变换, 可以得到统计物理中的配分函数, 并能将其分解为粒子态配分函数与空穴态配分函数两个独立因子的乘积

$$Z(\beta,p,h)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-E\beta}\omega(E,p,h)\mathrm{d}E=Z(\beta,p)Z(\beta,h) \tag{2.2.4}$$

其中粒子态的配分函数为

$$Z(\beta,p)=\sum_{\mu_1<\cdots<\mu_p}\langle\mu_1\cdots\mu_p|\mathrm{e}^{-\beta\sum\limits_{\mu}H_\mu}|\mu_1\cdots\mu_p\rangle \tag{2.2.5}$$

空穴态配分函数为

$$Z(\beta,h)=\sum_{\nu_1<\cdots<\nu_h}\langle\nu_1\cdots\nu_h|\mathrm{e}^{-\beta\sum\limits_{\nu}H_\nu}|\nu_1\cdots\nu_h\rangle \tag{2.2.6}$$

应该注意到, 以上求和号中的下标中用的都是不等号形式, 它表明由于 Pauli 原理限制, 在一个微观态上不允许有一个以上的核子占据, 因而称其为 “受限制求

和”. 下面介绍的方法是如何将受限制求和改写为无限制求和的途径, 这是严格考虑 Pauli 原理效应的出发点.

将受限制求和改写为无限制求和, 需要逐步进行化简. 下面以粒子态为例, 已知 p 个粒子的排列有 $p!$ 种, 于是有求和可以改写为

$$\sum_{\mu_1<\cdots<\mu_p} = \frac{1}{p!}\sum_{\mu_1\neq\mu_2\neq\cdots\mu_p} \tag{2.2.7}$$

(2.2.7) 式右边表示求和指标各不相同, 但没有能量顺序限制, 仍然属于有限制求和. 再假设一个 μ 能级上仅有一个粒子, 在其配分函数中, 它的矩阵元可以表示为

$$f^{(1)}(\mu) = \langle\mu|\mathrm{e}^{-\beta H_\mu}|\mu\rangle \tag{2.2.8}$$

其中 H_μ 为单粒子哈密顿量. 一个 μ 能级被 $l>1$ 个粒子标记为 $f^{(l)}(\mu)$:

$$f^{(l)}(\mu) = \langle\mu|\mathrm{e}^{-l\beta H_\mu}|\mu\rangle \tag{2.2.9}$$

利用上面的表示, 可将受限制求和改写为无限制求和的形式. 这里必须注意到, 上面的无限制求和中必须保持两个粒子处在不同的态中, 如果两个粒子占据了同一个态, 例如 $l>1$, 就需要将其扣除, 因为它是违反 Pauli 原理的项. 例如, 在二粒子态 $(p=2)$ 的情况下, 需要在无限制求和中扣除两个粒子占据同一个能级的概率, 即

$$\sum_{\mu_1<\mu_2} f(\mu_1)f(\mu_2) = \frac{1}{2!}\left\{\sum_{\mu_1\mu_2} f(\mu_1)f(\mu_2) - \sum_{\mu} f^{(2)}(\mu)\right\} \tag{2.2.10}$$

这种情况可以用置换群中应用的杨图表示, 二粒子态占据方式可用杨图 2.2 所示. 在图中左边图表示两个粒子分别处于不同的态, 而右边的图表示两个粒子是处于同一个态, 是违反 Pauli 原理的项.

而对于三粒子态 $(p=3)$ 的情况, 需要在无限制求和之中扣除两个粒子以及三个粒子占据同一个能级的项. 在无限制求和中可能有 $\mu_1=\mu_2\neq\mu_3$, $\mu_1=\mu_3\neq\mu_2$ 或 $\mu_2=\mu_3\neq\mu_1$ 的项, 因此需要扣除这三种情况的概率. 另外还需要扣除 $\mu_1=\mu_2=\mu_3$, 即 3 个粒子占据同一个能级的概率:

$$\begin{aligned}&\sum_{\mu_1<\mu_2<\mu_3} f(\mu_1)f(\mu_2)f(\mu_3)\\ &=\frac{1}{3!}\left\{\sum_{\mu_1\mu_2\mu_3} f(\mu_1)f(\mu_2)f(\mu_3) - 3\sum_{\mu_1\neq\mu_2} f^{(2)}(\mu_1)f(\mu_2) - \sum_{\mu} f^{(3)}(\mu)\right\}\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

但是, 在这个表示中仍然要求 $\mu_1\neq\mu_2$ 是有限制求和. 如果将第二项写成两粒子态的无限制求, 其中会出现 $\mu_1=\mu_2$ 的情况, 因此还必须补回这项中多扣除的 3 个粒

子占据同一个能级（即 $\mu_1=\mu_2$) 的情况. 所以当有限制求和最终写成完全无限制求和的表示时, (2.2.11) 式变为

$$\begin{aligned}&\sum_{\mu_1<\mu_2<\mu_3} f(\mu_1)f(\mu_2)f(\mu_3)\\&=\frac{1}{3!}\left\{\sum_{\mu_1\mu_2\mu_3} f(\mu_1)f(\mu_2)f(\mu_3)-3\sum_{\mu_1\mu_2} f^{(2)}(\mu_1)f(\mu_2)+2\sum_{\mu} f^{(3)}(\mu)\right\}\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

可以发现其中的规律, 在无限制求和形式下, 全部项可用 p 格杨图表示. 图 2.3 给出 3 个粒子占据方式的杨图.

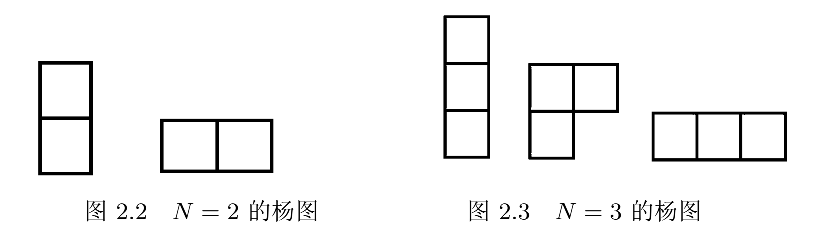


图 2.2　$N=2$ 的杨图　　　　图 2.3　$N=3$ 的杨图

图 2.3 中第一个杨图 $[1,1,1]$ 为三行的杨图, 表示三个能级各有一个粒子, 不违反 Pauli 原理; 第二个杨图 $[2,1]$ 为两行的杨图, 表示有两个粒子占据同一个能级而另一个粒子占据另一个能级; 第三个杨图 $[3]$ 为一行的杨图, 表示三个粒子均占据同一个能级, 它们都违反 Pauli 原理. 杨图标记的方括号中数字的个数表示行数, 每个数字则表示该行的格数.

为了明确分析更复杂的一般情况, 需要将四粒子态 ($p=4$) 的情况做一个详细的介绍. 通过对四粒子态的占据方式, 可以得出一般情况的图像. 四粒子态对应的杨图由图 2.4 给出.

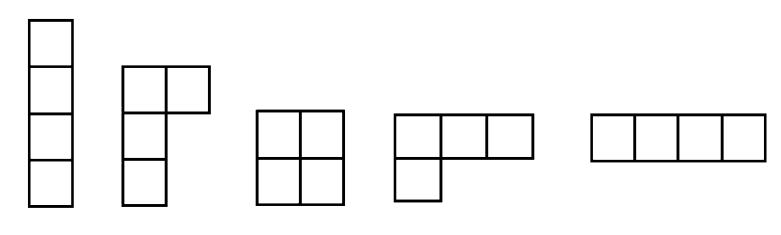


图 2.4　$N=4$ 的杨图

按照置换群中杨图填充的规则, 每一行中数字的填充对各种排列是等价的, 例如, 某一行有三格, 若用数字 $2,3,4$ 来填充, 那么 $[2,3,4]$,$[2,4,3]$, $[3,2,4]$,$[3,4,2]$, $[4,2,3]$, $[4,3,2]$ 六种顺序都算是同一种填充. 另外, 对于两行有相同格数的杨图, 上下行的填充也是等价的, 例如在 $n=4$ 的杨图中, 有一个两行都含两格的图, 上行填充 $[1,2]$ 下行填充 $[3,4]$, 与上行填充 $[3,4]$ 下行填充 $[1,2]$ 也是等价的.

这时在无限制求和之中, 杨图 [2,1,1] 是违反 Pauli 原理的项, 需要扣除这种两个粒子占据同一个能级而另外两个粒子各占据一个不同能级的项, 该杨图有 6 种填充方式, 即在有两格的一行中填充 [12], [13], [14], [23], [24] 和 [34]; 杨图 [2,2] 也是违反 Pauli 原理的项, 也要扣除这种两个粒子共同占据一个能级而另外两个粒子共同占据另一个能级的项, 该杨图有 3 种填充方式, 即 [12], [13], [14]; 还要扣除三个粒子占据同一能级而另外一个粒子占据其他能级的项, 对应的杨图为 [3,1], 它有 4 种填充方式, 即 [123], [124], [134], 和 [234]; 最后还要扣除四个粒子占据同一能级的项, 对应的杨图为 [4], 它只有 1 种填充方式.

这时将有限制求和写成无限制求和的第一步为

$$\begin{aligned}&\sum_{\mu_1<\mu_2<\mu_3<\mu_4} f(\mu_1)f(\mu_2)f(\mu_3)f(\mu_4)\\&=\frac{1}{4!}\left\{\sum_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} f(\mu_1)f(\mu_2)f(\mu_3)f(\mu_4)-6\sum_{\mu_1\neq\mu_2\neq\mu_3} f^{(2)}(\mu_1)f(\mu_2)f(\mu_3)\right.\\&\left.\quad-4\sum_{\mu_1\neq\mu_2} f^{(3)}(\mu_1)f(\mu_2)-3\sum_{\mu_1\neq\mu_2} f^{(2)}(\mu_1)f^{(2)}(\mu_2)-\sum_{\mu} f^{(4)}(\mu)\right\}\end{aligned}\tag{2.2.13}$$

但 (2.2.13) 式中第二、三、四项都违反 Pauli 原理, 它们仍处于有限制求和的形式. (2.2.13) 式中的第二项表示四个粒子中有两个占据同一个能级, 而另外两个粒子各占据其他不同的能级, 从四个粒子中任意取出两个的方式有 6 种, 这时求和指标必须互不相等, 即 $\mu_1\neq\mu_2\neq\mu_3$. 当约化为无限制求和时, 有 4 种可能出现：第一是 $\mu_1=\mu_2\neq\mu_3$, 第二是 $\mu_1=\mu_3\neq\mu_2$, 它们对应的杨图都是 [31], 第三是 $\mu_2=\mu_3\neq\mu_1$, 对应的杨图是 [22], 第四是 $\mu_1=\mu_2=\mu_3$, 它对应的杨图是 [4]. 因此, 这一项可以进一步约化为无限制求和形式, 其结果如下：

$$\begin{aligned}&\sum_{\mu_1\neq\mu_2\neq\mu_3} f^{(2)}(\mu_1)f(\mu_2)f(\mu_3)=\sum_{\mu_1\mu_2\mu_3} f^{(2)}(\mu_1)f(\mu_2)f(\mu_3)\\&\quad-2\sum_{\mu_1\neq\mu_2} f^{(3)}(\mu_1)f(\mu_2)-\sum_{\mu_1\neq\mu_2} f^{(2)}(\mu_1)f^{(2)}(\mu_2)-\sum_{\mu} f^{(4)}(\mu)\end{aligned}\tag{2.2.14}$$

将 (2.2.14) 式代入 (2.2.13) 式得到

$$\begin{aligned}&\sum_{\mu_1<\mu_2<\mu_3<\mu_4} f(\mu_1)f(\mu_2)f(\mu_3)f(\mu_4)\\&=\frac{1}{4!}\left\{\sum_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} f(\mu_1)f(\mu_2)f(\mu_3)f(\mu_4)-6\sum_{\mu_1\mu_2\mu_3} f^{(2)}(\mu_1)f(\mu_2)f(\mu_3)\right.\\&\left.\quad+8\sum_{\mu_1\neq\mu_2} f^{(3)}(\mu_1)f(\mu_2)+3\sum_{\mu_1\neq\mu_2} f^{(2)}(\mu_1)f^{(2)}(\mu_2)+5\sum_{\mu} f^{(4)}(\mu)\right\}\end{aligned}\tag{2.2.15}$$

这时在 (2.2.15) 式中, 前两项已经约化为无限制求和形式, 但后两项仍然是违反 Pauli 原理. (2.2.15) 式中第三项表示四个粒子中有三个占据同一个能级, 从四个粒子中任意取出三个的方式有 4 种, 求和指标必须互不相等. 而约化为无限制求和时, 仅有 1 种可能出现, 即 $\mu_1 = \mu_2$, 于是这一项可以进一步约化为

$$\sum_{\mu_1 \neq \mu_2} f^{(3)}(\mu_1) f(\mu_2) = \sum_{\mu_1 \mu_2} f^{(3)}(\mu_1) f(\mu_2) - \sum_{\mu} f^{(4)}(\mu) \tag{2.2.16}$$

将 (2.2.16) 式代入 (2.4.15) 式得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4} f(\mu_1) f(\mu_2) f(\mu_3) f(\mu_4) \\
&= \frac{1}{4!}\Bigg\{ \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} f(\mu_1) f(\mu_2) f(\mu_3) f(\mu_4) - 6 \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} f^{(2)}(\mu_1) f(\mu_2) f(\mu_3) \\
&\quad + 8 \sum_{\mu_1 \mu_2} f^{(3)}(\mu_1) f(\mu_2) + 3 \sum_{\mu_1 \neq \mu_2} f^{(2)}(\mu_1) f^{(2)}(\mu_2) - 3 \sum_{\mu} f^{(4)}(\mu) \Bigg\}
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

这时在 (2.2.17) 式中, 前三项已经约化为无限制求和形式了, 而第四项仍然是有限制求和. (2.2.17) 式中的第四项表示四个粒子中各有两个粒子占据同一个能级, 对应杨图 $[2,2]$, 它有 3 种填充方式, 求和指标必须互不相等. 当约化为无限制求和时, 仅有 1 种可能出现, 即 $\mu_1 = \mu_2$. 于是, 这一项可以进一步约化为无限制求和的形式:

$$\sum_{\mu_1 \neq \mu_2} f^{(2)}(\mu_1) f^{(2)}(\mu_2) = \sum_{\mu_1 \mu_2} f^{(2)}(\mu_1) f^{(2)}(\mu_2) - \sum_{\mu} f^{(4)}(\mu) \tag{2.2.18}$$

将 (2.3.18) 式代入 (2.3.17) 式得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4} f(\mu_1) f(\mu_2) f(\mu_3) f(\mu_4) \\
&= \frac{1}{4!}\Bigg\{ \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} f(\mu_1) f(\mu_2) f(\mu_3) f(\mu_4) - 6 \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} f^{(2)}(\mu_1) f(\mu_2) f(\mu_3) \\
&\quad + 8 \sum_{\mu_1 \mu_2} f^{(3)}(\mu_1) f(\mu_2) + 3 \sum_{\mu_1 \mu_2} f^{(2)}(\mu_1) f^{(2)}(\mu_2) - 6 \sum_{\mu} f^{(4)}(\mu) \Bigg\}
\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

至此, 已经将四粒子态中有限制求和完全化为无限制求和形式, 从而便于后面的计算.

由上面讨论可以得知, 第一项对应 $L = N$, 即 N 格 N 行的杨图, 在物理上不违反 Pauli 原理, 而其余都是违反 Pauli 原理的, 需要被扣除的项. 这些违反 Pauli 原理的项都是有一个以上的粒子占据同一个能级的项, 它们都可以用对应的杨图来表示.

由上面关于 4 个粒子对应杨图的分析中可以看到, 从有限制求和约化为无限制求和需要一个相当繁杂的过程, 当 N 变得更大时情况会变得异常复杂. 因此, 现在要研究的问题是如何应用置换群的理论方法, 在无限制求和形式下, 直接给出各个相应杨图的系数, 而不需要像上面那样逐步地从有限制求和约化为无限制求和. 下面, 在普遍情况下讨论置换群中的杨图理论方法. 将 N 格 L 行的杨图标记为 $[n_1n_2\cdots n_L]$, 它对应的表示是

$$[n_1n_2\cdots n_L]=\sum_{\mu_1\neq\mu_2\neq\cdots\neq\mu_L}f^{(n_1)}(\mu_1)f^{(n_2)}(\mu_2)\cdots f^{(n_L)}(\mu_L) \tag{2.2.20}$$

这里有

$$\sum_{i=1}^{L}n_i=N \tag{2.2.21}$$

按照杨图的填充规则有 $n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_L$, 即在杨图中格数最多在行放在上面, 而格数最少的行放在最下面. 除了每行都只有一格的杨图 ($L=N$) 表示每一个微观态都只有一个粒子外, 其他的杨图都至少有一行包含两格或更多的格, 表示至少有一个微观态中放置了一个以上的粒子, 它们都是违反 Pauli 原理的对应的项.

在一般情况下, 对于 N 格 L 行的杨图, 可能有若干种表示. 例如, 上面 $N=4$ 格 $L=2$ 行的杨图就有 $[3,1],[2,2]$ 两种. 因此, 在下面的表示中引入指标 α 来表示同一个 L 行的杨图中的第 α 个. 数目更大的 N 格 L 行杨图, 可以有更多的排放形式, 这里就不一一列举了.

在将有限制求和转换成无限制求和的过程中, 将对应 N 格 L 行的第 α 个杨图的系数记为 $D(N,L,\alpha)$, 由置换群理论可知该系数恰好为该杨图置换元填充的个数, 如果用 $\nu_i^\alpha(i=1,2,\cdots,N)$ 表示杨图 (N,L,α) 中含 i 格的行数, 则可以给出它的显式表示 (Hamermesh, 1962):

$$D(N,L,\alpha)=\frac{N!}{\nu_1^\alpha!(2^{\nu_2^\alpha}\nu_2^\alpha!)(3^{\nu_3^\alpha}\nu_3^\alpha!)\cdots(N^{\nu_N^\alpha}\nu_N^\alpha!)} \tag{2.2.22}$$

且有

$$\sum_{i=1}^{N}\nu_i^\alpha=L \tag{2.2.23}$$

以及

$$\sum_{i=1}^{N}i\nu_i^\alpha=N \tag{2.2.24}$$

这里自然默认 $n_i^\alpha=0$ 时 $f^{(0)}(\mu_i)=1$, 这是对应无粒子填充的情况下的表示. 由此

得到 p 粒子的配分函数可以表示为各种杨图的展开表示：

$$Z(\beta,p)=\sum_{L=1}^{p}\sum_{\alpha=1}^{N_L}D(N,L,\alpha)[n_1^\alpha n_2^\alpha\cdots n_L^\alpha] \tag{2.2.25}$$

在实际应用中, 激子模型常常是用等间隔单粒子密度的连续分布积分来代替求和, 这时 l 个粒子占据同一个能级的概率为

$$\sum_{\mu}f^{(l)}(\mu)=\mathrm{tr}(\mathrm{e}^{-l\beta H})=\langle\mu|\mathrm{e}^{-l\beta H}|\mu\rangle=g\int_0^\infty \mathrm{e}^{-l\beta\varepsilon}\mathrm{d}\varepsilon=\frac{g}{l\beta} \tag{2.2.26}$$

其中 tr 表示求迹. 利用逆 Laplace 变换公式：

$$L^{-1}\left(\frac{g}{\beta}\right)^m=g\frac{(gE)^{m-1}}{(m-1)!} \tag{2.2.27}$$

例如, 在 $N=2$ 的情况下,

$$\sum_{\mu_1<\mu_2}f(\mu_1)f(\mu_2)=\frac{1}{2!}\left\{\sum_{\mu_1\mu_2}f(\mu_1)f(\mu_2)-\sum_{\mu}f^{(2)}(\mu)\right\} \tag{2.2.28}$$

对应的配分函数为

$$Z(\beta,2)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{g}{\beta}\right)^2-\frac{g}{2\beta}\right] \tag{2.2.29}$$

由逆 Laplace 变换公式得到两粒子 (或空穴) 态的激子态密度为

$$\omega(E,2)=\frac{g}{2}(gE-0.5) \tag{2.2.30}$$

推广到一般情况, 利用置换群理论的杨图填充规则, 得到 N 粒子激子态密度的表示

$$\omega(E,N)=\frac{g}{N!(N-1)!}\sum_{i=0}^{N-1}C_i(N)(gE)^{N-i-1} \tag{2.2.31}$$

研究表明, L 与 N 奇偶相同的杨图的符号为正, 而 L 与 N 奇偶不同的杨图的符号为负, 这个规律对任何 N 值都成立. 杨图的行数范围是 $L=1\sim N$. 得到 (2.2.31) 中对应的 i 项展开系数为

$$C_i(N)=\sum_{\alpha=1}^{N_\alpha}D(N,L,\alpha)\frac{(-1)^{N-i}(N-1)!}{(N-1-i)!n_1^\alpha n_2^\alpha\cdots n_L^\alpha} \tag{2.2.32}$$

对应杨图的行数为

$$L=N-i \tag{2.2.33}$$

其中 N_α 是 L 行的杨图个数. n_j^α 为 L 行的第 α 个杨图中第 j 行的杨图格数. 在 (2.2.32) 式中分母出现的 n_i^α 值是来自于求迹过程, 因子 $(N-1)!/(N-1-i)!$ 是来自逆 Laplace 变换.

还以 $N=2$ 的情况为例, 这时仅有两个杨图, 分别是 $[1,1]$ 和 $[2]$, 每个杨图仅有一种表示 $\alpha=1$, $N_\alpha=1$. $i=0,1$ 为可取指标, $i=0(L=2)$ 表示在杨图 $[1,1]$ 中, $\nu_1^1=2$, $\nu_2^1=0$, $n_1^1=1$, $n_2^1=1$; 而 $i=1$ ($L=1$) 表示在杨图 $[2]$ 中, $\nu_1^1=0$, $\nu_2^1=1$, $n_1^1=2$, $n_2^1=0$; 于是有 $D(N=2,L=2,1)=1$; $D(N=2,L=1,1)=1$, 进而得到

$$C_0(N=2,L=2)=1,\quad C_1(N=2,L=1)=-0.5$$

因此, 用普遍表示式 (2.2.32) 得到了与上面 (2.2.30) 完全相同的结果.

再以 $N=4$ 为例, 利用 (2.2.22) 式可以计算出与四个杨图相对应的系数分别为

表 2.1　N=4 的情况下, 各杨图有关系数值

杨图	α	ν_1^α	ν_2^α	ν_3^α	ν_4^α	L	$(-1)^{N-L}D$
[1111]	1	4	0	0	0	4	1
[211]	1	2	1	0	0	3	−6
[31]	1	1	0	1	0	2	8
[22]	2	0	2	0	0	2	3
[4]	1	0	0	0	1	1	−6

可以看到, 这里得到的各个杨图的 D 值恰好就是 (2.2.19) 式无限制求和中各项的系数.

这里默认 $i=0$ 时 $C_0(N)=1$, $i=0$ 项对应的是 $L=N$ 行的杨图, 如果不考虑所有违反 Pauli 原理的项, $i=0$ 这一项正是忽略所有 Pauli 原理修正项的激子态密度, 这时 $L=N$, $\alpha=1$ 为唯一的杨图, $\nu_1^1=N$, $\nu_{i>1}^1=0$, 因此 $D(N,N,1)=1$, 这就得到熟知的 Ericson 激子态密度表示：

$$\omega(E,N)=\frac{g(gE)^{N-1}}{N!(N-1)!} \tag{2.2.34}$$

在用上述置换群方法严格考虑 Pauli 不相容原理时, 由 (2.2.31) 式的表示看出, 激子态密度是一个激发能 E 的 $N-1$ 次幂的多项式表示, 有 $N-1$ 个 0 点, (2.2.31) 式给出的随激发能的变化是一个多次通过 0 点的振荡曲线, 只有在大于最大的 0 点后, 曲线才给出以随激发能 E 加大而单调上升的结果. 因而, 在物理上这个多项式最大 0 点对应了 Pauli 原理修正值, 记为 $A(N)$. 应用 (2.2.31) 式对 $N=1\sim6$ 的计算结果由表 2.2 给出

表 2.2　N 粒子 (或空穴) 态 Pauli 原理修正值 $A(N)$

N	1	2	3	4	5	6
$A(N)$	0	0.50	2.46	5.66	9.93	15.22

由于以上是在独立粒子模型基础上得到的结果, 粒子态与空穴态之间没有任何关联. 因此, 对应 $n=p+h$ 激子态的 Pauli 原理修正值应为两者之和：

$$A(n)=A(p)+A(h) \tag{2.2.35}$$

为避免上述多项式的复杂性, 有利于实际应用, 借助于 Ericson 公式的形式, 加入 Pauli 原理修正值, 这时粒子态的激子密度可以表示为

$$\omega(E,p)=\frac{g(gE-A(p))^{p-1}}{(p-1)!p!} \tag{2.2.36}$$

同样空穴态的激子密度可以表示为

$$\omega(E,h)=\frac{g(gE-A(h))^{h-1}}{(h-1)!h!} \tag{2.2.37}$$

这时对激子 $n=p+h$ 的态密度可以由下面的折叠方式给出,

$$\omega(E,n)=\int_{A(h)}^{E-A(p)}\omega(E-\varepsilon,p)\omega(\varepsilon,h)\mathrm{d}\varepsilon \tag{2.2.38}$$

将上述的粒子、空穴的态密度代入, 并引入新变量

$$u=\frac{g\varepsilon-A(h)}{gE-A(n)} \tag{2.2.39}$$

这时积分变为

$$\omega(E,n)=\frac{g(gE-A(n))^{n-1}}{(p-1)!p!(h-1)!h!}\int_0^1(1-u)^{p-1}u^{h-1}\mathrm{d}u \tag{2.2.40}$$

其中对 u 的积分是 B 函数 (王竹溪等, 1965)：

$$\int_0^1(1-u)^{p-1}u^{h-1}\mathrm{d}u=B(p,h)=\frac{(p-1)!(h-1)!}{(p+h-1)!} \tag{2.2.41}$$

由此得到激子态密度的表示为

$$\omega(E,n)=\frac{g(gE-A(n))^{n-1}}{p!h!(n-1)!} \tag{2.2.42}$$

这就是通常应用的激子态密度的 Williams 公式 (Williams, 1971), 但是其中的 Pauli 原理修正值应该用表 2.2 给出的精确值, 而不是文献 (Williams, 1971) 中给出的

Pauli 原理修正值. 对于连续态而言, 在使用 (2.2.42) 式时, E 应该是考虑了对修正后的有效激发能.

为了能看清考虑了 Pauli 原理修正后会对激子态密度大小的影响程度, 在表 2.3 中给出了一些激发能的情况下, 不同激子态密度的变化情况. 表中给出的是不考虑 Pauli 原理的 Ericson 公式与考虑了 Pauli 原理的 Williams 公式计算值之比. 对于中子引发的核反应粒子数与空穴数的关系是 $p = h + 1$. 对于轻核而言, 单粒子能级密度近似用 $g \approx 1$ 值. 在表 2.3 中的空格表示不能存在这种激子态, 因为这时 Pauli 原理的修正值大于 gE 值. 由此可见, 越高的激子态中 Pauli 原理的效应就越强, 而随着与 gE 值的增加, Pauli 原理的效应就越弱. 因此在低激发能的高激子态的情况下, 不考虑 Pauli 原理的结果会大大失真, 因为这时 Pauli 原理在激子态密度中起相当关键的作用.

表 2.3 在不同激子态 n 不同激发能的情况下, 不考虑与考虑 Pauli 原理激子态密度之比

	$n=3$	$n=5$	$n=7$	$n=9$
E/MeV	$A=0.5$	$A=2.96$	$A=8.12$	$A=15.59$
5	1.235	36.09		
10	1.108	4.071	22649	
15	1.070	2.409	107.4	
20	1.052	1.898	22.77	178984
25	1.041	1.655	10.55	2482.0
30	1.034	1.515	6.644	352.9

由于这种置换群方法求解 Pauli 原理修正值的方法与模型无关. 上面在激子态中用了等间隔的单粒子密度, 给出了求解激子态密度和严格的 Pauli 原理修正值的方法.

在核反应统计理论中常用能级密度来描述在有效激发能为 E 时形成激发核系统概率的大小. 因此, 激子态密度的物理意义在于, 对所有可能的激子态密度求和后应该得到能级密度表示 (Zhang, 1991).

上面给出了用置换群方法给出等间隔的单粒子密度的情况下激子态密度表示和严格考虑 Pauli 原理修正值的途径. 作为这种方法的应用, 对一些非等间隔的单粒子密度的情况, 也对激子态密度和 Pauli 原理修正值的情况影响做过探讨 (Zhang, 1992). 下面以谐振子为例, 讨论在非均匀单粒子能级密度的情况下, 对激子态密度和 Pauli 原理修正值的影响. 谐振子单粒子的哈密顿量为

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 \tag{2.2.43}$$

其中 μ 式约化质量, ω 式谐振子的振动角频率. 在量子力学中, 谐振子势阱中的能级是等间隔的分立能级. 而在下面是用半经典方式讨论激子态密度的问题. 在半经典情况下,l 个粒子占据同一个能级的求迹结果为 (Ring et al., 1980).

对于粒子态：

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\mathrm{e}^{-lH\beta})_p &= \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\int_{H>\varepsilon_\mathrm{F}} \mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{e}^{-l\beta(H-\varepsilon_\mathrm{F})} \\ &= \frac{1}{(\hbar\omega)^3}\left[\frac{\varepsilon_\mathrm{F}^2}{l\beta}+\frac{2\varepsilon_\mathrm{F}}{(l\beta)^2}+\frac{2}{(l\beta)^3}\right]\end{aligned} \tag{2.2.44}$$

对于空穴态：

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\mathrm{e}^{-lH\beta})_h &= \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\int_{H\leqslant\varepsilon_\mathrm{F}} \mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{e}^{-l\beta(H-\varepsilon_\mathrm{F})} \\ &= \frac{1}{(\hbar\omega)^3}\left[\frac{\varepsilon_\mathrm{F}^2}{l\beta}-\frac{2\varepsilon_\mathrm{F}}{(l\beta)^2}+\frac{2}{(l\beta)^3}(1-\mathrm{e}^{-l\beta\varepsilon_\mathrm{F}})\right]\end{aligned} \tag{2.2.45}$$

这里 ε_F 是费米能. 利用逆 Laplace 变换, 可以得到粒子和空穴的单粒子能级密度分别为

$$g_{1p}(\varepsilon) = \frac{(\varepsilon_\mathrm{F}+\varepsilon)^2}{(\hbar\omega)^3} \tag{2.2.46}$$

$$g_{1h}(\varepsilon) = \frac{(\varepsilon_\mathrm{F}-\varepsilon)^2}{(\hbar\omega)^3}\varTheta(\varepsilon_\mathrm{F}-\varepsilon) \tag{2.2.47}$$

这里粒子和空穴的激发能分别由费米面向上和向下计算, 其中

$$\varTheta(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x\leqslant 0 \end{cases} \tag{2.2.48}$$

是阶梯函数. 很明显, 在半经典近似下单粒子的能级密度是不均匀的. 在费米面附近单粒子能级密度为

$$g = \frac{\varepsilon_\mathrm{F}^2}{(\hbar\omega)^3} \tag{2.2.49}$$

将 g 代入 (2.2.44) 和 (2.2.45) 式, 这时单粒子态和单空穴态的求迹结果变为 (Zhang, 1992)

$$\mathrm{tr}(\mathrm{e}^{-lH\beta})_p = \frac{g}{l\beta}+\frac{2}{(g\varepsilon_\mathrm{F})}\left(\frac{g}{l\beta}\right)^2+\frac{2}{(g\varepsilon_\mathrm{F})^2}\left(\frac{g}{l\beta}\right)^3 \tag{2.2.50}$$

和

$$\mathrm{tr}(\mathrm{e}^{-lH\beta})_h = \frac{g}{l\beta}-\frac{2}{(g\varepsilon_\mathrm{F})}\left(\frac{g}{l\beta}\right)^2+\frac{2}{(g\varepsilon_\mathrm{F})^2}\left(\frac{g}{l\beta}\right)^3(1-\mathrm{e}^{-l\beta\varepsilon_\mathrm{F}}) \tag{2.2.51}$$

首先考虑两粒子态的情况, 由上述置换群方法可以得到两粒子态密度的配分函数：

$$Z_p(2) = \frac{1}{2}\left[\frac{g}{\beta}+\frac{2}{(g\varepsilon_\mathrm{F})}\left(\frac{g}{\beta}\right)^2+\frac{2}{(g\varepsilon_\mathrm{F})^2}\left(\frac{g}{\beta}\right)^3\right]^2$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{g}{2\beta}+\frac{2}{(g\varepsilon_{\mathrm{F}})}\left(\frac{g}{2\beta}\right)^2+\frac{2}{(g\varepsilon_{\mathrm{F}})^2}\left(\frac{g}{2\beta}\right)^3\right] \tag{2.2.52}$$

展开后, 利用逆拉普拉斯变换的 (2.2.27) 式可得到两粒子激子态密度的表示为

$$\begin{aligned}\omega_{\mathrm{HOP}}(2,0,E)=&-\frac{g}{4}+\frac{g}{2}\left(1-\frac{1}{2g\varepsilon_{\mathrm{F}}}\right)(gE)+\frac{g}{g\varepsilon_{\mathrm{F}}}\left(1-\frac{1}{16g\varepsilon_{\mathrm{F}}}\right)(gE)^2\\&+\frac{2g}{3(g\varepsilon_{\mathrm{F}})^2}(gE)^3+\frac{g}{6(g\varepsilon_{\mathrm{F}})^3}(gE)^4+\frac{g}{60(g\varepsilon_{\mathrm{F}})^4}(gE)^5\end{aligned} \tag{2.2.53}$$

对于两空穴态的情况, 由于在谐振子势阱中的情况与粒子态的情况不同, 这可以由 (2.2.46) 与 (2.2.47) 式的区别看出. 由置换群方法可以给出两空穴态密度的配分函数：

$$\begin{aligned}Z_h(2)=&\frac{1}{2}\left[\frac{g}{\beta}-\frac{2}{(g\varepsilon_{\mathrm{F}})}\left(\frac{g}{\beta}\right)^2+\frac{2}{(g\varepsilon_{\mathrm{F}})^2}\left(\frac{g}{\beta}\right)^3(1-\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_{\mathrm{F}}})\right]^2\\&-\frac{1}{2}\left[\frac{g}{2\beta}-\frac{2}{(g\varepsilon_{\mathrm{F}})}\left(\frac{g}{2\beta}\right)^2+\frac{2}{(g\varepsilon_{\mathrm{F}})^2}\left(\frac{g}{2\beta}\right)^3(1-\mathrm{e}^{-2\beta\varepsilon_{\mathrm{F}}})\right]\end{aligned} \tag{2.2.54}$$

将 (2.2.54) 式展开后, 利用逆拉普拉斯变换的解析表示

$$L^{-1}\left[\left(\frac{g}{\beta}\right)^K\mathrm{e}^{-l\beta\varepsilon_{\mathrm{F}}}\right]=\frac{g(gE-gl\varepsilon_{\mathrm{F}})^{K-1}}{(K-1)!}\Theta(E-l\varepsilon_{\mathrm{F}}) \tag{2.2.55}$$

得到两空穴激子态密度的表示为

$$\begin{aligned}\omega_{\mathrm{HOP}}(0,2,E)=&-\frac{g}{4}+\frac{g}{2}\left(1+\frac{1}{2g\varepsilon_{\mathrm{F}}}\right)(gE)\\&-\frac{g(gE)^2}{16(g\varepsilon_{\mathrm{F}})^2}\left[(1+16g\varepsilon_{\mathrm{F}})-\left(1-\frac{2\varepsilon_{\mathrm{F}}}{E}\right)^2\Theta(E-2\varepsilon_{\mathrm{F}})\right]\\&+\frac{g(gE)^3}{3(g\varepsilon_{\mathrm{F}})^2}\left[2-\left(1-\frac{2\varepsilon_{\mathrm{F}}}{E}\right)^3\Theta(E-\varepsilon_{\mathrm{F}})\right]\\&-\frac{g(gE)^4}{6(g\varepsilon_{\mathrm{F}})^3}\left[1-\left(1-\frac{\varepsilon_{\mathrm{F}}}{E}\right)^4\Theta(E-\varepsilon_{\mathrm{F}})\right]\\&+\frac{g(gE)^5}{60(g\varepsilon_{\mathrm{F}})^4}\left[1-2\left(1-\frac{\varepsilon_{\mathrm{F}}}{E}\right)^5\Theta(E-\varepsilon_{\mathrm{F}})\right.\\&\left.+\left(1-\frac{2\varepsilon_{\mathrm{F}}}{E}\right)^5\Theta(E-2\varepsilon_{\mathrm{F}})\right]\end{aligned} \tag{2.2.56}$$

可以看出, 粒子态 (2.2.53) 和空穴态 (2.2.56) 的密度彼此不同, 这是非均匀单粒子能级密度的效应. 显然, 当费米能量 ε_{F} 趋向无穷大时, 无论粒子态和空穴态的公式都退化为

$$\omega_{\mathrm{HOP}}(2,0,E)=\omega_{\mathrm{HOP}}(0,2,E)=\frac{g}{2}\left(gE-\frac{1}{2}\right) \tag{2.2.57}$$

与等间隔单粒子能级密度的结果一致. 由此可见, 等间隔单粒子能级密度近似的成立条件是费米能足够大. 这就是为什么在激子模型计算中, 费米能取 30MeV 甚至 35MeV 的原因.

而严格的谐振子势阱中粒子态和空穴态的 Pauli 原理修正值需要对多项式 (2.2.53) 和 (2.2.56) 解出最大 0 点来得到, 这会与 (2.2.57) 式给出的结果有一定的区别, 但是随费米能的加大这种差别变得越小. 这就是非等间隔单粒子能级密度对 Pauli 原理修正值的修正. 由于上面仍然应用了独立粒子模式, 因此可以分别求出粒子态和空穴态严格的 Pauli 原理修正值 $A(p)$ 和 $A(h)$. 总的 Pauli 原理修正值则为两者之和.

以上是应用置换群方法求解激子态密度和严格考虑 Pauli 原理修正值的一个实例. 这种方法也可以用于动量空间的均匀分布的费米气体球的情况, 在半经典近似下, 单粒子能级密度仍然为非均匀分布, 研究结果参见 (Zhang, 1992). 总之, 求解任意单粒子能级密度情况下的激子态密度和 Pauli 原理修正值, 置换群方法提供了求解途径.

2.3 光学模型简介

光学模型在核反应研究中是一个非常有用的模型理论, 它是计算核反应全截面、弹性散射截面、吸收截面以及弹性散射角分布的有力工具. 也是确定上述截面中各种角动量宇称分布概率的理论工具.

当一个入射粒子轰击靶核时, 粒子可以被靶核的势场所散射, 也可以被靶核吸收, 这就如同光穿过半透明介质那样, 部分被散射, 部分被介质吸收. 因此在核反应理论中把这种只考虑散射和吸收的模型称之为光学模型.

光学模型又可以分为唯象光学模型和微观光学模型两类. 前者是用一个由经验给出的光学势, 其中带有若干模型参数, 通过对光学模型参数的调解可使得计算结果与实验数据达到最佳符合, 因此实用性较强. 唯象光学模型又分球形核光学模型和耦合道光学模型. 在球形核光学模型中假定核是球形的, 而考虑了核的非球形后, 靶核角动量不再是 0, 由此可以将集体运动激发态 (如转动带和振动带) 耦合起来 (Tamura, 1965), 耦合道光学模型不仅可以计算形状弹性散射, 还可以同时计算出直接非弹性散射贡献. 而微观光学模型则由比较严格的多体理论方法给出光学势, 它具有一定的理论基础, 但是目前还无法做到与实验数据达到满意的符合, 无论从计算可行程度和使用范围来讲都有较大的局限性.

这里主要简介唯象光学模型. 唯象光学模型中的光学势已经有相当多的成果

(申庆彪, 2005). 利用量子力学中的分波法求解. 众所周知, Schrödinger 方程的 l 分波径向方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)R_l\left(r\right)+\left[k^2-\frac{l\left(l+1\right)}{r^2}\right]R_l\left(r\right)=U\left(r\right)R_l\left(r\right) \tag{2.3.1}$$

这里 $R_l(r)$ 是 l 分波径向波函数, $U(r)=2\mu/\hbar^2\cdot V(r)$, $V(r)$ 是光学势, $\boldsymbol{k}$ 是波矢, 量纲为 fm^{-1}. 由于光学模型需要同时描述散射和吸收过程, 光学势必须为复数, 这时对应的相移为复相移 δ_{jl}, 它与 $\boldsymbol{S}$ 矩阵元之间的关系为

$$S_{jl}=\exp(2\mathrm{i}\delta_{jl}) \tag{2.3.2}$$

对于入射粒子的自旋为 1/2, 由于自旋与轨道角动量的耦合, 散射粒子的总角动量可以为 $j=l\pm1/2$. 其推导过程需要参见有关量子力学的内容, 这里不再详述. 在有自旋轨道相互作用势时, 自旋为 1/2 的粒子经过势场散射后, 所对应的 $\boldsymbol{S}$ 矩阵元为 S_{jl}. 而光学模型的求解就是要计算矩阵元 S_{jl} 之值. 从而得到弹性散射截面的表示是

$$\sigma_{\mathrm{el}}=\frac{\pi}{(2s+1)k^2}\sum_{jl}(2j+1)|1-S_{jl}|^2 \tag{2.3.3}$$

而吸收截面的表示是

$$\sigma_a=\frac{\pi}{(2s+1)k^2}\sum_{jl}(2j+1)(1-|S_{jl}|^2) \tag{2.3.4}$$

因此, 全截面为

$$\sigma_{\mathrm{tot}}=\sigma_{\mathrm{el}}+\sigma_a=\frac{2\pi}{(2s+1)k^2}\sum_{jl}(2j+1)(1-\mathrm{Re}S_{jl}) \tag{2.3.5}$$

粒子与靶核的相互作用需要用复数势 (即光学势) 来描述. 光学模型可以同时描述粒子被靶核吸收和散射的过程, 这是目前核数据计算的通用手段.

如果考虑到入射粒子的自旋轨道耦合势时, 这时波函数可表示为

$$\psi=\psi_{jlm}=\sum_{m_lm_s}C_{lm_lsm_s}^{\ \ jm}R_{jl}(r)Y_{lm_l}(\Omega)\chi_{m_s}^s \tag{2.3.6}$$

这里 $C_{lm_lsm_s}^{\ \ jm}$ 为 Clebsh-Gordon 系数. $R_{jl}(r)$ 是 Schrödinger 方程的径向波函数, $Y_{lm_l}(\Omega)$ 为球谐函数, $\chi_{m_s}^s$ 是自旋波函数. 目前最通用的是球形光学模型, 其中假定靶核是球形的, 自旋为 0. 如果需要考虑靶核的自旋和形变, 则必须作耦合道光学模型计算.

自旋轨道耦合相互作用 $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}$ 对波函数的作用时, 可以表示为

$$2\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}\psi_{jlm}=[\boldsymbol{J}^2-\boldsymbol{L}^2-\boldsymbol{S}^2]\psi_{jlm}=[j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)]\psi_{jlm} \tag{2.3.7}$$

对于自旋为 s 的一般情况, 径向波函数解的角动量 j 的取值范围是

$$|l-s|\leqslant j\leqslant l+s \tag{2.3.8}$$

光学模型势的一般表示形式可以写为

$$V(r)=V_c+2V_{LS}(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}) \tag{2.3.9}$$

这里 $V_c(r)$ 是复数中心势, $V_{LS}(r)$ 是自旋轨道耦合势. 对径向波函数做如下变换

$$R_{jl}(r)=\frac{1}{r}u_{jl}(r) \tag{2.3.10}$$

令

$$k^2=\frac{2\mu}{\hbar^2}E$$

以及

$$\rho=kr \tag{2.3.11}$$

时, 径向方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2u_{jl}}{\mathrm{d}\rho^2}+\left\{1-\frac{V_c}{E}-\frac{V_{LS}}{E}[j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)]-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right\}u_{jl}=0 \tag{2.3.12}$$

边界条件为 $u_{jl}(0)=0$. 考虑到库仑场时, 它的渐近表示为

$$u_{jl}(\rho\to\infty)=F_l(\rho)+\mathrm{i}G_l(\rho)+S_{jl}[F_l(\rho)-\mathrm{i}G_l(\rho)] \tag{2.3.13}$$

这里 $F_l(\rho)$,$G_l(\rho)$ 分别为正则与非正则库仑波函数.

当 ρ 足够大时, 核势 $V_c(r)$ 和 $V_{LS}(r)$ 都变为 0, 仅余下库伦势, 这里称为外区, $u_{jl}(\rho)$ 可以取其渐近表达式. 对于核势中不可忽略的内区, 可由 $\rho=0$ 开始数值求解, 直到连接点处, 所谓连接点是指核势可开始被认为消失点. 将内区和外区 $u_{jl}(\rho)$ 在连接点的值作光滑连接, 就可以求解得到 $\boldsymbol{S}$ 矩阵元. 若连接点选在 $\rho=\rho_0$ 处, 要求它的对数导数光滑连接:

$$\frac{1}{u_{jl}}\frac{\mathrm{d}u_{jl}}{\mathrm{d}r}\equiv\gamma_{jl}(k)=\frac{F_l'+\mathrm{i}G_l'+S_{jl}[F_l'-\mathrm{i}G_l']}{F_l+\mathrm{i}G_l+S_{jl}[F_l-\mathrm{i}G_l]} \tag{2.3.14}$$

由此解出 $\boldsymbol{S}$ 矩阵:

$$S_{jl}=\frac{-F_l'-\mathrm{i}G_l'+\gamma_{jl}[F_l+\mathrm{i}G_l]}{F_l'-\mathrm{i}G_l'-\gamma_{jl}[F_l-\mathrm{i}G_l]} \tag{2.3.15}$$

在核反应统计理论的计算中经常用到穿透因子, 其定义为

$$T_{lj} = 1 - |S_{jl}|^2 \tag{2.3.16}$$

求径向方程数值解的是用 Numerov 方法 (Numerov, 1924; Melkanoff et al., 1966). 对于带电粒子的考虑波函数是采用连分式方法 (Barnett, 1974).

下面给出唯象光学势的表示. 通常采用 Woods-Saxon 势的形式, 它包括以下几个部分.

(1) 实部势:

$$V_r(r) = \frac{-V_r(\varepsilon)}{1+\exp[(r-R_r)/a_r]} \tag{2.3.17}$$

(2) 虚部表面吸收势:

$$W_s(r) = -4W_s(\varepsilon)\frac{\exp[(r-R_s)/a_s]}{(1+\exp[(r-R_s)/a_s])^2} \tag{2.3.18}$$

(3) 虚部体吸收势:

$$W_v(r) = \frac{-U_v(\varepsilon)}{1+\exp[(r-R_v)/a_v]} \tag{2.3.19}$$

(4) 自旋轨道耦合势:

$$V_{LS}(r) = -\frac{2V_{LS}}{a_{LS}r}\frac{\exp[(r-R_{LS})/a_{LS}]}{(1+\exp[(r-R_{LS})/a_{LS}])^2} \tag{2.3.20}$$

(5) 库仑势:

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{Z_b Z\mathrm{e}^2}{2R}\left(3-\dfrac{r^2}{R_\mathrm{C}^2}\right), & \text{当 } r \leqslant R \\ \dfrac{Z_b Z\mathrm{e}^2}{r}, & \text{当 } r > R \end{cases} \tag{2.3.21}$$

这里 Z 和 Z_b 分别表示靶核和入射粒子 b 的电荷数,ε 是在实验室系中的相对运动能量. 下面的公式中 A 表示靶核的质量数. 因此对入射粒子 b 总的光学势为一个复势, 它的表示为

$$V_b(r) = V_r(r) + \mathrm{i}[W_s(r) + W_v(r)] + 2V_{LS}(r)\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S} + V_\mathrm{C}(r) \tag{2.3.22}$$

各种光学势深度对能量和 Z, A 的依赖关系通常取为

实部势

$$V_r(\varepsilon) = V_0 + V_1\cdot\varepsilon + V_2\cdot\varepsilon^2 + V_3\cdot(A-2Z)/A + V_4(Z/A^{1/3}) \tag{2.3.23}$$

虚部表面吸收势：

$$W_s(\varepsilon) = \max\{0, W_0 + W_1 \cdot \varepsilon + W_2 \cdot (A - 2Z)/A\} \tag{2.3.24}$$

对虚部体吸收势：

$$U_v(\varepsilon) = \max\{0, U_0 + U_1 \cdot \varepsilon + U_2 \cdot \varepsilon^2\} \tag{2.3.25}$$

以上各式中的各种半径值可以表示为

$$R_i = r_i \cdot A^{1/3}, \quad i = r, s, v, LS, C \tag{2.3.26}$$

对于质子入射情况, 虚部弥散宽度的表示形式为

$$a_s = a_{s0} + a_{s1}\frac{A - 2Z}{A}, \quad a_v = a_{v0} + a_{v1}\frac{A - 2Z}{A} \tag{2.3.27}$$

而对于其他粒子入射情况, 弥散宽度与靶核质量数和电荷数无关. 因此, 在上面的普适唯象光学势中, 有 12 个势深度参数, 5 个半径参数 $r_i(i = r, s, v, LS, C)$, 4 个弥散宽度参数 (对质子是 6 个). 通过调节这些光学势参数, 一般能够使得全截面、吸收截面、弹性散射截面和弹性散射角分布的理论计算值与实验数据达到最佳符合. 目前已有功能齐全比较实用的光学势参数调参程序 APMN06(Shen, 待发表; Cai, 2006).

由第 1 章给出的开放反应道的分析可以看出, 除了中子外, 对于不同的轻核, 需要不同的带电粒子的光学势. 作为实例, 由表 2.4 给出 ^{10}B 的光学势参数. 其中考虑了 ^{5}He 的发射. 特别需要指出的是, 在 n +^{10}B→^{6}Li+^{5}He 的核反应过程中, 由于 ^{5}He 是不稳定核, 在核结构上是一个中子围绕着一个 α 粒子集团运动, 因此会有类似于中子晕的结构. 另外 ^{6}Li 也是一个集团结构比较强的核素, 具有比较大的变形. 因此, ^{5}He 发射的反应道中的光学势中的弥散宽度要比其他粒子的数值要明显大, 达到了 1.5fm 以上. 这个结果与目前在晕核结构研究领域的结论很类似 (Newton et al., 2004), 即晕核的弥散宽度要比通常的稳定核的要明显大.

表 2.4　在 n +^{10}B 反应中的光学势参数

	n	p	α	^{5}He	d	t
a_r	0.7136	0.5268	0.365	1.520	0.7548	0.890
a_s	0.2438	0.5271	0.265	1.580	0.8800	0.920
a_v	0.4554	0.5271	0.165	1.580	0.7800	0.970
a_{so}	0.7136	0.5268	0.565	1.520	0.9100	0.890
r_r	1.1934	1.2191	1.450	1.200	1.0155	1.370
r_s	0.7985	1.1153	1.350	0.900	1.3132	1.400
r_v	1.7216	1.0281	1.450	0.900	1.6377	1.400
r_{so}	1.1934	1.2500	1.450	1.200	1.6400	1.370
r_c	1.250	1.5000	1.200	1.300	1.0500	1.300
U_0	−1.537	−2.709	0.000	0.000	3.6999	0.000

续表

	n	p	α	^{5}He	d	t
U_1	0.4545	0.3085	0.000	0.000	0.30032	0.000
U_2	0.0062	−0.0065	0.000	0.000	0.15999	0.000
V_0	62.457	53.959	133.0	101.9	150.76	165.0
V_1	−0.896	−0.3194	−0.30	−0.500	−0.5892	−0.170
V_2	−0.0066	−0.0005	0.001	0.000	−0.13748	0.000
V_3	−24.00	24.00	0.000	0.000	0.03094	−6.400
V_4	0.000	0.400	0.000	0.000	0.01472	0.000
V_{so}	6.200	6.200	0.000	2.500	7.00	2.500
W_0	8.068	16.99	15.00	4.000	17.64150	8.000
W_1	−0.153	−0.0582	−0.250	−0.150	−0.17434	−0.030
W_2	−12.00	12.00	0.000	0.000	0.00021	0.000
a_{2s}		0.700				
a_{2V}		0.700				

对于轻核的光学模型, 还有普适唯象光学势表示的形式 (Delaroche et al., 1989; Koning et al., 2003). 使用的结果表明, 用普适的光学势, 不如用逐核调解的光学势计算的结果符合有关的实验测量数据那样好.

2.4 细致平衡原理和粒子发射率

核反应动力学研究核子或多核子组成的复杂粒子与靶核之间的吸收和发射的核反应过程. 粒子的吸收截面可以用光学模型计算, 而确定粒子发射概率的出发点是细致平衡原理. 细致平衡原理的基本思想是微观态在每两个相格之间的来往概率是相同的, 这对平衡态和非平衡态核反应过程都普遍成立. 相空间是由动量和坐标所构成的六维空间, 每个相格体积为 $(2\pi\hbar)^3$. 由量子力学跃迁概率的黄金规则出发, 粒子的跃迁速率由下面公式给出

$$W = \frac{\pi}{\hbar}|\langle f|\theta|i\rangle|^2\rho_f \tag{2.4.1}$$

其中 θ 为一个确定的力学量, 通过这个力学量的作用产生微观态的跃迁, 从初态 $|i\rangle$ 到末态 $|f\rangle$ 的跃迁矩阵元 $\langle f|\theta|i\rangle$ 就是跃迁概率振幅, 跃迁概率则由跃迁概率振幅模的方给出. ρ_f 为末态占据概率密度. 细致平衡原理的数学公式为

$$\langle f|\theta|i\rangle = \langle i|\theta|f\rangle \tag{2.4.2}$$

它表示两个微观态之间跃迁的可逆性, 来源于微观过程的时间反演不变性和宇称守恒两条基本规律.

对于粒子的发射而言, 其逆过程为粒子的吸收. 对于预平衡发射过程, 如果粒子发射的母核处于 (p,h) 激子态, 由细致平衡原理可以得到粒子的吸收概率与初态占据概率密度之比等于粒子的发射概率与末态占据概率密度之比, 即

$$\frac{W_{吸收}}{\omega(p,h)}=\frac{W_{发射}}{\omega(p-1,h)\rho_1} \tag{2.4.3}$$

ρ_1 为发射粒子末态概率, 它可用相空间体积确定.

对于发射粒子的能量在 $\varepsilon\to\varepsilon+\mathrm{d}\varepsilon$ 而言, 从费米气体模型可以得到其相空间体积为

$$4\pi p^2\mathrm{d}pV=2\pi p\mathrm{d}p^2V=2\pi p2\mu\mathrm{d}\varepsilon V \tag{2.4.4}$$

μ 为发射粒子与相应余核的约化质量, V 是发射粒子在坐标空间的体积. 还需要指出的是, 对于自旋为 S(总是半整数) 的费米子, 每个相格可以容纳 $(2S+1)$ 个核子. 另外, 两个同位旋不同的费米子也可以占据同一个微观态. 这是因为 Pauli 原理是指一个微观态不能同时容纳两个自旋与同位旋都完全相同的两个费米子. 这时发射粒子的末态概率为

$$\rho_1=\frac{2\pi p\mathrm{d}\varepsilon V}{(2\pi\hbar)^3}(2S+1)2\mu \tag{2.4.5}$$

$W_{吸收}$ 为逆过程的吸收率. 而粒子的吸收概率正比于粒子速度和单位体积内每个靶核的吸收截面的乘积, 即

$$W_{吸收}=\frac{\sigma_{\rm in}(\varepsilon)}{V}v \tag{2.4.6}$$

这里 $\sigma_{\rm in}$ 为逆过程吸收截面, 或称为逆截面, v 为粒子速度. 将 (2.4.5) 和 (2.4.6) 式代入 (2.4.3) 式, 就得到预平衡发射过程中粒子发射率的表示：

$$W_{发射}=\frac{\sigma_{\rm in}v}{V}\frac{\omega(p-1,h)}{\omega(p,h)}\frac{4\pi p\mu V}{(2\pi\hbar)^3}(2S+1)\mathrm{d}\varepsilon \tag{2.4.7}$$

其中 $\omega(p,h)$ 是激子态密度. 将速度、动量转换为能量. 预平衡发射过程中粒子的谱发射率为 $T(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=W_{发射}$, 于是有

$$T(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=\frac{2S+1}{\pi^2\hbar^3}\mu\sigma_{\rm in}(\varepsilon)\varepsilon\frac{\omega(p-1,h)}{\omega(p,h)}\mathrm{d}\varepsilon \tag{2.4.8}$$

如果再考虑到发射的角度因素, 就得到粒子的能量、角度双微分发射率：

$$T(\varepsilon,\Omega)\mathrm{d}\varepsilon\mathrm{d}\Omega=\frac{2S+1}{4\pi^3\hbar^3}\mu\sigma_{\rm in}(\varepsilon)\varepsilon\frac{\omega(p-1,h)}{\omega(p,h)}\mathrm{d}\varepsilon\mathrm{d}\Omega \tag{2.4.9}$$

这里 $T(\varepsilon)$ 的量纲为 s^{-1}.

由此可见, 细致平衡原理是核反应统计理论中确定粒子发射率公式表示的理论根据. 而且与粒子发射机制无关, 既可以是平衡态发射, 也可以是预平衡态发射. 由细致平衡原理的出发点来看, 表示两个微观态之间跃迁的可逆性.

从统计理论的角度来看, 对于多自由度系统耗散过程是不可逆的. 也就是说, 即或是相同粒子的吸收和其发射的过程是不可逆的. 同样, 裂变和聚变彼此间也是不可逆过程, 两者都存在熵的增加的过程. 任何事物都具有双重性, 具体表现为宏观系统中耗散过程的不可逆性和微观单相格间的细致平衡的可逆性, 这就是事物对立面的统一点.

由于在轻核反应中, 末态都是处于分立能级状态, 这里分别记 E_k, I_k 和 π_k 为剩余核分立能级的能量和自旋宇称, 其中下标 k 表示能级序号. 因此末态能级密度是与激子数无关的分立能级

$$\rho^{I\pi}(E) = \sum_k \delta_{II_k}\delta_{\pi\pi_k}\delta(E - E_k) \tag{2.4.10}$$

这时末态角动量和宇称都处于确定的状态, 即 $I = I_k$, $\pi = \pi_k$. 利用这个 δ 形式, 对末态能量积分, 由此得到在 J, π 道, 从复合核的预平衡态发射到剩余核分立能级的发射率

$$T(E^*, \varepsilon, p, h) = \frac{2s+1}{\pi^2\hbar^3}\mu\sigma_{\text{in}}(\varepsilon)\varepsilon\frac{1}{\omega(E^*, p, h)} \tag{2.4.11}$$

这里 s 是出射粒子自旋. 注意到

$$\mu\varepsilon = p^2/2 = \hbar^2k^2/2 \tag{2.4.12}$$

其中 k 为波矢, (2.4.11) 式就可以改写为

$$T(E^*, \varepsilon, p, h) = \frac{(2s+1)k^2}{\pi^2\hbar}\sigma_{\text{in}}(\varepsilon)\frac{1}{\omega(E^*, p, h)} \tag{2.4.13}$$

对于 (2.4.13) 式中的逆截面 σ_{in}, 在实际计算中是用吸收截面代替. 已经有不少理论研究证明, 这是一个很好的近似. 上面 (2.3.4) 式已经给出了吸收截面的表示:

$$\sigma_a = \frac{\pi\lambda\!\!\!^{-2}}{(2s+1)k^2}\sum_{jl}(2j+1)T_{jl} \tag{2.4.14}$$

其中 k 可用约化波长 $\lambda\!\!\!^- = 1/k$ 来表示,$\lambda\!\!\!^-$ 的量纲为长度, T_{lj} 是穿透因子. 对于中子入射情况, 由于中子的自旋为 $s = 1/2$, 因此有 $j = l \pm 1/2$.

在 Hauser-Feshbach 平衡态统计理论中, 考虑了角动量和宇称的守恒, 对应每个角动量 J 和宇称 π 的吸收截面表示为

$$\sigma_a^{J\pi} = \pi\lambda\!\!\!^{-2}\frac{2J+1}{(2I+1)(2s+1)}\sum_{j=|J-I|}^{J+I}\sum_{l=|j-1/2|}^{j+1/2}T_{jl} \tag{2.4.15}$$

其中 s 为入射中子自旋, I 是靶核自旋, λ 是中子入射波长. 当复合核处于总角动量为 J 的情况下, 角动量守恒要求满足下面三角关系：

$$\Delta(JlS)=\begin{cases}1, & \text{当 } |S-l|\leqslant J\leqslant S+l\\ 0, & \text{当 } J<|S-l| \text{ 或 } J>S+l\end{cases} \tag{2.4.16}$$

对于宇称守恒而言, 由出射粒子与剩余核的相对运动轨道角动量 l 来确定, 其宇称是 $(-1)^l$, 如果复合核的宇称为 π, 而剩余核分能级宇称为 π_k, 宇称守恒要求 $\pi=(-1)^l\pi_k$, 为了便于表达这种宇称守恒, 下面定义一个符号 $f_l(\pi,\pi_k)$：

$$f_l(\pi,\pi_k)=\begin{cases}1, & \text{当 } \pi=(-1)^l\pi_k\\ 0, & \text{当 } \pi\neq(-1)^l\pi_k\end{cases} \tag{2.4.17}$$

将吸收截面的表示代入粒子发射率的表示中, 粒子发射到剩余核的分立能级时, 末态角动量和宇称都处于确定的状态. 由于在低能轻核反应中, 都是从复合核到剩余核分立能级的发射, 剩余激发能就是分立能级的能量, 因此被发射粒子的能量 ε_b 是确定的, 由此得到在 J,π 道, 从复合核的预平衡态发射到剩余核分立能级 k 的发射率：

$$T_{b,k}^{J\pi}(n,E^*,\varepsilon_b)=\frac{1}{2\pi\hbar\omega^{J\pi}(n,E^*)}\sum_{j=|J-I_k|}^{J+I_k}\sum_{l=|j-s_b|}^{J+s_b}T_{jl}f_l(\pi,\pi_k) \tag{2.4.18}$$

对与粒子发射竞争的预平衡 γ 退激 (Plyuyko et al., 1978), 采用了 Obloginski 的理论公式 (Obloginski, 1987). 可以看出, 预平衡发射率的分母 $2\pi\hbar\omega^{J\pi}(n,E^*)$ 在计算中都可以被约化掉. 因此, 在轻核反应中粒子发射到剩余核的分立能级的发射过程中, 发射率与激子态密度 $\omega^{J\pi}(n,E^*)$ 的具体表示无关.

2.5 统一的 Hauser-Feshbach 和激子模型

早在 20 世纪 40 年代, 玻尔提出了复合核模型, 认为复合核的形成与衰变无关, 在此基础上建立了蒸发模型 (Weisskopf, 1937; Weisskopf et al., 1940), 对于描述低能核反应取得了一定的成功. 复合核反应的出射粒子能谱可表示为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}=\sigma_a\frac{W_b(E,\varepsilon)}{W_{\mathrm{T}}(E)} \tag{2.5.1}$$

其中 σ_a 为复合核形成截面, $W_b(E,\varepsilon)$ 为复合核在激发能为 E 的状态下发射一个能量为 ε 的 b 粒子的发射率. $W_{\mathrm{T}}(E)$ 为总发射率, 将 b 粒子发射率对出射能量积分并对各种发射粒子 b 求和就得到总发射率：

$$W_{\mathrm{T}}(E)=\sum_b\int W_b(E,\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon \tag{2.5.2}$$

(2.5.1) 式被称为蒸发模型. 在热平衡各态历经假定下, 由细微平衡原理可以得到 b 粒子的发射率的表示：

$$W_b(E,\varepsilon)=\frac{2S_b+1}{\pi^2\hbar^3}\mu_b\varepsilon\sigma_{\text{inv}}(\varepsilon)\frac{\rho(E')}{\rho(E)} \tag{2.5.3}$$

其中 S_b 为 b 粒子的自旋, μ_b 为 b 粒子的折合质量, $\sigma_{\text{inv}}(\varepsilon)$ 为逆截面, 表示剩余核吸收具有能量为 ε 的 b 粒子的截面, E' 为发射 b 粒子后剩余核的激发能, ρ 表示能量相空间的占据数密度, 通常称为能级密度. b 粒子发射率 $W_b(E,\varepsilon)$ 的量纲为 $\text{MeV}^{-1}\text{s}^{-1}$, 表示单位时间单位能量的发射概率. 因此, 发射率对发射能量 ε 积分后得到 b 粒子的发射速率. 决定出射粒子能谱形状的主要因素是能级密度和逆截面.

其后在蒸发模型的基础上, 在核反应过程中考虑到角动量和宇称守恒, 于 20 世纪 50 年代建立了 Hauser-Feshbach 统计理论 (Hauser et al., 1952).

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}=\sum_{J\pi}\sigma_a^{J\pi}\frac{W_b^{J\pi}(E,\varepsilon)}{W_{\mathrm{T}}^{J\pi}(E)} \tag{2.5.4}$$

其中各物理量与蒸发模型相同, 仅是在每个物理量上加入角动量和宇称 $J\pi$ 标记. 当把角动量和宇称守恒这一物理规律加入到蒸发模型之中后, 因而在发射粒子后, 余核就可以处于有确定角动量和宇称的分立能级. 这是 Hauser-Feshbach 理论对蒸发模型的改进.

蒸发模型显示了复合核的形成与衰变无关的假设, 但是在考虑了角动量和宇称守恒之后, 情况就变了. 因为这时必须将形成过程区分成不同 $J\pi$ 道计算, 即使总的形成截面 σ_a 相同, 但对于不同的核, $J\pi$ 道的形成截面可能是不相同的. 在考虑了角动量及宇称守恒后, 在复合核的形成过程与衰变过程中就必须记忆 $J\pi$ 量子数, 这便在原来复合核的形成与衰变过程中加入了有关物理因素的制约, 使得形成与衰变无关的假定不能够严格成立.

随着入射粒子能量的增高, 在复合核内粒子的非平衡发射份额逐渐增加, 为合理描述这类核反应机制, 需要发展新理论, 最成功的是 Griffin 等在 20 世纪 60 年代提出的了激子模型 (Griffin, 1966; Blann, 1968). 该模型把原子核看成费米气体, 靶核的全部核子形成费米海, 入射粒子将费米海下的一个核子激发到费米面之上, 形成费米海中的一个空穴, 这样就产生一对粒子空穴. 只要已有的粒子或空穴具有足够高的能量, 就会进一步激发, 产生新的粒子空穴对, 同时并也伴随粒子–空穴对的湮没过程. 粒子和空穴统称为激子, 所有粒子数和空穴数之和称之为激子数 n. 对于中子诱发的核反应, 入射中子激发一对粒子空穴, 得到激子数是 $n=3$ 的初始态, 被称之为门口态. 然后, 粒子或空穴都可能继续激发粒子空穴对, 伴随着粒子空穴对的产生和湮没过程, 同时还伴随着粒子的发射, 这种发射被称为预平衡发射. 因此, 平衡前的核反应的耗散过程是用粒子–空穴对的产生和湮没过程来描述的.

随着激子模型的不断发展, 已能较好地描述核反应的预平衡现象. 比如, 粒子发射谱的 “硬尾”, 出射粒子在质心系中的朝前发射倾向等, 这些在平衡态统计模型中不能解释的现象, 在激子模型中已经得到较好的描述. 在激子模型中, 出射 b 粒子的能谱表示为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_b}{\mathrm{d}\varepsilon}=\sigma_a\sum_n P(n)\frac{W_b(n,E,\varepsilon)}{W_{\mathrm{T}}(n,E)} \tag{2.5.5}$$

其中 $P(n)$ 为 n 激子态的占有概率, $W_b(n,E,\varepsilon)$ 为 n 激子态下发射一个能量为 ε 的 b 粒子的概率, 而 $W_{\mathrm{T}}(n,E)$ 是激发能为 E 的 n 激子态下的总发射率：

$$W_{\mathrm{T}}(n,E)=\sum_b\int W_b(n,E,\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon \tag{2.5.6}$$

每个发射粒子的能谱对能量积分得到 b 粒子的发射率：

$$W_b(n,E)=\int W_b(n,E,\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon \tag{2.5.7}$$

原有的激子模型中没有考虑角动量守恒这个重要的物理因素, 以后称这种激子模型为普通激子模型. 由于各种核素的分立能级都有自己独特的自旋和宇称, 特别是轻核反应, 必须要考虑角动量. 这是在非平衡统计理论中加入角动量守恒这个物理因素的新课题. 为了考虑在预平衡发射过程中保证角动量和宇称守恒这个因素. 可以借鉴平衡态核反应统计理论的成果, 就像在蒸发模型中加入角动量和宇称守恒就发展为 Hauser-Feshbach 统计理论：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}=\sigma_a\frac{W_b(E,\varepsilon)}{W_{\mathrm{T}}(E)}\quad\longrightarrow\quad\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}=\sum_{J\pi}\sigma_a^{J\pi}\frac{W_b^{J\pi}(E,\varepsilon)}{W_{\mathrm{T}}^{J\pi}(E)} \tag{2.5.8}$$

可以设想将上面的办法借鉴过来, 用于描述预平衡发射过程, 即

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}=\sigma_a\sum_n P(n)\frac{W_b(n,E,\varepsilon)}{W_{\mathrm{T}}(n,E)}\quad\longrightarrow\quad\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}=\sum_{J\pi}\sigma_a^{J\pi}\sum_n P_{J\pi}(n)\frac{W_b^{J\pi}(n,E,\varepsilon)}{W_{\mathrm{T}}^{J\pi}(n,E)} \tag{2.5.9}$$

其中, 对所有物理量都加入了自旋、宇称 $(J\pi)$ 因素.

可以看出, 这个新理论框架相当于将 Hauser-Feshbach 理论与激子模型进行了统一的描述, (Zhang, 1991, 1994a, 1994b). 由如下所示可以看清与其他核反应统计理论的关系：

	不计角动量宇称守恒		考虑角动量宇称守恒
平衡态理论	(蒸发模型) $\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}=\sigma_a\dfrac{W_b(E,\varepsilon)}{W_{\mathrm{T}}(E)}$	$\rightarrow$	(Hauser-Feshbach 模型) $\displaystyle\sum_{J\pi}\sigma_a^{J\pi}\frac{W_b^{J\pi}(E,\varepsilon)}{W_{\mathrm{T}}^{J\pi}(E)}$
	$\downarrow$		$\downarrow$
预平衡理论	(激子模型) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}=\sigma_a\sum_n P(n)\frac{W_b(n,E,\varepsilon)}{W_{\mathrm{T}}(n,E)}$	$\rightarrow$	(统一 HF 和激子模型) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}=\sum_{J\pi}\sigma_a^{J\pi}\sum_n P^{J\pi}(n)\frac{W_b^{J\pi}(n,E,\varepsilon)}{W_{\mathrm{T}}^{J\pi}(n,E)}$

显然, 在不考虑角动量宇称守恒时, 这个理论模型退化为普通的激子模型; 而不考虑粒子空穴态激发时, 则退化为 Hauser-Feshbach 理论.

在实际的理论计算中, 核反应预平衡过程仅需要前几个激子态, 比如仅考虑到 n_0 激子态为止, 而其余的核反应过程是由平衡态核反应理论来描述, 因而实际的能谱计算公式为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}=\sum_{J\pi}\sigma_a^{J\pi}\left\{\sum_{n=3}^{n_0}P^{J\pi}(n)\frac{W_b^{J\pi}(n,E,\varepsilon)}{W_{\mathrm{T}}^{J\pi}(n,E)}+Q^{J\pi}\frac{W_b^{J\pi}(E,\varepsilon)}{W_{\mathrm{T}}^{J\pi}(E)}\right\} \tag{2.5.10}$$

这就是统一的 Hauser-Feshbach 和激子模型理论的能谱计算公式. 其中, 与角动量宇称有关的平衡态占据概率是由下面关系式给出

$$Q^{J\pi}=1-\sum_{n=3}^{n_0}P^{J\pi}(n). \tag{2.5.11}$$

在 (2.5.10) 式中的第一部分表示预平衡发射机制, 第二部分是用 Hauser-Feshbach 理论描述的平衡发射机制. 理论模型研究的结果表明, 在中子入射能小于 20MeV 时, 仅用 $n_0=3$ 态就可以描述好预平衡的发射行为.

由于在轻核反应中, 一次粒子发射的剩余核都处于分立能级, 因此在 (2.5.10) 式中粒子发射能量 ε 都有确定值 ε_k, 能谱对能量积分中相当于出现一个 $\delta(\varepsilon-\varepsilon_k)$, 因此可以得到在预平衡发射过程中, 出射粒子 b 到剩余核分立能级 k 的截面为

$$\sigma_{b,k}(E_n)=\sum_{J\pi}\sigma_a^{J\pi}\left\{\sum_{n=3}^{n_0}P_{(n)}^{J\pi}\frac{W_{b,k}^{J\pi}(n,E^*)}{W_{\mathrm{T}}^{J\pi}(n,E^*)}+Q^{J\pi}\frac{W_b^{J\pi}(E^*)}{W_{\mathrm{T}}^{J\pi}(E^*)}\right\} \tag{2.5.12}$$

其中 $W_{\mathrm{T}}^{J\pi}(n,E^*)$ 是 n 激子态的总发射率.

$$W_{\mathrm{T}}^{J\pi}(n,E^*)=\sum_{b,k}W_{b,k}^{J\pi}(n,E^*) \tag{2.5.13}$$

而平衡态的总发射率 $W_{\mathrm{T}}^{J\pi}(E^*)$ 是由 (2.5.2) 式给出的.

为此建立了新的核反应统计理论模型, 被称之为统一的 Hauser-Feshbach 和激子模型理论 (Zhang, 1991, 1994a). 为了可以进行实际理论计算, 需要解决的新课题是如何计算出与角动量宇称有关的激子态的占据概率. 下面就针对这个问题进行讨论.

2.6　与角动量有关的激子模型

有关激子模型理论的基础知识可以参见 (丁大钊等, 2005; 申庆彪, 2005). 激子模型是用来描述开放系统的核反应非平衡统计的耗散过程的有效理论工具. 这里, 为了容易深入了解与角动量有关的激子模型, 需要先对与角动量无关的激子模型做一简介. 下面称与角动量无关的激子模型为普通激子模型, 在此基础上可以了解该模型的基本物理图像.

如果一个核系统, 它的每一个微观态是由一些特定的物理量来表征的. 因而, 占据这个微观态的概率随时间的变化速率就是从其他微观态跃迁到这个微观态的速率, 减去从这个微观态跃迁到其他微观态的速率得到的, 这是在物理上非常直观的表示. 所有可能的微观态的变化组成的联立微分方程被称为主方程 (Master Equation). 这个方程已经被广泛地应用到各种研究领域.

如果用激子数来表征系统的微观态, 由入射粒子诱发的核体系粒子空穴激发过程, 可以用下面的主方程描述:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q(n,t)=\lambda_{n+2}^{-}q(n+2,t)+\lambda_{n-2}^{+}q(n-2,t)-[\lambda_n^{+}+\lambda_n^{-}+W_{\mathrm{T}}(n,E)]q(n,t) \tag{2.6.1}$$

这里, $q(n,t)$ 是在 t 时刻 n 激子态的占有概率, λ_n^+ 是由 n 激子态向 $n+2$ 激子态的跃迁速率, λ_n^- 是由 n 激子态向 $n-2$ 激子态的跃迁速率, $W_{\mathrm{T}}(n,E)$ 是在激发能为 E 的 n 激子态的总发射率. 这个主方程描述了一个开放系统的动力学行为, 由相邻激子态到 n 激子态的跃迁率减去由 n 激子态到相邻激子态的跃迁率与粒子总发射率之和就是 n 激子态在单位时间内增加的占有概率. 由于仅用了激子数来表征系统的微观态, 由于 λ_n^0 对应的跃迁过程是 $n\to n$ 的跃迁过程, 这不改变激子数, 因此 λ_n^0 不出现在主方程 (2.6.1) 之中. 如果另外添加物理量来表征微观态时, 在 $n\to n$ 的跃迁过程中, 虽然不改变激子数, 但是另外的物理量被改变时, 就需要加入 λ_n^0 的跃迁过程. 在下一章的推广的激子模型主方程中就是这种情况. 在这种情况下, 微观态内加入了碰撞角度的物理量, 因而在 $n\to n$ 的跃迁过程中, 虽然不改变激子数, 但是角度方向却发生了变化. 由此可见, 核反应的非平衡统计理论是用核内核子间碰撞产生的粒子空穴对来描述激发核系统的耗散过程.

为了方便求解主方程 (2.6.1), 下面引入 “寿命” 这个物理量, 它的定义为

$$\tau(n)=\int_0^\infty q(n,t)\mathrm{d}t \tag{2.6.2}$$

因此, 寿命就是激子态的占有概率对时间的积分, 具有时间的量纲. 显然, “寿命”这个物理量是来自开放系统的特征量. 因为, 由统计物理的性质得知, 对于一个封闭系统, 只有时间足够长, 它的状态最终会得到统计平衡. 因此封闭系统的微观态占据概率是不随数据而变化的量, 对应的 “寿命” 是无限大.

由 (2.6.2) 定义的寿命, 对 (2.6.1) 式左边进行积分, 对于开放系统总有 $q(n,t\to\infty)=0$ 存在, 因此积分的结果为

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}q(n,t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = q(n,t)|_0^\infty = -q(n,0) = -\delta_{n,n_0} \tag{2.6.3}$$

其中 n_0 是在初始 $t=0$ 时刻的初始激子数. 由此得到激子态寿命的主方程为

$$-\delta_{n,n_0} = \lambda_{n+2}^-\tau(n+2) + \lambda_{n-2}^+\tau(n-2) - [\lambda_n^+ + \lambda_n^- + W_{\mathrm{T}}(n,E)]\tau(n) \tag{2.6.4}$$

对于开放系统而言, 得到 (2.6.3) 的初始条件是, 在时间足够长时, 各种激子态的占据概率都趋向于 0. 对中子入射而言, 初始门口态的激子数 $n_0=3$. 在 (2.6.4) 和 (2.6.1) 中, λ_n^+ 是从 n 激子态向 $n+2$ 激子态跃迁的速率, 在物理上表示费米海上的一个核子 (或费米海中的一个空穴) 与费米海中的一个核子碰撞后将将其激发到费米海上, 因而产生一个新的粒子空穴对; λ_n^- 是从 n 激子态向 $n-2$ 激子态跃迁的速率, 表示费米海上的一个核子 (或费米海中的一个空穴) 与费米海上的核子碰撞后将其碰撞到到费米海中, 填充了原来的一个空穴, 因而消失了一个粒子空穴对. 为了清楚起见, 将寿命方程对每个激子数逐个写出

$$\begin{aligned}
-1 &= \lambda_5^-\tau(5) - [\lambda_3^+ + W_{\mathrm{T}}(3,E)]\tau(3), & n&=3\\
0 &= \lambda_7^-\tau(7) + \lambda_3^+\tau(3) - [\lambda_5^+ + \lambda_5^- + W_{\mathrm{T}}(5,E)]\tau(5), & n&=5\\
0 &= \lambda_9^-\tau(9) + \lambda_5^+\tau(5) - [\lambda_7^+ + \lambda_7^- + W_{\mathrm{T}}(7,E)]\tau(7), & n&=7\\
&\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{2.6.5}$$

将所有激子数的方程相加, 很容易看出, 结果是所有的 $\lambda_n^\pm$ 相彼此相消, 最后得到

$$\sum_n \tau(n)W_{\mathrm{T}}(n,E) = 1 \tag{2.6.6}$$

这说明, 联立的激子态主方程具有归一性. 定义量纲为一的量:

$$P(n) \equiv W_{\mathrm{T}}(n,E)\tau(n) \tag{2.6.7}$$

为 n 激子态的占有概率. 显而易见, (2.6.7) 式也是对开放系统的特征量, 它直接与粒子总发射率有关. 这时 (2.6.6) 式表示了 n 激子态的占有概率满足归一化条件:

$$\sum_n P(n) = 1 \tag{2.6.8}$$

因此, 在预平衡发射中 b 粒子的发射能谱为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_b}{\mathrm{d}\varepsilon} = \sigma_a(E)\sum_n \tau(n) W_b(n,E,\varepsilon) \tag{2.6.9}$$

对所有出射粒子求和得到

$$\sum_b \frac{\mathrm{d}\sigma_b}{\mathrm{d}\varepsilon} = \sigma_a(E)\sum_n \tau(n) W_{\mathrm{T}}(n,E,\varepsilon) \tag{2.6.10}$$

再对出射粒子能量积分, 利用 (2.6.7) 式得到

$$\sum_b \int \frac{\mathrm{d}\sigma_b}{\mathrm{d}\varepsilon}\mathrm{d}\varepsilon = \sigma_a(E)\sum_n P(n) = \sigma_a(E) \tag{2.6.11}$$

这里 $\sigma_a(E)$ 是激发能为 E 的吸收截面.

下面讨论在激子模型主方程中的激子态之间的跃迁速率. 其公式表示是

$$\lambda_\nu(n) = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle M\rangle^2| Y_\nu(n), \quad \nu = +,0,- \tag{2.6.12}$$

这里 $+,0,-$ 分别表示激子态向 $n\to n+2, n\to n, n\to n-2$ 的跃迁. 其中对应剩余相互作用跃迁矩阵元通常用系统学公式表示 (Kalbach, 1973)

$$|\langle M\rangle^2| = \frac{K}{EA^3} \text{ 或 } |\langle M\rangle^2| = \frac{n+1}{4}\frac{K}{EA^3} \tag{2.6.13}$$

其中 K 是剩余相互作用跃迁矩阵元中的 Kalbach 系统学常数, 在计算中为可调参数, 量纲为 MeV^3. K 值的加大, 在低激子态有 $\lambda_+(n) > \lambda_-(n)$, 使 $\lambda_+(n)$ 加大效应为主, 这意味着平衡态发射概率加大, 而在高激子态有 $\lambda_+(n) < \lambda_-(n)$, 使 $\lambda_-(n)$ 加大为主, 由于在高激子态的情况下粒子发射概率很小, 这意味着高激子态向低激子态的跃迁概率加大. 后来, 后来 Kalbach 又给出与激子数有关的剩余相互作用跃迁矩阵元通常用系统学公式表示 (Kalbach, 1978)：

$$|\langle M\rangle^2| = \frac{K_A}{A^3(E/n+20.9)^3} \tag{2.6.14}$$

在符合了更宽能区, 粒子种类更多的实验测量数据的基础上, Kalbach 进一步给出更细致的改进表示 (Kalbach, 2006).

在 (2.6.12) 式中的末态概率 $Y_\nu(n)$ 可以由下面方式给出. $\nu=+$ 对应 $\Delta n=2$ 的跃迁过程. 粒子空穴对的产生一定是费米海上的一个粒子 (或费米海中的一个空穴) 与费米海中一个粒子之间的碰撞过程, 碰撞后将该粒子激发到费米海上, 形成一对新的粒子空穴. 粒子激发粒子空穴对的跃迁率可以用下面折叠过程方式给

出, 即从 n 激子态中取出一个能量为 ε 粒子 $\omega(\varepsilon,1,0)$, 该粒子产生粒子空穴对形成 $\omega(\varepsilon,2,1)$, 这时对激子态平均得到

$$Y_+(n)=\int\frac{\omega(E-\varepsilon,p-1,h)\omega(\varepsilon,1,0)\omega(\varepsilon,2,1)}{\omega(E,p,h)}\mathrm{d}\varepsilon \tag{2.6.15}$$

将激子态密度 (2.2.42) 的表示代入后, 完成积分得到

$$Y_+(n)=Y_{+p}(n)+Y_{+h}(n)=g\frac{(gE-A(p,h))^2}{2(n+1)} \tag{2.6.16}$$

可以看出, 对于一定激发能, 激子数越大 $Y_+(n)$ 越小, 表示向高激子态跃迁的概率随激子数的加大而单调下降.

用上面同样方式讨论 $\nu=0$ 的情况, 对应 $\Delta n=0$ 跃迁的过程. 它对应于粒子–粒子、粒子–空穴、空穴–空穴三种散射贡献之和. 在上述碰撞过程中, 粒子数和空穴数都保持不变, 总激子数也就不变, 只是不同激子间发生了能量交换, 用同上方法得到 (申庆彪, 2005)

$$Y_0(n)\approx g(gE-A(p,h))\frac{p(p-1)+h(h-1)+4ph}{2n} \tag{2.6.17}$$

对于 $\nu=-1$ 的情况, 对应了 $\Delta n=-2$ 的激子态跃迁过程. 相当于一个粒子或空穴引起粒子–空穴对的湮没. 类似地用上述的方法可以得到 (申庆彪, 2005)

$$Y_{-1}(n)\approx\frac{g}{2}ph(n-2) \tag{2.6.18}$$

这个结果表明, 在激发能一定的情况下, 激子数越大 $Y_-(n)$ 就越大, 表示从高激子态向低激子态跃迁的概率随激子数的加大而单调上升. 与上面讨论的物理图像是一致的. 特别是对于一个闭合系统, 在一定的激发能情况下, 具有向一个平衡激子态分布的动力学过程.

综合上面结果可以看出, 在由 n_0 激子态向高激子态跃迁的过程中, 开始有利于向高激子态的跃迁 $(Y_+(n)>Y_-(n))$, 而激子数很大时, 却遇到向低激子态跃迁概率加大的阻止效应 $(Y_+(n)<Y_-(n))$. 在不考虑粒子发射因素时, 这个核系统相当于是一个封闭系统, 在时间足够长时, 最终会达到统计平衡态, 这是符合统计理论的规律. 这时应该存在一个激子数 $\bar{n}$ 使得 $Y_+(\bar{n})=Y_-(\bar{n})$, 又称 $\bar{n}$ 是平衡激子数. 当激发能比较大, 忽略 Pauli 原理修正值时, 由 (2.6.16) 式和 (2.6.18) 式得到近似结果为

$$gE\approx\frac{1}{2}\bar{n}^2 \tag{2.6.19}$$

因此得到的平衡激子数约为

$$\bar{n}\approx\sqrt{2gE} \tag{2.6.20}$$

这个结果表示了激发能越高, 单粒子密度 g 越大的核系统, 平衡激子数就越大.

封闭系统的激子态分布形状, 是由跃迁概率的具体表示来确定的. 激子态的平衡分布是一个动态平衡. 这种情况的平衡相当于是, 每个激子态都存在从其他激子态进入到这个激子态的速率乘上各自激子态的占据概率等于每个激子态退出的速率乘上该激子态的占据概率的情况成立时. 这不意味着激子态之间的跃迁停止, 而是相互跃迁的结果不改变激子态的分布形状. 这就是动态平衡的物理图像.

由 (2.6.4) 式给出的激子模型的寿命主方程是一个三对角矩阵, 目前已经有标准程序求解. 另外, 也可以解析地写出激子态寿命的递推公式, 称为激子态寿命主方程的闭合解. 然而对轻核反应, 在低激子态存在 $\lambda_n^+(n) \approx W_\mathrm{T}(n,E) \gg \lambda_{n+2}^-(n)$ 的条件, 因此可以在寿命主方程忽略 $\lambda_n^-(n)$ 项, 这被称为无返回近似, 这时寿命主方程的求解可大为简化. 忽略 λ_i^- 后寿命主方程变为

$$-\delta_{n,3} = \lambda_{n-2}^+ \tau(n-2) - [\lambda_n^+ + W_\mathrm{T}(n,E)]\tau(n) \tag{2.6.21}$$

在 $n=3$ 时得到

$$\tau(3) = \frac{1}{\lambda_3^+ + W_\mathrm{T}(3,E)} \tag{2.6.22}$$

在 $n>3$ 的情况下得到

$$\tau(n) = \frac{\prod\limits_{i=3}^{n-2} \lambda_i^+}{\prod\limits_{i=3}^{n} (\lambda_i^+ + W_\mathrm{T}(i,E))} \tag{2.6.23}$$

需要指出的是, 在对 i 求和中 $\Delta i = 2$. 以上是对与角动量无关的激子模型的讨论.

在统一的 Hauser-Feshbach 和激子模型理论中, 需要计算与角动量有关的激子态占据概率. 因此必须将角动量因素加入到普通激子模型的主方程中, 进而发展为与角动量相关的激子模型 (Zhang et al., 1994b). 这时激子模型主方程变为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}q^J(n,t)}{\mathrm{d}t} = &\lambda_+^J(n-2)q^J(n-2,t) + \lambda_-^J(n+2)q^J(n+2,t) \\ &- [\lambda_+^J(n) + \lambda_-^J(n) + W_t^J(n)]q^J(n,t)\end{aligned} \tag{2.6.24}$$

其中 $\lambda_\pm^J(n)$ 是角动量为 J 的 n 激子态分别向 $n\pm 2$ 激子态的跃迁率, $W_t^J(n)$ 是角动量为 J 的 n 激子态发射率. $q^J(n,t)$ 为 t 时刻角动量为 J 的 n 激子态占有概率.

与普通激子模型类似, 定义角动量为 J 的激子态寿命为

$$\tau^J(n) \equiv \int_0^\infty q^J(n,t)\mathrm{d}t \tag{2.6.25}$$

对激子模型主方程的时间积分, 可以得到激子模型寿命主方程变为寿命主方程:

$$-\delta_{n,n_0} = \lambda_+^J(n-2)\tau^J(n-2) + \lambda_-^J(n+2)\tau^J(n+2) - [\lambda_+^J(n) + \lambda_-^J(n) + W_t^J(n)]\tau^J(n) \quad (2.2.26)$$

类似地, 定义与角动量为 J 的 n 激子态占有概率为

$$P^J(n) = \tau^J(n)W_t^J(n) \quad (2.6.27)$$

由 (2.6.27) 式可以验证占有概率仍然满足归一性.

$$\sum_n P^J(n) = 1 \quad (2.6.28)$$

角动量为 J 的激子态间的跃迁率 $\lambda_\nu^J(n)$ 可以分解为两部分, 即

$$\lambda_\nu^J(n) = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle M\rangle^2\right| Y_\nu(n)x_\nu^J(n), \quad \nu = \pm, 0 \quad (2.6.29)$$

其中 $Y_\nu(n)$ 为前面已讨论过的与角动量无关的普通激子模型的跃迁概率, $x_\nu^J(n)$ 为考虑角动量守恒的角动量因子, $\langle M\rangle^2$ 为与角动量无关的两体剩余相互作用矩阵元. 为了在粒子的预平衡发射过程中保证角动量守恒, 在激子态的跃迁率中引入了角动量因子 (Zhang et al., 1994b). 因此, 在与角动量相关的激子模型中, 问题的关键就在于如何计算角动量因子 $x_\nu^J(n)$ $\nu = \pm, 0$.

剩余相互作用势采用 δ 函数型的两体相互作用来表示. 利用球函数的完备性, δ 函数可以展开为

$$\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \frac{\delta(r-r')}{rr'}\sum_{l\mu} Y_{l\mu}^*(\Omega)Y_{l\mu}(\Omega') \quad (2.6.30)$$

由于仅关心角度因素, 而不关心对径向积分和两体相互作用的强度的大小, 它们贡献的常数可以由后面的归一化条件来确定.

若 Q 为两个 l 秩张量 $Y_{l\mu}(\Omega)$ 的标量积, 则即被收缩为零秩张量时

$$Q = \sum_\mu Y_{l\mu}^*(\Omega)Y_{l\mu}(\Omega') = \sum_\mu (-1)^\mu Y_{l\mu}(\Omega)Y_{l-\mu}(\Omega') \quad (2.6.31)$$

由 Wigner-Eckart 定理 (曾谨言, 2001), 跃迁矩阵元的约化矩阵元可表示为 (Bohr et al., 1969)

$$\langle \alpha jm|Q|\alpha' j' m'\rangle = \frac{1}{\hat{j}}\langle \alpha j||Q||\alpha' j'\rangle \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{jj'}\delta_{mm'} \quad (2.6.32)$$

这里记 $\hat{j} = \sqrt{2j+1}$.

下面首先讨论 $\Delta n = 0$ 的激子态跃迁过程. 在这种过程中, 包含了粒子–粒子, 粒子–空穴, 空穴–空穴之间的散射. 实际上, 这三种散射过程都发生在核子之间. 例如粒子–粒子散射是指两个费米海上的粒子散射后, 仍然在费米海上. 粒子–空穴散射是指一个费米海上的粒子与一个费米海下的核子散射后, 仍然保持分别在费米海上下的状态, 只不过粒子和空穴的能量可以改变. 空穴–空穴之间的散射是指两个费米海下的粒子散射后, 仍然在费米海下. 由于在低激子态时, 后两种有效散射的概率很小, 因此下面仅以粒子–粒子散射为例, 表示费米海上的两个粒子 (j_a) 与 (j_b) 碰撞后, 变为费米海上的粒子 (j_c) 和 (j_d), 核内其他核子作为旁观者, 其总角动量为 S, 体系的总角动量为 J. 其角动量耦合状况由图 2.5 所示.

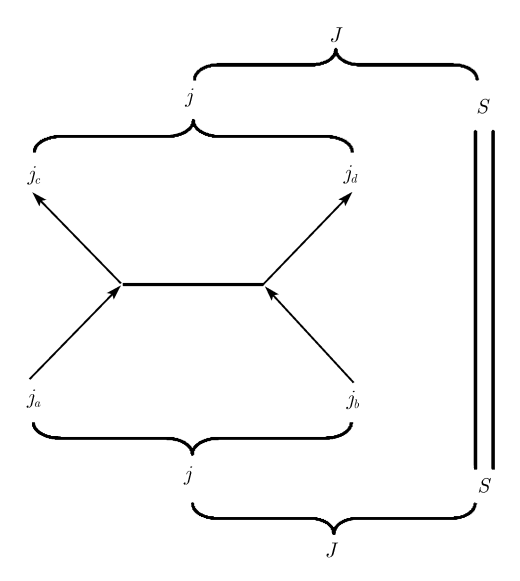


图 2.5　$\Delta n = 0$ 过程中的角动量耦合关系示意图

这时跃迁矩阵元可表示为 (孙小军, 2007)

$$\begin{aligned}\Xi_{\Delta n=0} &= \langle (j_a j_b) j || \sum_{l\mu} Y^*_{l\mu} Y_{l\mu} || (j_c j_d) j \rangle \\ &= \hat{j}\ \langle (j_a j_b) jm | \sum_{l\mu} Y^*_{l\mu} Y_{l\mu} | (j_c j_d) jm \rangle \end{aligned} \tag{2.6.33}$$

在非耦合表象中, (2.6.33) 可改写为

$$\begin{aligned}\Xi_{\Delta n=0} = \hat{j} \sum_{l\mu m_a m_c} &(-1)^{\mu} C_{j_a m_a j_b m_b}^{\ jm} C_{j_c m_c j_d m_d}^{\ jm} \\ &\times \langle j_a m_a | Y_{l\mu} | j_c m_c \rangle \langle j_b m_b | Y_{l-\mu} | j_d m_d \rangle \end{aligned} \tag{2.6.34}$$

其中 $C_{jmLM}^{\ j'm'}$ 是 Clebsh-Gordon 系数 (简称 CG 或 C 系数)(Rose, 1963). 再次应用

Wigner-Eckart 定理, (2.6.34) 式变为

$$\varXi_{\Delta n=0}=\frac{\hat{j}}{\hat{j}_a\hat{j}_b}\sum_{l\mu m_a m_b m_c}(-1)^{\mu}C_{j_a m_a j_b m_b}^{\ jm}C_{j_c m_c j_d m_d}^{\ jm}C_{j_c m_c l\mu}^{\ j_a m_a}C_{j_d m_d l-\mu}^{\ j_b m_b}\\ \times\langle j_a||Y_l||j_c\rangle\langle j_b||Y_l||j_d\rangle \tag{2.6.35}$$

利用 Racah 系数的定义 (Rose, 1963), 则有

$$\hat{j}_{12}\hat{j}_{34}W(j_1j_2jj_3,j_{12}j_{34})=\sum_{m_1m_2}C_{j_1m_1j_2m_2}^{\ j_{12}m_{12}}C_{j_{12}m_{12}j_3m_3}^{\ jm}C_{j_2m_2j_3m_3}^{\ j_{23}m_{23}}C_{j_1m_1j_{23}m_{23}}^{\ jm} \tag{2.6.36}$$

因此, 在 (2.6.35) 式中四个 Clebsh-Gordon 系数可以组成 Racah 系数. 其中将 j 视为 j_{12}, 将 l 视为 j_{23}, 将 j_c 视为 j, 利用 Clebsh-Gordon 系数的对称性则有

$$C_{j_c m_c j_d m_d}^{\ jm}=\frac{\hat{j}}{\hat{j}_c}(-1)^{m_d+j_c-j}C_{jmj_d-m_d}^{\ j_c m_c} \tag{2.6.37}$$

$$C_{j_d m_d l-\mu}^{\ j_b m_b}=\frac{\hat{j}_b}{\hat{j}}(-1)^{j_d-m_d}C_{j_b m_b j_d-m_d}^{\ l-\mu} \tag{2.6.38}$$

$$C_{j_c m_c l\mu}^{\ j_a m_a}=\frac{\hat{j}_a}{\hat{j}_c}(-1)^{\mu+j_c-j_a}C_{j_a m_a l-\mu}^{\ j_c m_a} \tag{2.6.39}$$

注意到对 m_c 求和会出现因子 $(2j_c+1)$. 因此, (2.6.36) 式中的四个 Clebsh-Gordon 系数乘积对磁量子数的求和变为

$$\sum_{m_a m_b m_c}C_{j_a m_a j_b m_b}^{\ jm}C_{j_c m_c j_d m_d}^{\ jm}C_{j_c m_c l\mu}^{\ j_a m_a}C_{j_d m_d l-\mu}^{\ j_b m_b}\\ =\hat{j}_a\hat{j}_b(-1)^{\mu+j_a+j_d-j}\hat{j}\,W(j_aj_bj_cj_d,jl) \tag{2.6.40}$$

这样, 矩阵元 (2.6.35) 式可继续约化为

$$\varXi_{\Delta n=0}=\hat{j}\,(-1)^{j_a+j_d-j}\sum_{l}\langle j_a||Y_l||j_c\rangle\langle j_b||Y_l||j_d\rangle W(j_aj_bj_cj_d,jl) \tag{2.6.41}$$

其中球谐函数的约化矩阵元的公式已经给出为 (曾谨言, 2001)

$$\langle j||Y_l||j'\rangle\equiv\langle l\frac{1}{2}j||Y_l||l\frac{1}{2}j'\rangle=\frac{(-1)^{j-\frac{1}{2}+l}}{\sqrt{4\pi}}\hat{j}\,\hat{j}\,'C_{j\frac{1}{2}j'-\frac{1}{2}}^{l0} \tag{2.6.42}$$

这样, 在 (2.6.41) 式中两个球函数约化矩阵元分别为

$$\langle j_a||Y_l||j_c\rangle=\frac{(-1)^{j_a-\frac{1}{2}+l}}{\sqrt{4\pi}}\hat{j}_a\hat{j}_cC_{j_a\frac{1}{2}j_c-\frac{1}{2}}^{l0} \tag{2.6.43}$$

$$\langle j_b||Y_l||j_d\rangle = \frac{(-1)^{j_b-\frac{1}{2}+l}}{\sqrt{4\pi}}\hat{j}_b\,\hat{j}_d C_{j_b\frac{1}{2}j_d-\frac{1}{2}}^{l0} \tag{2.6.44}$$

代入到 (2.6.41) 式之中, 得到

$$\Xi_{\Delta n=0} = \frac{(-1)^{j_b+j_d-j}}{4\pi}\hat{j}_a\hat{j}_b\hat{j}_c\hat{j}_d\hat{j}\sum_l W(j_aj_bj_cj_d,jl)C_{j_a\frac{1}{2}j_c-\frac{1}{2}}^{l0}C_{j_b\frac{1}{2}j_d-\frac{1}{2}}^{l0} \tag{2.6.45}$$

再利用下面对角动量求和的公式, (2.6.45) 式中对角动量 l 的求和可约化为

$$\sum_l W(j_aj_bj_cj_d,jl)C_{j_a\frac{1}{2}j_c-\frac{1}{2}}^{l0}C_{j_b\frac{1}{2}j_d-\frac{1}{2}}^{l0} = \frac{(-1)^{j_a+j_c+j}}{2j+1}C_{j_a\frac{1}{2}j_b\frac{1}{2}}^{j1}C_{j_c\frac{1}{2}j_d\frac{1}{2}}^{j1} \tag{2.6.46}$$

得到矩阵元 $\Xi_{\Delta n=0}$ 的表示为

$$\Xi_{\Delta n=0} = \frac{(-1)^{j_a+j_b+j_c+j_d}\hat{j}_a\hat{j}_b\hat{j}_c\hat{j}_d}{4\pi\hat{j}}C_{j_a\frac{1}{2}j_b\frac{1}{2}}^{j1}C_{j_c\frac{1}{2}j_d\frac{1}{2}}^{j1} \tag{2.6.47}$$

对于费米子系统, 需要反对称化. 它的反对称化是减去交换粒子态 j_c 和 j_d 项, 因此反对称化矩阵元用上标 A 标记, 利用 Clebsh-Gordon 系数的对称性得到

$$\Xi_{\Delta n=0}^{A} = \frac{(-1)^{j_a+j_b+j_c+j_d}}{4\pi}\frac{\hat{j}_a\hat{j}_b\hat{j}_c\hat{j}_d}{\hat{j}}[1-(-1)^{j-j_c-j_d}]C_{j_a\frac{1}{2}j_b\frac{1}{2}}^{j1}C_{j_c\frac{1}{2}j_d\frac{1}{2}}^{j1} \tag{2.6.48}$$

通常是用与激子数有关的角动量分布函数 $R_n(J)$ 来表示在 n 激子态角动量 J 的概率. 其公式表示为

$$R_n(J) = \frac{2J+1}{\sqrt{2\pi}2\sigma_n^3}\exp\left\{-\frac{(J+1/2)^2}{2\sigma_n^2}\right\} \tag{2.6.49}$$

这里 σ_n 为预平衡态下自旋切割因子, 理论公式的经验表示是 (Gruppelaar, 1983; Zhang, 1992).

$$\sigma_n^2 = 0.24nA^{\frac{2}{3}} \tag{2.6.50}$$

这个公式表明, 随着激子数的加大, 自旋切割因子的值也加大. 在 (2.6.50) 式中, 经验系数也有取 0.282 来取代 0.24 的. (Chadwick et al., 1992). 因此, 随角动量值的加大, 角动量因子 $R_n(J)$ 的值会迅速减小. 可以看出, 对 1p 壳轻核, 由于 A 值较小, 自旋切割因子的值也相对比较小. 这个角度因子必须满足的归一化条件. 为了看清这一点, 可近似用积分形式代替对角动量的求和：

$$\sum_J (2J+1)R_n(J) \approx \int \frac{(2J+1)^2}{\sqrt{2\pi}2\sigma_n^3}\exp\left[-\frac{(J+1/2)^2}{2\sigma_n^2}\right]\mathrm{d}J \tag{2.6.51}$$

做变量变换 $x=(J+1/2)/\sqrt{2}\sigma_n$ 后, (2.6.51) 式变为

$$\int \frac{(2J+1)^2}{\sqrt{2\pi}2\sigma_n^3}\exp\left\{-\frac{(J+1/2)^2}{2\sigma_n^2}\right\}\mathrm{d}J=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=1 \tag{2.6.52}$$

证明了角动量因子的归一性, 因此, 对于 $\Delta n=0$ 的激子态跃迁过程, 从总角动量 J 中取出 $j_aj_b(j)$ 后又形成 $j_cj_d(j)$ 的角度部分权重为

$$\frac{R_{n-2}(S)R_2(j)R_2(j)}{R_n(J)} \tag{2.6.53}$$

由角动量 j 态产生两个粒子对的权重分别为

$$R_1(j_a)R_1(j_b)/R_2(j) \text{ 和 } R_1(j_c)R_1(j_d)/R_2(j) \tag{2.6.54}$$

得到的角度因子 λ_0^J 是 $\varXi_{\Delta n=0}^A$ 模的平方, 利用 Hauser-Feshbach 理论中应用的无规相位近似, 将对角动量求和移到模的平方之外, 由此得到

$$\begin{aligned}x_0^J(n)=&\frac{1}{8\pi^2R_n(J)}\sum_{Sj}\frac{\Delta(JSj)}{2j+1}R_{n-2}(S)\sum_{j_aj_bj_cj_d}(2j_a+1)R_1(j_a)(2j_b+1)R_1(j_b)\\&\times(2j_c+1)R_1(j_c)(2j_d+1)R_1(j_d)[1-(-1)^{j-j_c-j_d}]\\&\times\left(C^{j1}_{j_a\frac{1}{2}j_b\frac{1}{2}}C^{j1}_{j_c\frac{1}{2}j_d\frac{1}{2}}\right)^2\end{aligned} \tag{2.6.55}$$

其中 $\Delta(JSj)$ 表示括号内三个角动量需要满足三角关系时为 1, 否则为 0.

下面讨论 $\Delta n=2$ 的情况, 这里假定, 当原子核系统由低向高激子态跃迁时, 若费米面上角动量为 j_a 的粒子 a 从费米面下激发一个粒子 d 到费米面上, 而在费米面下留下一个空穴 b, 即产生出一个粒子、空穴对, 其角动量分别为 j_dj_b; 同时在碰撞后, a 粒子的角动量由 j_a 变为 j_c.

为保证角动量守恒, 先将粒子、空穴对的角动量耦合成 $\boldsymbol{j}_d+\boldsymbol{j}_b=\boldsymbol{j}$, 再由角动量相加得 $\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}_c=\boldsymbol{j}_a$, 这表示在粒子、空穴对的产生过程中角动量守恒. 核内其他核子作为旁观者, 其总角动量为 S, 体系的总角动量为 J. 其角动量耦合状况由图 2.6 所示.

注意到空穴是在费米海下缺少核子, 它所磁量子数用 $-m_b$ 表示. 多个角动量耦合与各个角动量的耦合顺序有关, 但是不同耦合顺序得到相同总角动量的态之间可以通过一个幺正变换相联系 (曾谨言, 2001). 这时跃迁矩阵元可表示为

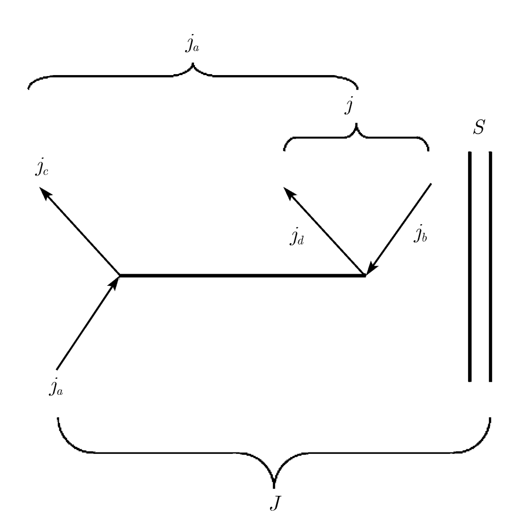


图 2.6　$\Delta n=2$ 过程中的角动量耦合关系示意图

$$
\begin{aligned}
\varXi_{\Delta n=2} &= \langle j_a || \sum_{l\mu} Y_{l\mu}^* Y_{l\mu} || j_c(j_d j_b) j \rangle \\
&= \sum_{j'} \hat{j}\hat{j}' \, W(j_a j_b j_c j_d, j' j) \langle j_a || \sum_{l\mu} Y_{l\mu}^* Y_{l\mu} || (j_c j_d) j_b j' \rangle \qquad (2.6.56)
\end{aligned}
$$

应用 Wigner-Eckart 定理, 并转换到非耦合表象中, (2.6.56) 式变为

$$
\begin{aligned}
\varXi_{\Delta n=2} &= \hat{j}_a \sum_{j'} \hat{j}\, \hat{j}' \, W(j_a j_b j_c j_d, j' j) \langle j_a m_a | \sum_{l\mu} Y_{l\mu}^* Y_{l\mu} | (j_c j_d) j' m' j_b - m_b \rangle \\
&= \hat{j}_a \sum_{j'} \hat{j}\, \hat{j}' \, W(j_a j_b j_c j_d, j' j) \sum_{m_a m_b} C_{j_c m_c j_d m_d}^{\;j' m'} C_{j' m' j_b - m_b}^{\;j_a m_a} \\
&\quad \times \langle j_a m_a || \sum_{l\mu} Y_{l\mu}^* Y_{l\mu} || (j_c j_d) j' m' j_b - m_b \rangle \qquad (2.6.57)
\end{aligned}
$$

同样, 产生空穴的算符 $(j_n, -m_b)$ 与湮没粒子算符之间相差因子 $(-1)^{j_b+m_b}$(Bohr, 1969), 当将空穴产生算符移到跃迁矩阵元的左边时, 将 $(-1)^{j_b+m_b}$ 因子带走, 于是上面矩阵元变为

$$
\begin{aligned}
\varXi_{\Delta n=2} &= \hat{j}_a \sum_{j' l} \hat{j}\, \hat{j}' \, W(j_a j_b j_c j_d, j' j) \sum_{m_c m_b} C_{j_c m_c j_d m_d}^{\;j' m'} C_{j' m' j_b - m_b}^{\;j_a m_a} (-1)^{j_b+m_b} \\
&\quad \times \langle j_b m_b | \langle j_a m_a | \sum_{\mu} (-1)^{\mu} Y_{l\mu} Y_{l-\mu} | j_c m_c \rangle | j_d m_d \rangle \\
&= \hat{j}_a \sum_{j' l} \hat{j}\, \hat{j}' \, W(j_a j_b j_c j_d, j' j) \sum_{m_a m_b \mu} C_{j_c m_c j_d m_d}^{\;j' m'} C_{j' m' j_b - m_b}^{\;j_a m_a} (-1)^{j_b+m_b+\mu}
\end{aligned}
$$

$$\times \langle j_b m_b | Y_{l\mu} | j_c m_c \rangle \langle j_a m_a | Y_{l-\mu} | j_d m_d \rangle \tag{2.6.58}$$

再次利用 Wigner-Eckart 定理和 Racah 系数的性质, 同样得到四个 Clebsh-Gordon 系数. 利用上面同样途径, 可以合并为一个 Racah 系数, 于是得到

$$\begin{aligned} \varXi_{\Delta n=2} = (-1)^{j_b+j_d} \sum_l \frac{1}{\hat{j}} \langle j_b || Y_l || j_c \rangle \langle j_a || Y_l || j_d \rangle \\ \times \sum_{j'} (2j+1)(2j'+1) W(j_a j_b j_c j_d, j'j) W(j_a j_b j_c j_d, j'l) \end{aligned} \tag{2.6.59}$$

利用 Racah 系数的正交性质,

$$\sum_e (2e+1)(2f+1) W(abcd, ef) W(abcd, eg) = \delta_{fg} \tag{2.6.60}$$

因此, 在 (2.6.59) 式中, 对 j' 求和后矩阵元化简为

$$\varXi_{\Delta n=2} = (-1)^{j_b+j_d} \frac{1}{\hat{j}} \langle j_b || Y_j || j_c \rangle \langle j_a || Y_j || j_d \rangle \tag{2.6.61}$$

代入球谐函数的约化矩阵元表示后, 得到 $\Delta n = 2$ 的迁过程的角动量矩阵元：

$$\varXi_{\Delta n=2} = \frac{(-1)^{j_a+j_d}}{4\pi \hat{j}} \hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d C_{j_a \frac{1}{2} j_b -\frac{1}{2}}^{j0} C_{j_c \frac{1}{2} j_d -\frac{1}{2}}^{j0} \tag{2.6.62}$$

对于费米子系统需要反称化. 它的反称化是减去交换粒子态 c 和 d 项, 反称化矩阵元是用下标 A 标记, 得到的反称化矩阵元为

$$\begin{aligned} \varXi^A_{\Delta n=2} = \langle j_a || \sum_{l\mu} Y^*_{l\mu} Y_{l\mu} || j_c (j_b j_d) j \rangle_A = \frac{(-1)^{j_b - j_c}}{4\pi} \frac{\hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d}{\hat{j}} \\ \times \left[C_{j_a \frac{1}{2} j_c -\frac{1}{2}}^{j0} C_{j_b \frac{1}{2} j_d -\frac{1}{2}}^{j0} - (-1)^{j_d - j_c} C_{j_a \frac{1}{2} j_d -\frac{1}{2}}^{j0} C_{j_b \frac{1}{2} j_c -\frac{1}{2}}^{j0} \right] \end{aligned} \tag{2.6.63}$$

假设 n 激子态角动量为 J 的概率是 $R_n(J)$, 则在 n 激子下, 取出 j_a 态的权重为 $R_{n-1}(S)R_1(j_a)/R_n(J)$, 角动量为 j_a 的粒子激发出角动量为 j 的粒子–空穴对, 自身角动量为 j_c 的概率为 $R_2(j)R_1(j_c)$, 粒子–空穴对的权重为 $R_1(j_b)R_1(j_d)/R_2(j)$.

由两体相互作用振幅模的平方可以得到激子态跃迁中的角动量因子 $x^J_+(n)$. 利用上述的无规相位近似, 可以将对 j_a, j_b, j_c, j_d 的求和移到得振幅模的平方之外, 到角动量因子 $x^J_+(n)$ 的表示为 (Zhang et al., 1994b)

$$x^J_+(n) = |\varXi^A_{\Delta n=2}|^2 = \frac{1}{16\pi^2 R_n(J)} \sum_S \sum_{j_a} (2j_a+1) R_1(j_a) R_{n-1}(S) F_+(j_a) \Delta(j_a J S) \tag{2.6.64}$$

这里符号 $\Delta(j_aJS)$ 表示这 3 个角动量需要满足角动量耦合的三角关系. 为了方便计算, 利用下面的标记:

$$F_+(j_a)=\sum_{jj_c}(2j_c+1)R_1(j_c)G_+(j_aj_cj) \tag{2.6.65}$$

其中

$$\begin{aligned}G_+(j_aj_cj)=&\frac{1}{2j+1}\sum_{j_bj_d}(2j_b+1)R_1(j_b)(2j_d+1)R_1(j_d)\\&\times\left[C_{j_a\frac{1}{2}j_c-\frac{1}{2}}^{\ j0}C_{j_b\frac{1}{2}j_d-\frac{1}{2}}^{\ j0}-(-1)^{j_d-j_c}C_{j_a\frac{1}{2}j_d-\frac{1}{2}}^{\ j0}C_{j_b\frac{1}{2}j_c-\frac{1}{2}}^{\ j0}\right]^2\end{aligned} \tag{2.6.66}$$

下面讨论 $\Delta n=-2$ 的情况, 这是用于 $n\geqslant 5$ 激子态的情况, 对应的跃迁状态是费米面上角动量为 j_a 的粒子 a 与费米面上的一个粒子 d 碰撞后, 将其碰撞到费米面下, 填充了一个空穴 b, 即湮没了一个粒子空穴对, 其角动量分别为 j_dj_b. 在碰撞后, a 粒子的角动量由 j_a 变为 j_c. 为保证角动量守恒, 先将粒子、空穴对的角动量耦合成 $\boldsymbol{j}_d+\boldsymbol{j}_b=\boldsymbol{j}$, 再由角动量相加得 $\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}_a=\boldsymbol{j}_c$, 这表示在粒子、空穴对的湮没过程中角动量守恒. 核内其他核子作为旁观者, 其总角动量为 S, 体系的总角动量为 J, 其角动量耦合状况由图 2.7 所示.

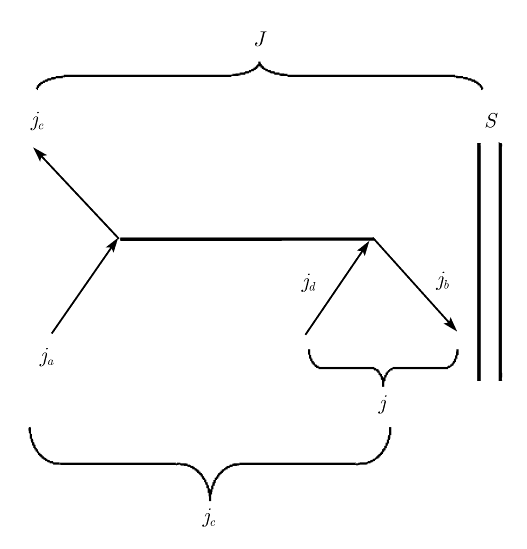


图 2.7　$\Delta n=-2$ 过程中的角动量耦合关系示意图

注意到空穴是在费米海下缺少核子, 它所磁量子数用 $-m_b$ 表示. 由于消灭粒子态 (j_n,m_b) 的算符与产生空穴态 $(j_n,-m_b)$ 的算符之间相差因子 $(-1)^{j_b+m_b}$, 类似于上面 $\Delta n=2$ 的推导, 这时跃迁矩阵元可被给出为

$$\Xi_{\Delta n=-2}=\langle j_a(j_dj_b)j||\sum_{l\mu}Y_{l\mu}^*Y_{l\mu}||j_c\rangle$$

$$= \frac{(-1)^{j_c+j_d}}{4\pi\hat{j}}\hat{j}_a\hat{j}_b\hat{j}_c\hat{j}_d C_{j_a\frac{1}{2}j_c-\frac{1}{2}}^{j0} C_{j_b\frac{1}{2}j_d-\frac{1}{2}}^{j0} \tag{2.6.67}$$

对于消灭粒子–空穴对的过程 ($\Delta n = -2$), 假设 n 激子态角动量为 J 的概率是 $R_n(J)$, 则在 n 激子下, 取出 j_c 态的权重为 $R_{n-3}(S)R_1(j_c)/R_n(J)$, 角动量为 j_a 的粒子激发出角动量为 j 的粒子–空穴对, 自身角动量为 j_a 的概率为 $R_2(j)R_1(j_a)$, 粒子–空穴对的权重为 $R_1(j_b)R_1(j_d)/R_2(j)$. 为了方便计算, 利用下面的标记, $X_-^J(n)$ 角动量因子的表示为

$$x_-^J(n) = |\varXi_{\Delta n=-2}^A|^2 = \frac{1}{16\pi^2 R_n(J)}\sum_S\sum_{j_c}(2j_c+1)R_1(j_c)R_{n-3}(S)F_-(j_c)\Delta(j_cJS) \tag{2.6.68}$$

在考虑了反称化, 交换 j_a 和 j_d 后, 利用 Clebsh-Gordon 系数的对称性, 得到

$$F_-(j_c) = \sum_{jj_a}(2j_a+1)R_1(j_a)G_-(j_aj_cj) \tag{2.6.69}$$

其中

$$G_-(j_aj_cj) = \frac{1}{2j+1}\sum_{j_bj_d}(2j_b+1)R_1(j_b)(2j_d+1)R_1(j_d) \times\left[C_{j_a\frac{1}{2}j_c-\frac{1}{2}}^{j0}C_{j_b\frac{1}{2}j_d-\frac{1}{2}}^{j0} - (-1)^{j_a-j_d}C_{j_a\frac{1}{2}j_b-\frac{1}{2}}^{j0}C_{j_c\frac{1}{2}j_d-\frac{1}{2}}^{j0}\right]^2 \tag{2.6.70}$$

在 Clebsh-Gordon 系数中, 当两个磁量子数分别为 $\pm1/2$ 时, Clebsh-Gordon 系数有简单的表示 (Brink et al., 1968).

当 $j_1+j_2+j=$ 偶数时

$$C_{j_1\frac{1}{2}j_2-\frac{1}{2}}^{j0} = \frac{2\hat{j}}{\hat{j}_1\hat{j}_2}\varLambda(j_1j_2j)(-1)^{j_1-j_2+\frac{1}{2}(j_1+j_2+j-2)} \times\frac{[(j+j_1+j_2)/2]!}{[(j_1+j_2-j)/2]![(j+j_1-j_2-1)/2]![(j+j_2-j_1-1)/2]!} \tag{2.6.71}$$

当 $j_1+j_2+j=$ 奇数时

$$C_{j_1\frac{1}{2}j_2-\frac{1}{2}}^{j0} = \frac{2\hat{j}}{\hat{j}_1\hat{j}_2}\varLambda(j_1j_2j)(-1)^{j_1-j_2+\frac{1}{2}(j_1+j_2+j-1)} \times\frac{[(j+j_1+j_2+1)/2]!}{[(j_1+j_2-j-1)/2]![(j+j_1-j_2)/2]![(j+j_2-j_1)/2]!} \tag{2.6.72}$$

其中

$$\varLambda(j_1j_2j) = \sqrt{\frac{(j_1+j_2-j)!(j_1+j-j_2)!(j_2+j-j_1)!}{(j_1+j_2+j+1)!}} \tag{2.6.73}$$

由于 j_1, j_2 总是半整数, 所以 $j_1 \pm j_2$ 和 j 总为整数. 上面都是整数的阶乘. 可将 j_1+j_2+j 为偶数或奇数的情况进行奇偶分类, 这样就可以在 $G_+(j_a j_c j)$ 和 $G_-(j_a j_c j)$ 中, 直接应用上面的 Clebsh-Gordon 系数表示简化程序的编写和计算.

下面需要对角动量求和取值范围进行讨论. 由光学模型计算的吸收截面 $\sigma_a^{J\pi}$ 的来确定最大的角动量值, 由于随着角动量加大, J 道的吸收截面会逐渐减小, 在一定大的 J 值下 $\sigma_a^{J\pi}$ 值达到可以忽略程度, 例如小于一个微靶 (μb), 这时给出最大的角动量值 $J_{\max}$. 光学模型计算表明, 入射能量越高, $J_{\max}$ 值越大, 因此总角动量 J 的取值范围是与入射能量有关的. 另外, 在低能轻核反应中, 仅需要考虑激子数 $n=3$ 的态时, 这对应着仅一个空穴态. 而对于 1p 壳核的空穴态角动量只能是 $j_b=1/2, 3/2$. 因此, 由轻核的基态自旋可以确定上述旁观者角动量 S 的取值范围.

以 $\Delta n=2$ 为例, 在表 2.5 中给出轻核基态自旋 I 和 S 的取值范围. 在确定了 $J_{\max}$ 之后, 由于产生的空穴角动量 j_b 在 1p 壳, 由此可以确定 S 的取值, 就可以由角动量耦合的三角关系 $\Delta(j_a JS)$ 确定 j_a 的取值范围. 而粒子态 j_c, j_d 的取值范围是由 CG 系数非 0 条件确定.

表 2.5　n=3 激子态中 Δn=2 模式下 S 的取值范围

核素	I	J	S	核素	I	J	S
^{6}Li	1	半整数	1/2~5/2	^{11}B	3/2	整数	1~3
^{7}Li	3/2	整数	1~3	^{12}C	0	半整数	1/2~3/2
^{9}Be	3/2	整数	1~3	^{14}N	1	半整数	1/2~5/2
^{10}B	3	半整数	5/2~9/2	^{16}O	0	半整数	1/2~3/2

在得到上面的角动量因子 $x^J_{\pm,0}(n)$ 之后, 还要让它们满足在物理上的自恰条件. 这就是在对所有角动量的求和后, 与角动量有关的激子模型主方程应该自动退化为与角动量无关的激子模型主方程, 考虑到每个角动量 J 有 $2J+1$ 个磁量子数, 这个归一化条件可以表示为

$$\sum_J (2J+1)R_n(J)x^J_\nu = 1, \quad \nu = \pm, 0 \tag{2.6.74}$$

由此可以得到角动量因子 $x^J_{\pm,0}(n)$ 的确切值. 同时也有

$$\sum_J (2J+1)W^J_{\mathrm{T}}(E,n) = W_{\mathrm{T}}(E,n) \tag{2.6.75}$$

因此与角动量有关的激子模型主方程自动退化为普通激子模型的主方程. 利用这一个归一化条件, 可以免除去确定剩余相互作用强度以及对径向积分所产生的常数的不确定系数值的问题. 至于与角动量有关的激子模型中寿命方程的求解, 是需要对每个角动量 J 的寿命方程逐一求解而已.

作为例子, 表 2.6 中给出 n+^{6}Li 在 E_{n}=14MeV, 激子态 $n=3$ 时, 用 (2.6.64) 式计算的与角动量有关的预平衡、平衡态占有概率, 以及各角动量态下吸收截面

$\sigma_a^{J\pi=\pm1}$ 的结果. 吸收截面是由光学模型计算得到的, 而预平衡占有概率 P^J 的计算公式为 (2.5.10) 式, 平衡态占有概率 Q^J 的计算公式为 (2.5.11) 式. 从表中的结果可以看出, 在 n+^{6}Li 核反应过程中, 预平衡占有概率 P^J 在各种角动量态下都在百分之九十以上, 平衡态占有概率都非常小. 在角动量为 $j = 1.5 \sim 3.5$ 时, 是吸收截面的峰值.

表 2.6　n+^{6}Li 在 n=3 和 E_n= 14MeV 时预平衡平衡态占有概率及吸收截面

J	P^J	Q^J	$\sigma_a^{J\pi=1}$	$\sigma_a^{J\pi=-1}$
0.5	0.9748	0.0252	39.24	36.70
1.5	0.9603	0.0397	96.45	113.19
2.5	0.9617	0.0383	112.75	124.52
3.5	0.9738	0.0262	73.24	93.26
4.5	0.9878	0.0122	48.40	17.47
5.5	0.9964	0.0036	4.31	11.21
6.5	0.9994	0.0006	2.71	1.15
7.5	0.9999	0.0001	0.31	0.71
8.5	1.0000	0.0000	0.19	0.08
9.5	1.0000	0.0000	0.02	0.05
10.5	1.0000	0.0000	0.01	0.01

注：表中吸收截面单位是 mb.

如果采用下面形式对各角动量的平均, 得到平均预平衡占有的百分比：

$$\bar{P} = \sum_{J\pi} \sigma_a^{J\pi} P^J \Big/ \sum_{J\pi} \sigma_a^{J\pi} \tag{2.6.76}$$

由此得预平衡占有百分比为 $\bar{P} = 96.84\%$, 而平衡态占有百分比仅为 $\bar{Q} = 1 - \bar{P} = 3.16\%$.

表 2.7 中给出 n+^{16}O 在 E_n=14MeV, 与表 2.6 相同内容的计算结果. 从表的结果看出, 在 n+^{16}O 核反应过程中, 预平衡占有概率 P^J 在各种角动量态下都在百分

表 2.7　n+^{16}O 在 n=3 和 E_n=14MeV 时预平衡平衡态占有概率及吸收截面

J	P^J	Q^J	$\sigma_a^{J\pi=1}$	$\sigma_a^{J\pi=-1}$
0.5	0.8697	0.1303	42.38	37.94
1.5	0.7407	0.2593	84.76	72.56
2.5	0.6849	0.3151	146.07	108.84
3.5	0.6592	0.3408	194.77	65.89
4.5	0.6407	0.3593	10.10	82.36
5.5	0.6903	0.3097	12.12	1.86
6.5	0.7793	0.2207	0.37	2.17
7.5	0.8700	0.1300	0.42	0.07
8.5	0.9427	0.0573	0.01	0.08
9.5	0.9798	0.0202	0.02	0.00

注：表中吸收截面单位是 mb.

之六十以上, 平衡态占有概率比较小. 对各角动量的平均后得到平均预平衡占有百分比为 $\bar{P} = 70.03\%$, 平衡态平均占有百分比仅为 $\bar{Q} = 29.97\%$.

这些例子充分说明, 在中子引发轻核反应中, 预平衡反应机制是最主要的成分. 平衡态仅占很小比例. 因此, 仅用核反应的平衡态统计理论是不能够描述好轻核反应的行为的.

2.7 宽度涨落修正因子

在平衡态发射过程的 Hauser-Feshbach 理论模型中, 有三个部分独立应用了光学模型计算的穿透系数. 换句话说这三个部分都独立用到了 $\boldsymbol{S}$ 矩阵的平均值. 在这种情况下, 在平均意义上, 给出的截面计算应该是

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_b} = \sum_{J\pi} \langle \sigma_a^{J\pi} \rangle \frac{\langle T_b^{J\pi}(E^*, \varepsilon_b) \rangle}{\langle T_\mathrm{T}^{J\pi}(E^*) \rangle} \tag{2.7.1}$$

而我们要求的平均是要对 (2.7.1) 式中整个三个物理量的平均值, 即为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_b} = \sum_{J\pi} \left\langle \sigma_a^{J\pi} \frac{T_b^{J\pi}(E^*, \varepsilon_b)}{T_\mathrm{T}^{J\pi}(E^*)} \right\rangle \tag{2.7.2}$$

由于在一个具有涨落行为的统计过程中, (2.7.1) 和 (2.7.2) 式的平均值彼此并不相同, 表明统计行为具有相干性, 因而会产生不同反应道之间的耦合效应. 要得到在 (2.7.2) 式表示下的平均值, 需要引入修正因子：

$$W_{ab}^{J\pi}(E^*) = \left\langle \sigma_a^{J\pi} \frac{T_b^{J\pi}(E^*, \varepsilon_b)}{T_\mathrm{T}^{J\pi}(E^*)} \right\rangle \Big/ \langle \sigma_a^{J\pi} \rangle \frac{\langle T_b^{J\pi}(E^*, \varepsilon_b) \rangle}{\langle T_\mathrm{T}^{J\pi}(E^*) \rangle} \tag{2.7.3}$$

在核反应平衡态统计理论中称 (2.7.3) 式为宽度涨落修正因子 (丁大钊等, 2005), 由 A. M. Lane 和 Moldauer 等给出了宽度涨落修正因子的理论公式表示 (Lane et al., 1957; Moldauer, 1980). 因此, 带宽度涨落修正的 Hauser-Feshbach 理论公式表示是

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_b} = \sum_{J\pi} \sigma_a^{J\pi} \frac{T_b^{J\pi}(E^*, \varepsilon_b)}{T_\mathrm{T}^{J\pi}(E^*)} W_{ab}^{J\pi}(E^*) \tag{2.7.4}$$

显然, 带宽度涨落修正因子是与 $J\pi$ 有关的. 另外, 需要指出的是, $\boldsymbol{S}$ 矩阵的涨落行为是在平衡态复合核的模型理论上建立的, 是由复合核的长寿命导致的低能核反应截面窄共振现象所证实的. 然而, 在轻核反应中, 有相当多剩余核的能量能级宽度达到几百千电子伏特, 甚至是在兆电子伏特的量级, 表明剩余核的寿命很短, 不属于平衡态核反应过程 (注：10keV 相当于 6.6×10^{-20}s, 相当于预平衡反应过程). 因而不满足上述能级宽度涨落修正的条件, 不需要考虑能级宽度涨落修正. 而对常

寿命的能级, 例如, 在 ^{10}B(n, n′) 的核反应过程中, ^{10}B 的前五条激发态分立能级在能量上都不能发射任何粒子, 只能通过发射 γ 光子退激, 这些能级的寿命都很长, 需要考虑能级宽度涨落修正, 而第十激发态分立能级虽然在能量上允许发射发射 α 粒子, 但是由于角动量和宇称守恒的限制, 禁戒了 α 粒子的发射, 因而只能通过发射 γ 光子退激, 这条能级也属于平衡态发射过程. 一般来说, 剩余核的能级可以继续发射粒子时, 能级宽度都很大, 不需要考虑能级宽度涨落修正, 而仅能通过 γ 退激的能级需要考虑能级宽度涨落修正. 而在中重核反应中的一次粒子发射到剩余核的分立能级后都是通过 γ 退激的, 都需要考虑能级宽度涨落修正. 这又是轻核反应不同于中重核的核反应不同之处.

根据 χ^2 分布的统计理论, 可以得到能级宽度涨落修正的计算公式 (丁大钊等, 2005):

$$
\begin{aligned}
&W^{J\pi}_{\alpha lj,\beta l'j'}\\
&=\frac{1}{2}(1+2\delta_{\alpha lj,\beta l'j'})\int_0^1 \mathrm{d}y\mathrm{e}^{-\frac{T^{J\pi}_{\mathrm{C}}}{2T^{J\pi}_{\mathrm{T}}}\left(\frac{1}{y}-1\right)}\frac{1}{y^2}\left[1+\frac{T^{J\pi}_{\alpha lj}}{T^{J\pi}_{\mathrm{T}}}\left(\frac{1}{y}-1\right)\right]^{-1}\\
&\quad\times\left[1+\frac{T^{J\pi}_{\beta l'j'}}{T^{J\pi}_{\mathrm{T}}}\left(\frac{1}{y}-1\right)\right]^{-1}\prod_{rl''j''}\left[1+\frac{T^{J\pi}_{rl''j''}}{T^{J\pi}_{\mathrm{T}}}\left(\frac{1}{y}-1\right)\right]^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{2.7.5}
$$

其中, $T^{J\pi}_{\mathrm{C}}$ 为总连续发射 T 因子, $T^{J\pi}_{\alpha lj}$ 是 α 反应道的穿透因子.

由于在 (2.7.5) 式中括号项中包含有 δ 函数, 对复合核弹性散射道取值为 3, 因此能级宽度涨落修正对复合核弹性散射道起着增大作用, 而对非弹性散射均取值为 1. 为了说明宽度涨落修正的定量概念, 由表 2.8 给出了 $E_{\mathrm{n}}=3\sim 8\mathrm{MeV}$ 对 n+^{10}B 反应中对复合核弹性散射以及前五条激发能级宽度涨落修正效应的计算结果. 由于宽度涨落修正对各 $J\pi$ 道分别给以不同的贡献, 这里复弹截面和非弹截面分别用了考虑宽涨落修正后的 (2.7.4) 式与不考虑宽度涨落修正 (2.7.1) 式. 表中值为二者截面之比来说明考虑宽度涨落修正的综合效应.

表 2.8 n+^{10}Be 在几个中子入射能下的宽度涨落修正值

	中子入射能量				
能级	3MeV	4MeV	5MeV	6MeV	8MeV
0.0000(3$^+$)	1.0632	1.1929	1.3724	1.5210	1.6931
0.7184(1$^+$)	0.4287	0.4973	0.6134	0.7245	0.8501
1.7401(0$^+$)	0.5134	0.4848	0.5935	0.7132	0.8450
2.1543(1$^+$)	0.6444	0.5119	0.6012	0.7247	0.8556
3.5871(2$^+$)		0.8506	0.6952	0.7227	0.8646
4.7740(3$^+$)				0.8285	0.8539

表中的空格表示, 在对应的中子入射能下该能级的非弹性散射道尚未开放. 由结果看出, 宽度涨落修正是增大复合核弹性散射截面而减少所有非弹性散射截面.

中子入射能越高, 复合核弹性散射截面修正因子越大, 而非弹修正因子小于 1, 随入射能量提高有趋向 1 的趋势.

对于轻核反应, 在很宽的中子入射能区内, 复弹截面值仍然有明显的值. 例如, 在 n+^{10}B 反应中, 当 $E_{\rm n}$ = 3MeV 时, 考虑了宽度涨落修正后, 复合核弹性散射截面增加了约 26mb, 而在 $E_{\rm n}$ =8MeV 时, 考虑了宽度修正后却增加了约 65mb. 显然增大的效应是相当明显的. 对比中重核 n+^{54}Fe, 考虑了宽度修正因子后, 在 $E_{\rm n}$ =3MeV 时, 复弹截面增加了约 240mb, 而在 $E_{\rm n}$ =8MeV 时, 复弹截面仅增加了不到 0.4mb(丁大钊等, 2005), 这是由于中重核的能级密, 而且存在连续谱发射, 激发能高时, 退激到基态的概率非常小. 而轻核反应中不存在连续谱发射, 能级很稀少. 因此, 宽度涨落修正在很宽能区内对轻核反应的修正效应是比中重核要明显的多.

能级宽度涨落修正的加入, 使 Hauser-Feshbach 模型变得完美. 这种模型理论已能很好再现实验值. 在光学模型计算中, 只有用包含宽度涨落修正的 Hauser-Feshbach 模型理论来计算复合核弹性散射截面, 才能给出正确的弹性截面 σ_{el} 及去弹截面 $\sigma_{\rm non}$ 值, 并与实验有相当满意的符合 (申庆彪等, 1980).

2.8　分立能级的粒子发射

由于在轻核反应中, 次级粒子都是从分立能级发射的, 用 Hauser-Feshbach 理论中所使用的发射率的分支比来计算.

下面讨论从分立能级发射到分立能级的分支比计算公式. 以二次粒子发射为例, 如果从复合核发射第一粒子 b_1 到其剩余核的 k_1 能级, 其反应截面记为 $\sigma_{k_1}(n,b_1)$, 而 k_1 能级又能继续发射第二粒子 b_2 到其剩余核的 k_2 能级. 其中还包含 γ 退激的竞争. 当 k_1 能级的自旋宇称为 j_{k1},π_{k_1},k_2 能级的自旋宇称为 j_{k2},π_{k_2} 时, 发射概率的求和可表示为

$$T_{b_2}^{j_{k_1}\pi_{k_1}\to j_{k_2}\pi_{k_2}}(E_{k_1}\to E_{k_2})=\sum_l f_l(\pi_{k_1},\pi_{k2})\sum_{j=|l-s_{b_2}|}^{l+s_{b_2}} T_{jl}\varDelta(j_{k_1}j_{k_2}j) \tag{2.8.1}$$

其中, s_{b_2} 是发射 b_2 粒子的自旋, 而 $\varDelta(j_{k_1},j_{k_2},j)$ 是要求三个角动量要满足所三角关系, 其中保证宇称守恒的 f_l 因子已由 (2.4.18) 式给出.

可以验证, ^{6}Li 的第 2 激发能级 3.56288(0^+) 在能量上允许发射氘核, 但是这时 $j_{k_1}=0$, $j_{k_2}=0$, 因此角动量要满足所三角关系给出 $j=0$, 由于 $s_{k_2}=1$, 由 (2.8.1) 式给出对 l 求和的值仅可以是 $l=1$, 又知 $\pi_{k_1}=0$, $\pi_{k_2}=0$, 因此 $f_l(\pi_{k_1},\pi_{k_2})=0$, 得到穿透概率为 0, 因此从 ^{6}Li 的第 2 激发能级发射氘核的反应过程被禁戒, 仅能通过 E_1 的 γ 退激到 ^{6}Li 的基态. 而 ^{6}Li 的第 1 激发能级 2.186(3^+) 在能量上也允许

发射氘核, 但这时 $j_{k_1}=3$, 由角动量要满足所三角关系给出 $j=3$, $f_l(\pi_{k_1},\pi_{k_2})=1$ 要求 l 必须为偶数, 由 (2.8.1) 式给出对 l 求和的值可以是 $l=2,4$, 因此从 ^{6}Li 的第 1 激发能级发射氘核不被禁戒.

这时, 从 k_1 能级发射粒子的总概率为

$$T_{\text{total}}^{j_{k_1}\pi_{k_1}}(E_{k_1})=W_\gamma^{j_{k_1}\pi_{k_1}}(E_{k_1})+\sum_{b_2}\sum_{k_2}T_{b_2}^{j_{k_1}\pi_{k_1}\to j_{k_2}\pi_{k_2}}(E_{k_1}\to E_{k_2}) \tag{2.8.2}$$

其中包括了 γ 退激的概率 $W_\gamma^{j_{k_1}\pi_{k_1}}(E_{k_1})$. 由此可得从 k_1 能级发射粒子的各种反应途径的分支比, 其中 γ 退激的分支比为

$$R_\gamma^{k_1}(E_{k_1})=W_\gamma^{j_{k_1}\pi_{k_1}}(E_{k_1})/T_{\text{total}}^{j_{k_1}\pi_{k_1}}(E_{k_1}) \tag{2.8.3}$$

因此由 γ 退激来结束核反应过程的反应道截面为

$$\sigma_{k_1}(n,b_1\gamma)=\sigma_{k_1}(n,b_1)\cdot R_\gamma^{k_1}(E_{k_1}) \tag{2.8.4}$$

发射粒子 b_2 到其剩余核的 k_2 能级的分支比为

$$R_{b_2}^{k_1\to k_2}(E_{k_1})=W_\gamma^{j_{k_1}\pi_{k_1}\to j_{k_2}\pi_{k_2}}(E_{k_1}\to E_{k_2})/T_{\text{total}}^{j_{k_1}\pi_{k_1}}(E_{k_1}) \tag{2.8.5}$$

而从 k_1 能级发射粒子的 b_2 到其剩余核的 k_2 能级的截面为

$$\sigma_{k_1\to k_2}(n,b_1b_2)=\sigma_{k_1}(n,b_1)\cdot R_{b_2}^{k_1\to k_2}(E_{k_1}) \tag{2.8.6}$$

一般来说, 如果存在二次粒子发射过程, 则 γ 退激的分支比一般会比粒子发射分支比小得多, 只有所有二次粒子发射的概率全被能量、角动量宇称禁戒时, 就仅有 γ 退激过程了.

γ 辐射的发射率也是用细致平衡原理 (Detail Balance) 得到, 其中 Brink-Axel 的假设被用来处理激发态的光子吸收截面. 由于是分立能级之间的 γ 退激过程, 因此发射 γ 的能量也是确定的 $\varepsilon_\gamma=E_{k_1}\to E_{k_2}$ 其 γ 辐射的发射率可表示为

$$W_\gamma^{j_{k_1}\pi_{k_1}\to j_{k_2}\pi_{k_2}}(E_{k_1}\to E_{k_2})=\frac{2\varepsilon_\gamma^2}{\pi(\hbar c)^2}\sigma_{abs}^\gamma(j_{k_1}\pi_{k_1}\to j_{k_2}\pi_{k_2},\varepsilon_\gamma) \tag{2.8.7}$$

其中 c 为光速. σ_{abs}^γ 是 γ 的吸收截面, 是由下面形式给出：

$$\sigma_{abs}^\gamma(j_{k_1}\pi_{k_1}\to j_{k_2}\pi_{k_2},\varepsilon_\gamma)=\pi\lambda\!\!\!^-{}^2T_{xl}(\varepsilon_\gamma) \tag{2.8.8}$$

其中波长为 $\lambda\!\!\!^-=\hbar c/\varepsilon_\gamma$. 穿透因子可表示为

$$T_{xl}(\varepsilon_\gamma)=2\pi f_{xl}(\varepsilon_\gamma)\varepsilon_\gamma^{2l+1} \tag{2.8.9}$$

$f_{xl}(\varepsilon_\gamma)$ 是与 γ 能量有关的 γ 跃迁强度函数 (Young, 1992). l 表示多级性,$x = E$ 或 M 标定电或磁跃迁. 强度函数有多种表示, 常用的经验表示形式有, 对于电巨偶极跃迁 $E_1(l = 1)$ 强度函数采用了标准 Lorentzian 型 (Brink, 1962), 它可为单峰或双峰表示

$$f_{E1}(\varepsilon_\gamma) = \sum_i K_{E1} \frac{\sigma_i \varepsilon_\gamma \Gamma_i^2}{(\varepsilon_\gamma^2 - E_i^2)^2 + \varepsilon_\gamma^2 \Gamma_i^2} \tag{2.8.10}$$

其中 σ_i, Γ_i, E_i 分别为光子吸收截面、共振宽度及共振位置等参数, 而经验参数 K_{E1} 为

$$K_{E1} = 8.68 \times 10^{-8} \mathrm{mb}^{-1}\mathrm{MeV}^{-2} \tag{2.8.11}$$

这时要求 $|j_{k_1} - j_{k_2}| = 0, 1, 2$, $\pi_{k_1} = \pi_{k_2}$.

对于 $M_1(l = 1)$ 磁偶极跃迁的强度函数采用的经验系统学公式是

$$f_{M1}(\varepsilon_\gamma) = C_{M1} 9.0 \times 10^{-13} \varepsilon_\gamma^2 A^{1.27} \tag{2.8.12}$$

其中 A 是核质量数. 这时要求 $|j_{k_1} - j_{k_2}| = 0, 1, 2$, $\pi_{k_1} = -\pi_{k_2}$.

对于 $E_2(l = 2)$ 跃迁的强度函数用单峰 Lorentzian 型的形式：

$$f_{E2}(\varepsilon_\gamma) = C_{E2} 5.22 \times 10^{-8} \frac{\sigma_0 \varepsilon_\gamma^{-1} \Gamma^2}{(\varepsilon_\gamma^2 - E^2)^2 + \varepsilon_\gamma^2 \Gamma^2} \tag{2.8.13}$$

其中 $E = 63^{-1/3}\mathrm{MeV}$, $\Gamma = 6.11 - 0.021A\mathrm{MeV}$, $\sigma_o = 1.5 \times 10^{-4} Z^2 E^2 A^{-1/3}$. 这时要求 $|j_{k_1} - j_{k_2}| = 1, 2, 3$, $\pi_{k_1} = -\pi_{k_2}$. C_{E_2} 是可调参数.

有了上述模式的 γ 的退激的跃迁强度, 就可以得到分立能级的 γ 退激概率. 需要指出的是, 对更高的模式, 例如, M_2, E_3, M_3 等, 目前还缺少有效的系统学公式, 而在实际计算中, 例如 ^{12}C 的第 3 激发能级是通过 E_3 模式的 γ 退激与 α 粒子发射竞争, 由于缺少准确的 E_3 模式的 γ 退激系统学公式, 还不能准确计算这个竞争过程, 对高模式的 γ 退激公式需要做进一步研究.

由此可以分析由 LUNF 程序计算得到的一些反应途径粒子发射的概率为 0 的原因. 虽然在能量上一个分立能级允许发射某种粒子, 但是它们不是由角动量宇称的限制而禁戒, 或是由库仑位垒所限制而造成, 或者是其他粒子出射道的竞争概率太大等原因所致.

由 (2.8.1) 式看出, 计算的二次粒子发射的概率大小是对穿透因子求和的结果. 在第 1 章中曾经介绍过在 n + ^{6}Li →^{7}Li* → d + ^{5}He 核反应过程中, 当中子入射能量足够高时, 发射一个 d 核, 剩余核 ^{5}He 处于它的第 3 激发态 16.84MeV 分立能级时, 可以出现 ^{5}He → d + t 核反应, 因此属于 (n,2dt) 反应道, 阈能值为 22.24MeV. 由于要发射氘核到 ^{5}He 的高激发态, 因此氘核的发射能量必须足够低, 这时的穿透因子值很小, 计算出的发射概率要比发射氘核到 ^{5}He 的基态的概率小好几个数量

级. 虽然在程序中考虑了这种反应途径, 但是中子入射能量到 30MeV 时, 计算出的 (n,2dt) 道的截面仍然小的可以被忽略. 其他轻核的反应中类似情况还有许多, 这表明虽然一些反应道在能量上允许开放, 但是竞争力太弱, 以致很难观测到这种反应途径的出现.

对于三次粒子以上的发射过程, 完全可以用上述方式得到发射分支比的公式表示, 并得到对应的各反应途径分反应方面值.

由于轻核反应中, 所有的次级粒子发射都是通过分立能级发射的, 而每个分立能级都有自己独特的自旋宇称. 换句话说, 每条能级都有自己独特的内禀态结构. 这条能级作为无论是几次粒子发射的剩余态时, 它总是保持相同的内禀态结构, 尽管多次粒子发射后其核素的运动状态会有明显地不同, 自旋取向也会有所不同. 严格来说, 从一个核素的 k_1 能级发射粒子到另一个核素的 k_2 能级可能都会有不同的角分布, 这就像裂变碎片在通过裂变位垒上的各能级态时, 会出现裂变碎片的角分布状态一样, 这被称为玻尔道理论. 但是, 目前在对分立能级之间粒子发射的角分布的研究还极为欠缺. 因此在目前在理论模型计算中, 这种次级粒子发射都是采用了各向同性近似. 这种近似的计算结果可以比较满意地再现实验测量数据, 这也可能是对自旋取向的平均效应. 当然, 这也是轻核反应中的一个与核结构有关的有待继续深入研究的课题.

参 考 文 献

丁大钊, 叶春堂, 赵志详, 等. 2005. 中子物理学–原理, 方法与应用. 北京: 原子能出版社.

申庆彪. 2005. 低能和中能核反应理论. 上册. 北京: 科学出版社.

申庆彪, 赵小麟, 顾英圻, 等. 1980. 中子能量为 1keV 到 20MeV 铀、钚同位素的光学模型计算//核反应理论方法及其应用文集. hsj-78228(11js).

孙小军. 2007. 博士论文 O571. 421. 私人通讯.

王竹溪, 郭敦仁. 1965. 特殊函数论. 北京: 科学出版社.

曾谨言. 2001. 量子力学. 卷 II. 第 3 版. 北京: 科学出版社.

Barnett A B, et al. 1974. Coulomb wave functions for all Real η and ϕ. Computer Physics Communication. 8: 377-395.

Blann M. 1968. Extensions of griffin's statistical model for medium-energy nuclear reaction. Phys. Rev. Lett., 21: 1357.

Blann M. 1975. Ann. Rev. Nucl. Sci., 25: 123.

Bohr A, Mottelson B R. 1969. Niclear structure. New York: W A, Benjamin Inc., 1.

Brink D M. 1962. Nucl. Phys., 4: 215.

Brink D M, Satchler G R. 1968. Angular momemtum. Oxford: Clarendon Press: 138.

Cai C H. 2006. MEND: A program for calculating the complete set of nuclear data of medium-heavy niclei in a medium-low energy region. Nucl. Sci. Eng., 153: 93.

Carlson B T. 1996. The optical model and ECIS95. Proc. Of the Workshop Nuclear Reaction Data and Nuclera Reactor. ICTP, Trieste, Italy, 15 April-17 May 1996, World Science Press.

Cline K, Blann M. 1971. The pre-equilibrium statistical model: description of the nuclear equilibration process and oaramaterization of the model. Nucl. Phys., A 172: 225.

Chadwick M B, Oblozinsky P. 1992. Particle-hole state densities with linear momentum and angular distribution in pre-eguilibrium reactions. Phys. Rev., C46: 2028.

Delaroche J P, Wang Y, Rapaport J. 1989. Phys. Rev., C39: 391.

Dobes J, Betak E. 1976. A statistical derivation of the density of final states for the exciton model. Nucl. Phys., A272: 353.

Ericson T. 1960. The statistical model and nuclear level densities. Adv. in Phys., 9: 425.

Griffin J J. 1966. Statistical model of intermadiate structure. Phys. Rev. Lett., 17(17): 418.

Gruppelaar H. 1983. Level density in unified pre-equilibrium and eqilibrium models. Proc. Conf. IAEA Advisory Group Meeting on Basic and Applied Problem of Nuclear Level Densities. Upton New York, April 11~15 1983, BNL-NCS-51694: 143.

Hamermesh M. 1962. Group theory and its application to physical problem. Argome National Laboratory, London; Addison-Wesley: 27.

Hasse R M, Schuck P. 1985. Nucl. Phys., A 438: 157.

Hauser W, Feshbach H. 1952. The inelastic scattering of neutrons. Phys. Rev., 87: 366.

Kalbach C. 1973. Residual two-body matrix elements for pre-equilibrium calculations. Nucl. Phys., A210: 590.

Kalbach C. 1978. Exciton dependence of the griffin model two-body matrix element. Z. Phys., A278: 319.

Kalbach C. 2006. Missing final states and the spectral endpoint in exciton model calculations. Phys. Rev., C73: 024614.

Koning A J, Delaroche P J. 2003. Local and global nucleon optical models from 1keV to 200MeV. Nucl. Phys., A713: 231.

Lane A M, Lynn J E. 1957. Fast neutron capture below 1MeV: The cross sections for ^{238}U and ^{232}Th. Prc. Phys. Soc., A70: 557.

Melkanoff M A, Sawada T, Raynal J. 1966. Nuclear optical model calculations method in computational physics. //Alder B, Fernbach S, Rotenberg M. Advances in reseach and application. New York: Academic Press, 6: 1-80.

Moldauer P A. 1980. Statistics and the average cross section. Nucl. Phys., A344: 185.

Newton J O, et al. 2004. Phys. Rev. C70: 024605.

Numerov B V. 1924. A method of extrapolation of pertubations. Mon. Not. R. Astron. Soc., 84: 592.

Obloginski P. 1987. Pre-equilibrium γ rays with angular momentum coupling. Phys. Rev., C 35: 407.

Plyuyko V A, Prokopets G A. 1978. Emission of γ-rays in the Exciton model. Phys. Lett., 76B: 253.

Ring P, Schuck P. 1980. The nuclear many body problem. New York: Springer.

Rose M E. 1963. 角动量理论. 上海: 上海科学出版社.

Shen Q B. User manual of APMN06 Code. To be published.

Tamura T. 1965. Analysis of the scattering of nuclear particles by collective nuclei in terms of the coupled channel calculation. Rev. Mod. Phys., 37: 679.

Weisskopf V F, Ewing D H. 1940. On the yield of nuclear reactions with heavy elements. Phys. Rev., 57: 472.

Weisskopf V F. 1937. Statistics and nuclear reactions. Phys. Rev., 52: 366.

Williams F C. 1970. Intermediate state transition rates in the Griffin model. Phys. Lett., 31B: 184.

Williams F C. 1971. Particle-hole state density in the uniform soacing model. Nucl. Phys., A 166: 231.

Young P G, Arther E D, Chadwick M B. 1992. La-12343-MS.

Zhang J S, Yang X Z. 1988. The Pauli exclussion effect in multi paricle and hole state densities. Z. Phys., A 329: 69.

Zhang J S. 1991. A semi-classical theory of multi-step nuclear reaction processes. Proc. Of Beijing Inter. Sympo. On Fast Neutron Physics, Singapore, JBW Printers & Binders Pre. Ltd.: 193.

Zhang J S. 1992. Non-uniform level density effect on exciton state densities. Z Phys. A 344: 49-54; Chin. J. of Nucl, Phys., 14: 121-126.

Zhang J S. 1994a. A unified hauser-feshbach and exiton model for calculating double-differential cross sections of neutron induced reactions beloe 20MeV. Nucl. Sci & Engi. 114: 55.

Zhang J S, Wen Y Q. 1994b. Angular momentum dependent exciton model. Chin. J. of Nucl. Phys., 16: 153.

第 3 章　单粒子的预平衡发射

3.1　单粒子预平衡态的发射率中的组合因子

原子核的激发系统在经历统计物理描述的耗散过程中, 在达到平衡态之前, 会出现发射粒子的概率, 这时这个系统就成为了开放系统, 在达到平衡态时的粒子发射过程被称为平衡态发射, 而在平衡态发射的粒子被称为平衡态发射, 两者的发射行为彼此有明显的不同. 如果发射的是单核子, 包括了中子和质子, 这就是单粒子发射. 由于这种核子在核反应过程中不需要考虑其内禀结构, 因此是发射过程中最简单的情况.

在上一章中, 已经从细致平衡原理导出了核反应预平衡过程中, 单粒子发射到剩余核的分立能级的发射率. 但是在单费米子激子模型中, 是不区分中子和质子, 因此在粒子–空穴激发过程中只需考虑粒子数和空穴数. 实际计算表明, 单费米子激子模型也是可以描述好预平衡发射行为的. 这时, 由入射粒子中的中子和质子成分可以影响各种粒子发射率的数值, 也就是说在预平衡阶段, 对入射粒子的成分仍然存在记忆, 这种区分中子和质子的效应是用组合因子来表示 (Cline, 1972). 这时从复合核的预平衡态发射到剩余核分立能级的发射率为

$$T^{J\pi}(n,E^*,\varepsilon_b)=\frac{1}{2\pi\hbar\omega^{J\pi}(n,E^*)}\sum_{j=|J-I_k|}^{J+I_k}\sum_{l=|j-s_b|}^{J+s_b}T_{jl}f_l(\pi,\pi_k)Q_b(n) \tag{3.1.1}$$

其中 $Q_b(n)$ 是组合因子. 但是原来组合因子中没有考虑复杂粒子发射组态的成分, 为此进行了改进 (Zhang et al., 1989; 丁大钊等, 2005). 首先给出一些物理量的符号定义：

入射粒子的质量数、中子数、质子数分别记为 A_a,n_a,z_a, 且有 $A_a=n_a+z_a$;

出射粒子的质量数、中子数、质子数分别记为 A_b,n_b,z_b, 且有 $A_b=n_b+z_b$;

靶核的质量数、中子数、质子数分别为 A,N,Z, 且有 $A=N+Z$;

初始入射粒子进入靶核后, 粒子数和空穴数分别为 $p=A_a$ 和 $h=0$. 而入射粒子在进入靶核后激发中子和质子的概率分别为 N/A 和 Z/A. 因此, 在 $n=p+h$ 激子态中, 激发 i 个质子和激发 $h-i$ 个中子的概率为

$$\binom{h}{i}\left(\frac{Z}{A}\right)^i\left(\frac{N}{A}\right)^{h-i} \tag{3.1.2}$$

这里 $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ 是数学中从 n 个物件中任取 m 个物件的组合因子.

这时在 z_a+i 个质子和 n_a+h-i 个中子中选出 A_b 出射粒子的组合概率为

$$\begin{pmatrix} z_a+i \\ z_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_a+h-i \\ n_b \end{pmatrix} \tag{3.1.3}$$

对各种组态求和

$$\sum_{i=0}^{h} \begin{pmatrix} h \\ i \end{pmatrix} \left(\frac{Z}{A}\right)^i \left(\frac{N}{A}\right)^{h-i} \begin{pmatrix} z_a+i \\ z_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_a+h-i \\ n_b \end{pmatrix} \tag{3.1.4}$$

这表示了在不同激发粒子空穴情况下, 出射粒子的组合概率. 为了得到归一化表示, 要考虑在全部核子中选择 z_b 个质子 n_b 个中子的概率为

$$\left(\frac{Z}{A}\right)^{z_b} \left(\frac{N}{A}\right)^{n_b} \tag{3.1.5}$$

而在 p 粒子态中选择 A_b 个核子和在 A_b 个核子中选择 z_b 个质子的概率为

$$\begin{pmatrix} p \\ A_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_b \\ z_b \end{pmatrix} \tag{3.1.6}$$

因而得到在激子数 $n=p+h$ 的激子态中, 发射由 n_b 个中子和 z_b 个质子组成的复杂粒子 A_b 的概率, 即组合因子为

$$\begin{aligned} Q_b(p,h) = &\left(\frac{A}{N}\right)^{n_b} \left(\frac{A}{Z}\right)^{z_b} \begin{pmatrix} A_b \\ z_b \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ A_b \end{pmatrix}^{-1} \\ &\times \sum_{i=0}^{h} \begin{pmatrix} h \\ i \end{pmatrix} \left(\frac{Z}{A}\right)^i \left(\frac{N}{A}\right)^{h-i} \begin{pmatrix} z_a+i \\ z_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_a+h-i \\ n_b \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

在以上表示中, 认为所有出射粒子全部由费米海上的核子组成. 但是, 在考虑了复杂粒子的拾取机制后, 出射粒子可以由在费米海上 λ 个核子, 费米海下 m 个核子组成, 且有

$$\lambda + m = A_b \tag{3.1.8}$$

同以前步骤, 激发 i 个质子, $h-i$ 个中子的概率为

$$\begin{pmatrix} h \\ i \end{pmatrix} \left(\frac{Z}{A}\right)^i \left(\frac{N}{A}\right)^{h-i} \tag{3.1.9}$$

而在费米海上选择 j 个质子, 费米海下选择 z_b-j 个质子的概率为

$$\begin{pmatrix} z_a+i \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z-i \\ z_b-j \end{pmatrix} \tag{3.1.10}$$

在费米海上选择 $\lambda-j$ 个中子, 在费米海下选择 $n_b-(\lambda-j)$ 个中子的概率为

$$\begin{pmatrix} n_a+h-i \\ \lambda-j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N+h-i \\ n_b-\lambda+j \end{pmatrix} \tag{3.1.11}$$

这时还要考虑复杂粒子的 $[\lambda,m]$ 组态, 即在费米面以上的 p 个粒子中选择 λ 个粒子, 同时在费米海下的 $A-h$ 个核子中取 m 个粒子的组合概率时, 总的归一化组合因子的表示为

$$Q_b(p,h)_{[\lambda,m]}=\left(\frac{A}{N}\right)^{n_b}\left(\frac{A}{Z}\right)^{z_b}\begin{pmatrix} p \\ \lambda \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A-h \\ m \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A_b \\ z_b \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\sum_{i=0}^{h}\begin{pmatrix} h \\ i \end{pmatrix}\left(\frac{Z}{A}\right)^{i}\left(\frac{N}{A}\right)^{h-i}\sum_{j}\begin{pmatrix} z_a+i \\ j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_a+h-i \\ \lambda-j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z-i \\ z_b-j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-h+i \\ n_b-\lambda+j \end{pmatrix} \tag{3.1.12}$$

这就是实际应用的组合因子. 为了验证公式 (3.1.12) 的合理性, 以单粒子出射的情况为例, 这时 $\lambda=1,m=0$, 上面公式可以约化为

$$Q_b(p,h)_{[1,0]}=\left(\frac{A}{N}\right)^{n_b}\left(\frac{A}{Z}\right)^{z_b}\frac{1}{p}\begin{pmatrix} A_b \\ z_b \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\sum_{i=0}^{h}\begin{pmatrix} h \\ i \end{pmatrix}\left(\frac{Z}{A}\right)^{i}\left(\frac{N}{A}\right)^{h-i}\sum_{j}\begin{pmatrix} z_a+i \\ j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_a+h-i \\ 1-j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z-i \\ z_b-j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-h+i \\ n_b-1+j \end{pmatrix} \tag{3.1.13}$$

对于出射中子, $A_b=n_b=1,z_b=0$, 因此, (3.1.13) 式中对 j 的求和仅能取 $j=0$, 因此得到出射中子的组合因子为

$$Q_n(p,h)_{[1,0]}=\left(\frac{A}{N}\right)\frac{1}{p}\sum_{i=0}^{h}\begin{pmatrix} h \\ i \end{pmatrix}\left(\frac{Z}{A}\right)^{i}\left(\frac{N}{A}\right)^{h-i}(n_a+h-i) \tag{3.1.14}$$

而对于出射质子, $A_b=z_b=1,n_b=0$, 因此, 这时对 j 的求和仅能取 $j=1$, 因此得到出射质子的组合因子为

$$Q_p(p,h)_{[1,0]}=\left(\frac{A}{Z}\right)\frac{1}{p}\sum_{i=0}^{h}\begin{pmatrix} h \\ i \end{pmatrix}\left(\frac{Z}{A}\right)^{i}\left(\frac{N}{A}\right)^{h-i}(z_a+i) \tag{3.1.15}$$

注意到 $p=n_a+z_a+h$, 以及 $\displaystyle\sum_{i=0}^{h}\begin{pmatrix} h \\ i \end{pmatrix}\left(\frac{Z}{A}\right)^{i}\left(\frac{N}{A}\right)^{h-i}=\left(\frac{Z}{A}+\frac{N}{A}\right)^{h}=1$, 因此存在下面的关系式:

$$\frac{N}{A}Q_n(p,h)_{[1,0]}+\frac{Z}{A}Q_p(p,h)_{[1,0]}=1 \tag{3.1.16}$$

当然, 对于 γ 发射, 这时 $z_b = n_b = A_b = 0$, 以及 $\lambda = 0, m = 0$, 由此得到

$$Q_\gamma(p,h)_{[0,0]} = 1 \tag{3.1.17}$$

可以看出, 这些结果表明组合因子在物理上是合理的.

由于 (3.1.12) 式对任意轻入射粒子都成立. 对中子入射而言, 可以将 (3.1.12) 式加以简化. 这时有 $A_a = n_a = 1, z_a = 0$, 发射 b 粒子的组合因子为

$$Q_b(p,h)_{[\lambda,m]} = \left(\frac{A}{N}\right)^{n_b}\left(\frac{A}{Z}\right)^{z_b}\begin{pmatrix} p \\ \lambda \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A-h \\ m \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A_b \\ z_b \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\sum_{i=0}^{h}\begin{pmatrix} h \\ i \end{pmatrix}\left(\frac{Z}{A}\right)^{i}\left(\frac{N}{A}\right)^{h-i}\sum_j\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h+1-i \\ \lambda-j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z-i \\ z_b-j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-h+i \\ n_b-\lambda+j \end{pmatrix} \tag{3.1.18}$$

为了清楚组合因子在预平衡发射率中的作用, 下面以 $\mathrm{n}+{}^{16}\mathrm{O}$ 为例, 给出在这个核反应中六种出射粒子的组合因子的计算结果, 如表 3.1 所示.

表 3.1 $\mathbf{n}+{}^{16}\mathbf{O}$ 在激子态 $n=3,5,7,9$ 的组合因子 (对于 $\lambda=1, m=A_b-1$ 的情况)

粒子	n	p	α	d	t	^{3}He
质量数	1	1	4	2	3	3
$n=3$	1.500	0.500	1.108	1.033	1.244	0.844
$n=5$	1.333	0.667	1.125	1.048	1.187	0.921
$n=7$	1.250	0.750	1.135	1.058	1.159	0.961
$n=9$	1.200	0.800	1.142	1.067	1.143	0.986

由表 3.1 中的计算结果可以看出, 在单费米子模型中, 对于中子入射而言, 由于复合核内增加了中子数目, 因此组合因子的作用是加大了中子的发射概率, 而压缩了质子发射的概率. 对于复杂粒子发射, 组合因子的作用也是有利于多中子的复杂粒子发射, 而压缩多质子的复杂粒子发射. 上述效应对于低激子态的情况很明显, 而随着激子数的增大, 这种效应就逐渐降低. 如果发射的复杂粒子具有相同的中子、质子数, 这种组合因子就基本上不起作用, 这些结果在物理上也是合理的.

3.2 Pauli 原理和费米运动对单粒子发射双微分截面的影响

当入射粒子进入靶核后, 核内的激发过程是由预平衡态逐渐过渡到平衡态, 而预平衡过程则由粒子、空穴对的激发和湮没过程来描述. 靶核内核子的运动通常可以用费米气体模型来描述. 因此, 虽然入射粒子对于靶核质心具有确定的相对运动速度, 但是对于各个核子其相对运动速度却是各不相同的, 对于入射粒子与靶核内不同运动状态的核子的碰撞的平均得到的散射结果称为费米运动效应. 另外, 在粒

子、空穴的激发过程中, 由于 Pauli 原理的限制, 如果碰撞后的两个核子态中的任何一个已经被其他核子占据了, 那么这种碰撞就是不能发生的无效碰撞. 这样的核内核子碰撞过程称为考虑 Pauli 原理和费米运动的碰撞过程, 在文献 (Kikuchi et al., 1968) 中用核物质理论方法已经给出了理论公式结果. 下面, 在考虑 Pauli 原理和费米运动效应的基础上, 推导、建立了单粒子发射双微分截面的理论公式表示 (Sun et al., 1982; Akkermans et al., 1980).

为了考虑费米运动效应, 先将靶核视为在实验室系中静止不动的. 为了明晰起见, 在本节中用下标 L 标记实验室系中的物理量, 用下标 C 标记质心系中的物理量；用下标 1 标记入射核子 1, 用下标 2 标记被碰核子 2；对碰撞前的物理量不加上标 “′”, 而对碰撞后的物理量加上标 “′”. 考虑了 Pauli 原理后, 碰撞前入射核子的能量一定高于费米面, 而靶核中的核子是将费米海填满. 这里需要指出的是, 在碰撞过程中, 费米面下可以有多于一个的空穴态出现, 而在理论上是可以允许碰撞后的核子占据这些空穴态. 但是对于低激子态, 这种概率是非常小的, 已经有研究表明, 考虑这种碰撞过程后与认为在费米面下被填满的结果是非常一致的 (Costa et al., 1983). 这说明, 在低激子态时可以不考虑费米面下的空穴态的存在对单粒子发射过程的影响.

在粒子–空穴激发过程中, 费米面上的一个核子与费米面下的一个核子发生碰撞, 由于认为 Fermi 面下已经被核子填满, 所以在有效碰撞过程中, 费米面下的核子必然被激发到 Fermi 面以上. 下面用 p_{F} 表示费米动量, 它与费米能量之间的关系是 $\varepsilon_{\mathrm{F}} = p_{\mathrm{F}}^2/2m$, 这里 m 为核子质量, 因此有效碰撞需要满足以下关系：

$$|p_{L_1}| > p_{\mathrm{F}}, \quad |p_{L_2}| \leqslant p_{\mathrm{F}}, \quad |p_{L_1'}| > p_{\mathrm{F}}, \quad |p_{L_2'}| > p_{\mathrm{F}} \tag{3.2.1}$$

在质心系中, 两个碰撞核子的总动量为

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_{L_1} + \boldsymbol{p}_{L_2}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_{L_1'} + \boldsymbol{p}_{L_2'}) \tag{3.2.2}$$

因此有

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{C}_1'} = \boldsymbol{p}_{L_1'} - \boldsymbol{p}_{\mathrm{C}}, \quad \boldsymbol{p}_{\mathrm{C}_2'} = \boldsymbol{p}_{L_2'} - \boldsymbol{p}_{\mathrm{C}} \tag{3.2.3}$$

另外, 由碰撞运动学可以知道, 在质心系中总有

$$p_{\mathrm{C}_1} = p_{\mathrm{C}_1'} = p_{\mathrm{C}_2} = p_{\mathrm{C}_2'} \tag{3.2.4}$$

定义 $\boldsymbol{q}$ 为粒子 1 在碰撞后的动量转移, 则有

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}_{L_1'} - \boldsymbol{p}_{L_1} = \boldsymbol{p}_{L_2} - \boldsymbol{p}_{L_2'} = (\boldsymbol{p}_{L_1'} - \boldsymbol{p}_{\mathrm{C}}) - (\boldsymbol{p}_{L_1} - \boldsymbol{p}_{\mathrm{C}}) = \boldsymbol{p}_{\mathrm{C}_1'} - \boldsymbol{p}_{\mathrm{C}_1} \tag{3.2.5}$$

其中

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{C}_1} = (\boldsymbol{p}_{L_1} - \boldsymbol{p}_{\mathrm{C}}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_{L_1} - \boldsymbol{p}_{L_2}) \tag{3.2.6}$$

以及

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{C}_1'} = \boldsymbol{p}_{L_1'} - \boldsymbol{p}_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_{L_1'} - \boldsymbol{p}_{L_2'}) \tag{3.2.7}$$

对于一定的入射能, $\boldsymbol{p}_{L_1}$ 为一个确定的量, 由 (3.2.5) 得到

$$\mathrm{d}\boldsymbol{q} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{L_1'} \tag{3.2.8}$$

在考虑到靶内核子的费米运动时, 入射粒子 1 对靶内粒子 2 的相对运动速度为 $|\boldsymbol{p}_{L_1} - \boldsymbol{p}_{L_2}|/m$; 而对于整个靶核的入射流, 则不需要考虑具体的被碰核子 2, 其速度为 p_{L_1}/m, 它也相当于不考虑被碰核子的费米运动, 将核子 2 看作是静止的, 即 $\boldsymbol{p}_{L_2} = 0$. 显然, 这时它也等同于假设靶内核子静止不动, 即自由核子散射时的情形.

在理论公式推导过程中, 取如图 3.1 所示的坐标系, 让 Z 轴沿 $-\boldsymbol{q}$ 方向, 原点取在靶核中心, X 轴在 $\boldsymbol{p}_{L_1}, \boldsymbol{p}_{L_1'}$ 的平面上 ($\boldsymbol{p}_{L_2}, \boldsymbol{p}_{L_2'}$ 并不一定在 XOZ 平面中).

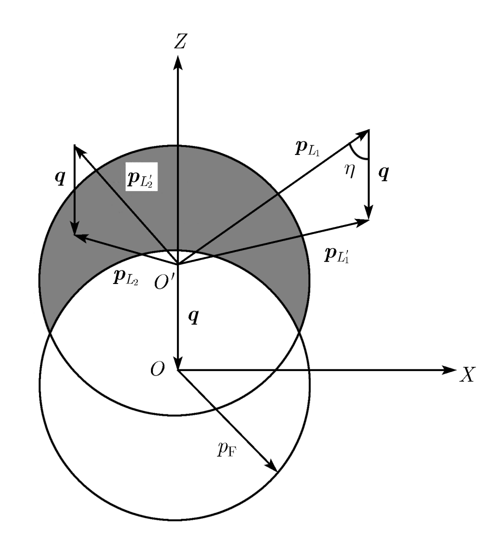


图 3.1 在柱坐标中两个粒子碰撞前后动量示意图

对于 $\boldsymbol{p}_{L_1'}$ 的积分区域, 需要满足下面的限制条件

$$|\boldsymbol{p}_{L_2}| \leqslant p_{\mathrm{F}}, \quad |\boldsymbol{p}_{L_2'}| > p_{\mathrm{F}} \tag{3.2.9}$$

即 $|\boldsymbol{p}_{L_2} + \boldsymbol{q}| = |\boldsymbol{p}_{L_2'}| > p_{\mathrm{F}}$, 可知其积分区域为图 3.1 中的阴影部分; 当不考虑 Pauli 原理时, 无 $|\boldsymbol{p}_{L_2} + \boldsymbol{q}| = |\boldsymbol{p}_{L_2'}| > p_{\mathrm{F}}$ 限制, 这时积分区域为全 Fermi 球.

利用下面的公式:

$$\int \delta(p_{\mathrm{C}_1'} - p_{\mathrm{C}_1}) \frac{1}{p_{\mathrm{C}_1}^2} \mathrm{d}p_{\mathrm{C}_1'} = \int \delta(p_{\mathrm{C}_1'} - p_{\mathrm{C}_1}) \mathrm{d}p_{\mathrm{C}_1'} \mathrm{d}\cos\theta_{\mathrm{C}_1'} \mathrm{d}\varphi_{\mathrm{C}_1'} = \mathrm{d}\Omega_{\mathrm{C}_1'} \tag{3.2.10}$$

可以将对立体角 $\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{C}_1'}$ 的积分转换为对动量 $\mathrm{d}p_{\mathrm{C}_1'}$ 的积分. 即有

$$\sigma(\theta_{\mathrm{C}},E_{\mathrm{C}_1})\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{C}_1'}=\int\sigma(\theta_{\mathrm{C}},E_{\mathrm{C}_1})\frac{1}{p_{\mathrm{C}_1}^2}\delta(p_{\mathrm{C}_1'}-p_{\mathrm{C}_1})\mathrm{d}p_{\mathrm{C}_1'} \tag{3.2.11}$$

在费米气体模型中, 费米面下的动量 $\boldsymbol{p}_{L_2}$ 服从各向同性的均匀分布, 因此动量 $\boldsymbol{p}_{L_2}$ 在 Fermi 海中的占据概率 $N(\boldsymbol{p}_{L_2})$ 为费米球体积的倒数, 即

$$N(\boldsymbol{p}_{L_2})=\frac{1}{V}=\frac{3}{4\pi p_{\mathrm{F}}^3} \tag{3.2.12}$$

这就是为什么要在实验室系进行研究的原因, 因为只有这时原来静止的费米球才能用 $\boldsymbol{p}_{L_2}$ 的各向同性的均匀分布. 否则, 在质心系中靶核是处于运动状态, 费米球中的核子运动需要加入质心运动效应. 在考虑了费米运动和 Pauli 原理后, 对费米球内 $\boldsymbol{p}_{L_2}$ 的分布进行积分, 核子的平均散射截面 $\bar{\sigma}$ 可表示为

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}&=\int\left|\boldsymbol{p}_{L_1}-\boldsymbol{p}_{L_2}\right|/P_{L_1}N(\boldsymbol{p}_{L_2})\sigma(\theta_{\mathrm{C}},E_{\mathrm{C}_1})\mathrm{d}\Omega_{C_1'}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{L_2}\\&=\frac{3}{4\pi p_{\mathrm{F}}^3p_{L_1}}\int\frac{1}{p_{\mathrm{C}_1}^2}\delta(p_{\mathrm{C}_1'}-p_{\mathrm{C}_1})|\boldsymbol{p}_{L_1}-\boldsymbol{p}_{L_2}|\sigma(\theta_{\mathrm{C}},E_{\mathrm{C}_1})\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{\mathrm{C}_1'}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{L_2}\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

注意 (3.2.13) 式对 $\boldsymbol{p}_{C_1'}$ 积分时, 对于碰撞前的量, 如 $\boldsymbol{p}_{L_1}$, $\boldsymbol{p}_{L_2}$ 和 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{C}}$ 等皆为常量. 由 (3.2.8) 式知 $\mathrm{d}\boldsymbol{q}=\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{L_1'}$, 可得 $\mathrm{d}\boldsymbol{q}=\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{\mathrm{C}_1'}=\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{L_1'}$, 于是在公式 (3.2.13) 有 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{\mathrm{C}_1'}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{L_2}=\mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{L_2}$ 成立, 因此 (3.2.13) 可以改写为

$$\bar{\sigma}=\frac{3}{4\pi p_{\mathrm{F}}^3p_{L_1}}\int\frac{1}{p_{\mathrm{C}_1}^2}\delta(p_{\mathrm{C}_1'}-p_{\mathrm{C}_1})|\boldsymbol{p}_{L_1}-\boldsymbol{p}_{L_2}|\sigma(\theta_{\mathrm{C}},E_{\mathrm{C}_1})\mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{L_2} \tag{3.2.14}$$

下面将 (3.2.14) 式中的被积函数表示为 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{p}_{L_2}$ 的函数. 而碰撞后粒子 1 的动量也可以写成 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{p}_{L_2}$ 的函数. 由 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{C}_1'}=\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p}_{\mathrm{C}_1}$, 以及 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{C}_1}=(\boldsymbol{p}_{L_1}-\boldsymbol{p}_{L_2})/2$ 得到

$$p_{\mathrm{C}_1'}=\left[\frac{1}{4}(\boldsymbol{p}_{L_1}-\boldsymbol{p}_{L_2})^2+\boldsymbol{q}^2+\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{p}_{L_1}-\boldsymbol{p}_{L_2})\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.2.15}$$

以及

$$p_{\mathrm{C}_1}=\sqrt{(\boldsymbol{p}_{L_1}-\boldsymbol{p}_{L_2})^2/4} \tag{3.2.16}$$

上面被积函数中的 δ 函数要求 $p_{\mathrm{C}_1'}=p_{\mathrm{C}_1}$, 于是由 (3.2.15) 和 (3.2.16) 两式得到

$$\boldsymbol{q}^2+\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{p}_{L_1}-\boldsymbol{p}_{L_2})=0 \tag{3.2.17}$$

在图 3.2 中用了柱坐标, 设 $\boldsymbol{p}_{L_2'}$ 的柱坐标为 z, ρ, φ, 则 $\boldsymbol{p}_{L_2}$ 的柱坐标为 $z-q$, ρ, φ. 因此, (3.2.17) 式在柱坐标中可表示为

$$q^2+qp_{L_1}\cos(\pi-\eta)+(z-q)q=0 \tag{3.2.18}$$

其中 $\pi-\eta$ 是 $\boldsymbol{p}_{L_1}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 的夹角, 消去一个 q, 由此可解出方程 (3.2.17) 的根为

$$z_0=p_{L_1}\cos\eta \tag{3.2.19}$$

利用 δ 函数的性质:

$$\delta(f(z))=\delta(z-z_0)/f'(z_0) \tag{3.2.20}$$

其中 z_0 是函数 $f(z)$ 的根, 即 $f(z_0)=0$. 在 (3.2.14) 式中 $f(z)=p_{\mathrm{C}_1'}-p_{\mathrm{C}_1}$, 由此得到

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z}\Big|_{z=z_0}=\frac{1}{\sqrt{(\boldsymbol{p}_{L_1}-\boldsymbol{p}_{L_2})^2/4}}\left[\frac{q}{2}\right]_{z=z_0}=\frac{q}{2p_{\mathrm{C}_1}} \tag{3.2.21}$$

于是有

$$\delta(p_{\mathrm{C}_1'}-p_{\mathrm{C}_1})=\frac{2p_{\mathrm{C}_1}}{q}\delta(z-z_0)=\frac{2p_{\mathrm{C}_1}}{q}\delta(z-p_{L_1}\cos\eta) \tag{3.2.22}$$

因此可以将 (3.2.14) 式改写为

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}&=\frac{3}{4\pi p_{\mathrm{F}}^3p_{L_1}}\int\frac{1}{p_{\mathrm{C}_1}^2}\delta(p_{\mathrm{C}_1'}-p_{\mathrm{C}_1})2p_{\mathrm{C}_1}\sigma(\theta_{\mathrm{C}},E_{\mathrm{C}_1})\mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{6}{p_{\mathrm{F}}^3p_{L_1}}\int\frac{1}{q}\delta(z-p_{L_1}\cos\eta)\sigma(\theta_{\mathrm{C}},E_{\mathrm{C}_1})\mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}z\rho\mathrm{d}\rho\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

在低能核子散射过程中, 例如, 能量小于 30MeV 时, 在质心系中的核子散射截面近似为各向同性, 并和入射能量无关, 则有

$$\sigma(\theta_{\mathrm{C}},E_{\mathrm{C}_1})=\frac{\sigma_{\mathrm{T}}}{4\pi} \tag{3.2.24}$$

其中 σ_{T} 为质心系中的核子总散射截面. 代入 (3.2.24) 式, 可得

$$\bar{\sigma}=\frac{6}{p_{\mathrm{F}}^3p_{L_1}}\int\frac{1}{q}\delta(z-p_{L_1}\cos\eta)\frac{\sigma_{\mathrm{T}}}{4\pi}\mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}z\rho\mathrm{d}\rho\frac{\sigma_{\mathrm{T}}}{4\pi}\int F(\boldsymbol{q})\mathrm{d}\boldsymbol{q} \tag{3.2.25}$$

其中

$$F(\boldsymbol{q})=\frac{6}{qp_{\mathrm{F}}^3p_{L_1}}\int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{3}{qp_{\mathrm{F}}^3p_{L_1}}(\rho_2^2-\rho_1^2) \tag{3.2.26}$$

因此得到在考虑了费米运动和 Pauli 原理后的核子散射的双微分截面形式表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{L_1'}}=\frac{\sigma_{\mathrm{T}}}{4\pi}F(\boldsymbol{q}) \tag{3.2.27}$$

利用 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{L_1'}=p_{L_1'}^2\mathrm{d}p_{L_1'}\mathrm{d}\Omega_{L_1'}$, 将动量积分转换为对能量和立体角的积分, 得到

$$\frac{\mathrm{d}_2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_{L_1'}\mathrm{d}\Omega_{L_1'}}=\frac{p_{\mathrm{F}}^3\sqrt{\varepsilon_{L_1'}}}{2\varepsilon_{\mathrm{F}}^{3/2}}\frac{\sigma_{\mathrm{T}}}{4\pi}F(\boldsymbol{q}) \tag{3.2.28}$$

(3.2.28) 式就是考虑了靶内核子的费米运动和 Pauli 原理后, 入射粒子在实验室系中的双微分截面的公式.

下面讨论 $F(\boldsymbol{q})$ 中积分的上下限, ρ_1, ρ_2 的选择有三种情况, 它们都考虑了 Pauli 原理限制.

(1) $q \leqslant 2p_{\mathrm{F}}$(图 3.1 中二球相交), 且 $\dfrac{q}{2} \leqslant z_0 \leqslant p_{\mathrm{F}}$, 则

$$\rho_1 = \sqrt{p_{\mathrm{F}}^2 - z_0^2} = \sqrt{p_{\mathrm{F}}^2 - p_{L_1}^2 \cos\eta}$$

$$\rho_2 = \sqrt{p_{\mathrm{F}}^2 - (q - z_0)^2} = \sqrt{p_{\mathrm{F}}^2 - (q - p_{L_1}\cos\eta)^2} \tag{3.2.29}$$

(2) $q \leqslant 2p_{\mathrm{F}}$(图 3.1 中二球相交), 且 $p_{\mathrm{F}} \leqslant z_0 \leqslant p_{\mathrm{F}} + q$, 则

$$\rho_1 = 0$$

$$\rho_2 = \sqrt{p_{\mathrm{F}}^2 - (q - p_{L_1}\cos\eta)^2} \tag{3.2.30}$$

(3) $q \geqslant 2p_{\mathrm{F}}$(图 3.1 中二球相离), 且 $q - p_{\mathrm{F}} \leqslant z_0 \leqslant q + p_{\mathrm{F}}$, 则

$$\rho_1 = 0$$

$$\rho_2 = \sqrt{p_{\mathrm{F}}^2 - (q - p_{L_1}\cos\eta)^2} \tag{3.2.31}$$

将上面的积分上下限分别代入 $F(\boldsymbol{q})$ 的表示中, 对于情况 (1), 有

$$F(\boldsymbol{q}) = \frac{3}{p_{\mathrm{F}}^3 p_{L_1}}(2p_{L_1}\cos\eta - q)$$

$$p_{L_1}\cos\eta = \frac{p_{L_1}^2 + q^2 - p_{L_1'}^2}{2q} \tag{3.2.32}$$

对于情况 (2), (3) 合并 $q \leqslant 2p_{\mathrm{F}}$ 和 $q \geqslant 2p_{\mathrm{F}}$ 的条件, 有相同结果:

$$F(\boldsymbol{q}) = \frac{3}{q p_{\mathrm{F}}^3 p_{L_1}}\left[p_{\mathrm{F}}^2 - (q - p_{L_1}\cos\eta)^2\right] \tag{3.2.33}$$

下面将所有的动量表示全部转换为能量表示. 把 (3.2.32) 式代入 (3.2.27) 式中, 得到考虑了费米运动和 Pauli 原理后的核子散射双微分截面表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_{L_1'}\mathrm{d}\Omega_{L_1'}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{L_1'}}}{2\varepsilon_{\mathrm{F}}^{3/2}}\frac{\sigma_{\mathrm{T}}}{4\pi}\frac{3}{p_{L_1}}\left(\frac{p_{L_1}^2 + q^2 - p_{L_1'}^2}{q} - q\right) = \frac{3\sigma_{\mathrm{T}}}{8\pi\varepsilon_{\mathrm{F}}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{L_1'}}{\varepsilon_{\mathrm{F}}}}\frac{\varepsilon_{L_1} - \varepsilon_{L_1'}}{\sqrt{Q\varepsilon_{L_1}}} \tag{3.2.34}$$

其中

$$Q = \varepsilon_{L_1} + \varepsilon_{L_1'} - 2\sqrt{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}}\cos\theta \tag{3.2.35}$$

这里 θ 为 Ω 与 Ω' 之间的夹角, 即为 $\boldsymbol{p}_{L_1}$ 与 $\boldsymbol{p}_{L'_1}$ 之间的夹角, 是实验室系中散射的角度. 在动量表示中存在的条件为

$$
\begin{aligned}
&q \leqslant 2p_{\mathrm{F}}, \\
&\frac{q}{2} \leqslant z_0 \leqslant p_{\mathrm{F}}
\end{aligned}
\tag{3.2.36}
$$

即要求 $q/2 \leqslant (p_{L_1}^2 + q^2 - p_{L'_1}^2)/2q \leqslant p_{\mathrm{F}}$ 成立, 左边的不等式导致 $p_{L_1} \geqslant p_{L'_1}$, 这自然成立; 而右边的不等式要求 $p_{L_1}^2+q^2-p_{L'_1}^2 \leqslant 2qp_{\mathrm{F}}$ 成立. 由 (3.2.5) 式知 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}_{L'_1} - \boldsymbol{p}_{L_1}$, 以及 (3.2.36) 式中的条件 $q \leqslant 2p_{\mathrm{F}}$, 转换到能量的表示后可得到

$$
Q \leqslant 4\varepsilon_{\mathrm{F}} \tag{3.2.37}
$$

再由 (3.2.36) 式中的第二条件, 换到能量表示后可得到

$$
\varepsilon_{L_1} - \varepsilon_{L'_1} + Q \leqslant 2\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{F}} Q} \tag{3.2.38}
$$

由 (3.2.35) 和 (3.2.37) 式, 得到下面对角度的限制条件:

$$
\cos\theta \equiv \frac{\varepsilon_{L_1} + \varepsilon_{L'_1} - Q}{2\sqrt{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L'_1}}} \geqslant \frac{\varepsilon_{L_1} + \varepsilon_{L'_1} - 4\varepsilon_{\mathrm{F}}}{2\sqrt{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L'_1}}} \tag{3.2.39}
$$

另外, 由 (3.2.38) 式, 得到 Q 满足的不等式:

$$
Q^2 + 2(\varepsilon_{L_1} - \varepsilon_{L'_1} - 2\varepsilon_{\mathrm{F}})Q + (\varepsilon_{L_1} - \varepsilon_{L'_1})^2 \leqslant 0 \tag{3.2.40}
$$

由公式 (3.2.40) 给出 Q 的一元二次不等式, 可以得到 Q 满足的不等式条件为

$$
(\sqrt{\varepsilon_f} - \sqrt{\varepsilon_f - \varepsilon_{L_1} + \varepsilon_{L'_1}})^2 \leqslant Q \leqslant (\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{F}}}\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{F}} - \varepsilon_{L_1} + \varepsilon_{L'_1}})^2 \tag{3.2.41}
$$

再将 (3.2.35) 式的 Q 的表示代入 (3.2.41) 式, 就得到散射角 $\cos\theta$ 满足的积分范围:

$$
\alpha_1 \leqslant \cos\theta \leqslant \beta_1 \tag{3.2.42}
$$

其中

$$
\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L'_1}}}\left[\varepsilon_{L_1} - \varepsilon_{\mathrm{F}} - \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{F}}(\varepsilon_{\mathrm{F}} - \varepsilon_{L_1} + \varepsilon_{L'_1})}\right] \tag{3.2.43}
$$

$$
\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L'_1}}}\left[\varepsilon_{L_1} - \varepsilon_{\mathrm{F}} + \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{F}}(\varepsilon_{\mathrm{F}} - \varepsilon_{L_1} + \varepsilon_{L'_1})}\right] \tag{3.2.44}
$$

表达式 α_1, β_1 中根号内的量必须大于 0, 因而一定有

$$
\varepsilon_{L'_1} \geqslant \varepsilon_{L_1} - \varepsilon_{\mathrm{F}} \tag{3.2.45}
$$

对于第二、三种情况, 与第一种情况相似, 将 (3.2.33) 式代入 (3.2.28) 式, 并转换到能量的表示后得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_{L_1'}\mathrm{d}\Omega_{L_1'}} &= \frac{\sqrt{\varepsilon_{L_1'}}}{2\varepsilon_\mathrm{F}^{3/2}}\frac{\sigma_\mathrm{T}}{4\pi}\frac{3}{qp_{L_1}}\left[p_\mathrm{F}^2-(q-p_{L_1}\cos\eta)^2\right]\\ &= \frac{3\sigma_\mathrm{T}}{8\pi\varepsilon_\mathrm{F}^{3/2}}\frac{\sqrt{\varepsilon_{L_1'}}}{\sqrt{Q\varepsilon_{L_1}}Q}\left[\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}\sin^2\theta-(\varepsilon_{L_1'}-\varepsilon_\mathrm{F})Q\right]\end{aligned} \tag{3.2.46}$$

对于一定能量 $\varepsilon_{L_1'}$ 值, 可以得到角度分布的区域. 将 $z_0 = p_{L_1}\cos\eta = (p_{L_1}^2 + q^2 - p_{L_1'}^2)/2q$ 代入到 (3.2.46) 式, 由双微分截面的值必须大于 0 的条件得到不等式:

$$\left[p_\mathrm{F}^2-(q-p_{L_1}\cos\eta)^2\right] = \left(\frac{p_{L_1}^2+q^2-p_{L_1'}^2}{2q}-q\right)^2 \leqslant p_\mathrm{F}^2 \tag{3.2.47}$$

应用 (3.2.5) 式中的 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}_{L_1'} - \boldsymbol{p}_{L_1}$ 和 $q^2 = p_{L_1}^2 + p_{L_1'}^2 - 2p_{L_1}p_{L_1'}\cos\theta$ 得到

$$p_{L_1'}^2(p_{L_1'}-p_{L_1}\cos\theta)^2 \leqslant p_\mathrm{F}^2(p_{L_1}^2+p_{L_1'}^2-2p_{L_1}p_{L_1'}\cos\theta) \tag{3.2.48}$$

利用 Q 的定义 (3.2.35) 式, 在能量标度下由 (3.2.48) 式, 得到 Q 满足的不等式:

$$Q^2 - 2Q(\varepsilon_{L_1}-\varepsilon_{L_1'}+2\varepsilon_\mathrm{F}) + (\varepsilon_{L_1}-\varepsilon_{L_1'})^2 \leqslant 0 \tag{3.2.49}$$

由公式 (3.2.49) 给出 Q 的一元二次不等式, 得到 Q 满足的不等式:

$$(\sqrt{\varepsilon_\mathrm{F}}-\sqrt{\varepsilon_\mathrm{F}+\varepsilon_{L_1}-\varepsilon_{L_1'}})^2 \leqslant Q \leqslant (\sqrt{\varepsilon_\mathrm{F}}+\sqrt{\varepsilon_\mathrm{F}+\varepsilon_{L_1}-\varepsilon_{L_1'}})^2 \tag{3.2.50}$$

将 (3.2.35) 式代入, 得到散射角 $\cos\theta$ 满足的积分范围:

$$\alpha_2 \leqslant \cos\theta \leqslant \beta_2 \tag{3.2.51}$$

其中

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}}}\left[\varepsilon_{L_1'}-\varepsilon_\mathrm{F}-\sqrt{\varepsilon_\mathrm{F}(\varepsilon_\mathrm{F}+\varepsilon_{L_1}-\varepsilon_{L_1'})}\right] \tag{3.2.52}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}}}\left[\varepsilon_{L_1'}-\varepsilon_\mathrm{F}+\sqrt{\varepsilon_\mathrm{F}(\varepsilon_\mathrm{F}+\varepsilon_{L_1}-\varepsilon_{L_1'})}\right] \tag{3.2.53}$$

可以证明 $-1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_1 \leqslant \beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant 1$ 成立.

在考虑了费米运动和 Pauli 原理后, 由图 3.2 和图 3.3 示意性地分别给出了 $\varepsilon_{L_1} > 2\varepsilon_\mathrm{F}$ 和 $\varepsilon_{L_1} \leqslant 2\varepsilon_\mathrm{F}$ 核子的平均散射双微分截面对能量和 $\cos\theta$ 的区域.

可以验证, 当 $\varepsilon_{L_1} = 2\varepsilon_\mathrm{F}$ 和 $\varepsilon_{L_1'} = \varepsilon_\mathrm{F}$ 时, $\alpha_1 = \beta_1 = 1/\sqrt{2} > 0$, 这是上面两个图之间的临界状态. 当然, 图 3.2 和图 3.3 中的曲线是随 $\varepsilon_{L_1}/\varepsilon_\mathrm{F}$ 比例大小而变化, 因此仅给出示意图. 由不等式 (3.2.51) 看出, 对一定的出射粒子能量 $\varepsilon_{L_1'}$, $\cos\theta \leqslant \alpha_2$

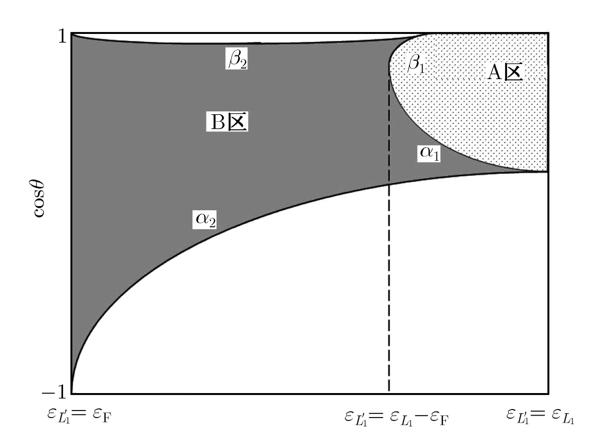


图 3.2 当 $\varepsilon_{L_1} \geqslant 2\varepsilon_{\mathrm{F}}$ 时 $\cos\theta$ 的积分区域示意图

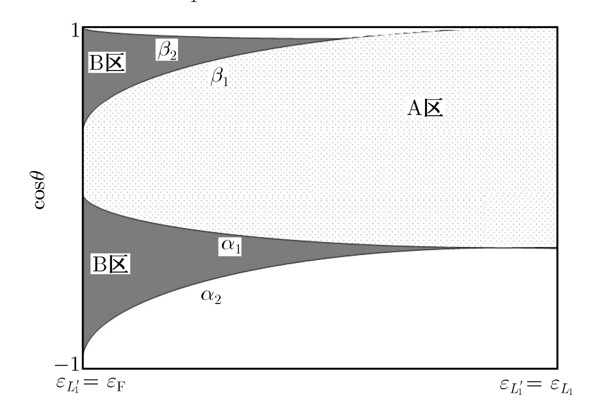


图 3.3 当 $\varepsilon_{L_1} \leqslant 2\varepsilon_{\mathrm{F}}$ 时 $\cos\theta$ 的积分区域示意图

和 $\beta_2 \leqslant \cos\theta$ 的区域是单粒子散射出射角的禁区, $\alpha_2 \leqslant \cos\theta \leqslant \alpha_1$ 和 $\beta_1 \leqslant \cos\theta \leqslant \beta_2$ 对应于图 3.3 中的 B 区的公式表示, $\alpha_1 \leqslant \cos\theta \leqslant \beta_1$ 对应于图 3.3 中的 A 区的公式表示, 不同区域具有不同的平均散射截面公式. 而在 $\varepsilon_{L_1} > 2\varepsilon_{\mathrm{F}}$ 时, 出射能量 $\varepsilon_{L_1'} \leqslant \varepsilon_{L_1} - \varepsilon_{\mathrm{F}}$ 时出射能量区域内仅有 B 区存在.

考虑了原子核内核子的费米运动和 Pauli 原理后, 得到入射核子的平均散射双微分截面为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_{L_1'}\mathrm{d}\Omega_{L_1'}} = \begin{cases} \dfrac{3\sigma_{\mathrm{T}}}{8\pi\varepsilon_{\mathrm{F}}}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_{L_1'}}{\varepsilon_{\mathrm{F}}}}\dfrac{\varepsilon_{L_1}-\varepsilon_{L_1'}}{\sqrt{Q\varepsilon_{L_1}}}, & \text{在 A 区} \\ \dfrac{3\sigma_{\mathrm{T}}}{8\pi\varepsilon_{\mathrm{F}}}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_{L_1'}}{\varepsilon_{\mathrm{F}}}}\dfrac{1}{\sqrt{Q\varepsilon_{L_1}}Q}[\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}\sin^2\theta-(\varepsilon_{L_1'}-\varepsilon_{\mathrm{F}})Q], & \text{在 B 区} \end{cases} \tag{3.2.54}$$

由 (3.5.35) 式可以看到, Q 是随 $\cos\theta$ 的加大而减小, 因此在 (3.2.54) 式中, 核子的平均散射双微分截面是具有朝前性的.

平均散射双微分截面对角度积分得到能谱表示, 由图 3.3 可以看出, 当 $\varepsilon_{L_1} > 2\varepsilon_{\mathrm{F}}$ 时能谱需要分两个区域. 一个是在 $\varepsilon_{L_1'} \leqslant \varepsilon_{L_1} - \varepsilon_f$ 区域 (见图 3.3 的 B 区), 这时能谱表示为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_{L_1'}} = \int \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_{L_1'}\mathrm{d}\Omega_{L_1'}}\mathrm{d}\Omega_{L_1'} = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \frac{3\sigma_{\mathrm{T}}}{4\varepsilon_{\mathrm{F}}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{L_1'}}{\varepsilon_{\mathrm{F}}}} \frac{[\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}\sin^2\theta - (\varepsilon_{L_1'} - \varepsilon_f)Q]}{\sqrt{Q\varepsilon_{L_1}}Q}\mathrm{d}\cos\theta \tag{3.2.55}$$

由 (3.2.35) 式对 Q 的定义, 利用下面的不定积分表示:

$$\int \frac{1}{\sqrt{Q}}\mathrm{d}\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}}}\sqrt{Q} \tag{3.2.56}$$

$$\int \frac{\sin^2\theta}{Q\sqrt{Q}}\mathrm{d}\cos\theta = \frac{1-\cos^2\theta}{\sqrt{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}}\sqrt{Q}} - \frac{[3(\varepsilon_{L_1}+\varepsilon_{L_1'}) - Q]}{3(\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'})\sqrt{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}}}\sqrt{Q} \tag{3.2.57}$$

因此 (3.2.55) 的积分结果为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_{L_1'}} = \frac{3\sigma_{\mathrm{T}}}{4\varepsilon_{\mathrm{F}}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{L_1'}}{\varepsilon_{\mathrm{F}}}}\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_{L_1'}}(1-\cos^2\theta)}{\sqrt{Q}} + \frac{Q^{3/2}}{3\varepsilon_{L_1}\sqrt{\varepsilon_{L_1'}}} - \frac{\varepsilon_{L_1}+\varepsilon_{\mathrm{F}}}{\varepsilon_{L_1}\sqrt{\varepsilon_{L_1'}}}\sqrt{Q}\right]\Bigg|_{\alpha_2}^{\beta_2} \tag{3.2.58}$$

为了方便将上下限的代入, 定义符号:

$$Q(\alpha) \equiv \varepsilon_{L_1} + \varepsilon_{L_1'} - 2\sqrt{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}}\alpha \tag{3.2.59}$$

下面给出一些等式:

$$1-\alpha_2^2 = \frac{(\varepsilon_{L_1'}-\varepsilon_{\mathrm{F}})}{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}}Q(\alpha_2), \quad 1-\beta_2^2 = \frac{(\varepsilon_{L_1'}-\varepsilon_{\mathrm{F}})}{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}}Q(\beta_2) \tag{3.2.60}$$

$$1-\alpha_1^2 = \frac{(\varepsilon_{L_1}-\varepsilon_{\mathrm{F}})}{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}}Q(\alpha_1), \quad 1-\beta_1^2 = \frac{(\varepsilon_{L_1}-\varepsilon_{\mathrm{F}})}{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}}Q(\beta_1) \tag{3.2.61}$$

$$\sqrt{Q(\beta_2)}\cdot\sqrt{Q(\alpha_2)} = \varepsilon_{L_1} - \varepsilon_{L_1'}, \quad \sqrt{Q(\beta_2)} - \sqrt{Q(\alpha_2)} = -2\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{F}}} \tag{3.2.62}$$

$$\sqrt{Q(\beta_1)}\cdot\sqrt{Q(\alpha_1)} = \varepsilon_{L_1} - \varepsilon_{L_1'} \tag{3.2.63}$$

$$\sqrt{Q(\beta_1)} - \sqrt{Q(\alpha_1)} = -2\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{F}} - \varepsilon_{L_1} + \varepsilon_{L_1'}} \tag{3.2.64}$$

以及一些由此派生的等式:

$$Q^{3/2}(\beta_2) - Q^{3/2}(\alpha_2) = -2\sqrt{\varepsilon_f} = -2\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{F}}}[3\varepsilon_{L_1} - 3\varepsilon_{L_1'} + 4\varepsilon_{\mathrm{F}}] \tag{3.2.65}$$

$$\sqrt{Q(\alpha_2)}(1-\beta_2^2) - \sqrt{Q(\beta_2)}(1-\alpha_2^2) = -2\frac{(\varepsilon_{L_1'}-\varepsilon_{\mathrm{F}})(\varepsilon_{L_1}-\varepsilon_{L_1'})}{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}}\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{F}}} \tag{3.2.66}$$

$$\sqrt{Q(\alpha_1)}(1-\beta_1^2)-\sqrt{Q(\beta_1)}(1-\alpha_1^2)=-2\frac{(\varepsilon_{L_1'}-\varepsilon_{\mathrm{F}})(\varepsilon_{L_1}-\varepsilon_{L_1'})}{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}}\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{F}}-\varepsilon_{L_1}+\varepsilon_{L_1'}} \tag{3.2.67}$$

$$Q^{3/2}(\beta_1)-Q^{3/2}(\alpha_1)=-2\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{F}}-\varepsilon_{L_1}+\varepsilon_{L_1'}}[\varepsilon_{L_1'}-\varepsilon_{L_1}+4\varepsilon_{\mathrm{F}}] \tag{3.2.68}$$

利用等式 (3.2.66) 和 (3.2.62) 式、(3.2.65) 式以及 (3.2.63) 式, 在 (3.2.58) 式中的三项代入上下限后分别得到

$$\left.\frac{\sqrt{\varepsilon_{L_1'}}(1-\cos^2\theta)}{\sqrt{Q}}\right|_{\alpha_2}^{\beta_2}=-2\frac{(\varepsilon_{L_1'}-\varepsilon_{\mathrm{F}})}{\varepsilon_{L_1}\sqrt{\varepsilon_{L_1'}}}\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{F}}} \tag{3.2.69}$$

$$\left.\frac{Q^{3/2}}{3\varepsilon_{L_1}\sqrt{\varepsilon_{L_1'}}}\right|_{\alpha_2}^{\beta_2}=-\frac{2(3\varepsilon_{L_1}-3\varepsilon_{L_1'}+4\varepsilon_{\mathrm{F}})}{3\varepsilon_{L_1}\sqrt{\varepsilon_{L_1'}}}\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{F}}} \tag{3.2.70}$$

$$\left.-\frac{\varepsilon_{L_1}+\varepsilon_{\mathrm{F}}}{\varepsilon_{L_1}\sqrt{\varepsilon_{L_1'}}}\sqrt{Q}\right|_{\alpha_2}^{\beta_2}=2\frac{\varepsilon_{L_1}+\varepsilon_{\mathrm{F}}}{\varepsilon_{L_1}\sqrt{\varepsilon_{L_1'}}}\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{F}}} \tag{3.2.71}$$

将这三项合并后得到了在 $\varepsilon_{L_1}>2\varepsilon_{\mathrm{F}}$ 的情况下, 当 $\varepsilon_{L_1'}\leqslant\varepsilon_{L_1}-\varepsilon_{\mathrm{F}}$ 时, 能谱是很简单的常数谱的表示:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_{L_1'}}=\frac{\sigma_T}{\varepsilon_{L_1}} \tag{3.2.72}$$

而另一个情况是在 $\varepsilon_{L_1'}\geqslant\varepsilon_{L_1}-\varepsilon_{\mathrm{F}}$ 时, 对角度积分跨越 A 区和 B 区, 其能谱表示为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_{L_1'}}=&\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\frac{3\sigma_{\mathrm{T}}}{4\varepsilon_{\mathrm{F}}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{L_1'}}{\varepsilon_{\mathrm{F}}}}\frac{1}{\sqrt{Q\varepsilon_{L_1}}Q}[\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}\sin^2\theta-(\varepsilon_{L_1'}-\varepsilon_f)Q]\mathrm{d}\cos\theta\\&+\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\frac{3\sigma_{\mathrm{T}}}{4\varepsilon_{\mathrm{F}}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{L_1'}}{\varepsilon_{\mathrm{F}}}}\frac{\varepsilon_{L_1}-\varepsilon_{L_1'}}{\sqrt{Q\varepsilon_{L_1}}}\mathrm{d}\cos\theta\\&+\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{3\sigma_{\mathrm{T}}}{4\varepsilon_{\mathrm{F}}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{L_1'}}{\varepsilon_{\mathrm{F}}}}\frac{1}{\sqrt{Q\varepsilon_{L_1}}Q}[\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}\sin^2\theta-(\varepsilon_{L_1'}-\varepsilon_f)Q]\mathrm{d}\cos\theta\end{aligned} \tag{3.2.73}$$

将 (3.2.73) 式中加减在 $\alpha_1\to\beta_1$ 对 B 区的积分, 得到下面的恒等变换:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_{L_1'}}=&\frac{3\sigma_{\mathrm{T}}}{4\varepsilon_{\mathrm{F}}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{L_1'}}{\varepsilon_{\mathrm{F}}}}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\frac{1}{\sqrt{Q\varepsilon_{L_1}}Q}[\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}\sin^2\theta-(\varepsilon_{L_1'}-\varepsilon_{\mathrm{F}})Q]\mathrm{d}\cos\theta\\&+\frac{3\sigma_{\mathrm{T}}}{4\varepsilon_{\mathrm{F}}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{L_1'}}{\varepsilon_{\mathrm{F}}\varepsilon_{L_1}}}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\left[\frac{\varepsilon_{L_1}-\varepsilon_{\mathrm{F}}}{\sqrt{Q}}-\frac{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}\sin^2\theta}{Q^{3/2}}\right]\mathrm{d}\cos\theta\end{aligned} \tag{3.2.74}$$

其中第一项的积分结果就是 (3.2.72) 式. 利用 (3.2.56) 和 (3.2.57) 式的不定积分, 得到 (3.2.74) 式中第二项的积分结果为

$$\left.\left[-\sqrt{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}}\frac{1-\cos^2\theta}{\sqrt{Q}}-\frac{Q^{3/2}}{3\sqrt{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}}}+\frac{\varepsilon_{L_1'}+\varepsilon_{\mathrm{F}}}{\sqrt{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}}}\sqrt{Q}\right]\right|_{\alpha_1}^{\beta_1} \tag{3.2.75}$$

其中三项代入积分上下限的求值, 可分别应用 (3.2.64) 和 (3.2.67) 式、(3.2.68) 式以及 (3.2.64) 式, 得到如下结果：

$$-\sqrt{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}}\frac{(1-\cos^2\theta)}{\sqrt{Q}}\bigg|_{\alpha_1}^{\beta_1}=2\frac{\sqrt{\varepsilon_{\rm F}-\varepsilon_{L_1}+\varepsilon_{L_1'}}}{\sqrt{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}}}(\varepsilon_{L_1}-\varepsilon_{\rm F}) \tag{3.2.76}$$

$$-\frac{Q^{3/2}}{3\sqrt{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}}}\bigg|_{\alpha_1}^{\beta_1}=\frac{2\sqrt{\varepsilon_{\rm F}-\varepsilon_{L_1}+\varepsilon_{L_1'}}}{3\sqrt{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}}}(\varepsilon_{L_1'}-\varepsilon_{L_1}+4\varepsilon_{\rm F}) \tag{3.2.77}$$

$$\frac{\varepsilon_{L_1'}+\varepsilon_{\rm F}}{\sqrt{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}}}\sqrt{Q}\bigg|_{\alpha_1}^{\beta_1}=-2\frac{\sqrt{\varepsilon_{\rm F}-\varepsilon_{L_1}+\varepsilon_{L_1'}}}{\sqrt{\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}}}(\varepsilon_{L_1'}+\varepsilon_{\rm F}) \tag{3.2.78}$$

将上面三项的结果相加后, 再加上 (3.2.72) 式中的第一项, 得到在 $\varepsilon_{L_1'}\geqslant\varepsilon_{L_1}-\varepsilon_{\rm F}$ 的情况下的能谱公式为

$$\frac{{\rm d}\sigma}{{\rm d}\varepsilon_{L_1'}}=\frac{\sigma_{\rm T}}{\varepsilon_{L_1}}-\frac{\sigma_{\rm T}}{\varepsilon_{L_1}}\left(1-\frac{\varepsilon_{L_1}-\varepsilon_{L_1'}}{\varepsilon_{\rm F}}\right)^{3/2} \tag{3.2.79}$$

合并两种能量区域的结果, 得到能谱的一般表示：

$$\frac{{\rm d}\sigma}{{\rm d}\varepsilon_{L_1'}}=\begin{cases}\dfrac{\sigma_{\rm T}}{\varepsilon_{L_1}}, & \varepsilon_{L_1'}\leqslant\varepsilon_{L_1}-\varepsilon_{\rm F}\\ \dfrac{\sigma_{\rm T}}{\varepsilon_{L_1}}\left[1-\left(1-\dfrac{\varepsilon_{L_1}-\varepsilon_{L_1'}}{\varepsilon_f}\right)^{\frac{3}{2}}\right], & \varepsilon_{L_1'}\geqslant\varepsilon_{L_1}-\varepsilon_{\rm F}\end{cases} \tag{3.2.80}$$

在图 3.4 和图 3.5 中分别给出了在 $\varepsilon_{L_1}\geqslant 2\varepsilon_{\rm F}$ 和 $\varepsilon_{L_1}\leqslant\varepsilon_{\rm F}$ 两种情况下的平均核子散射截面的曲线图. 显然, 在 $\varepsilon_{L_1}\geqslant 2\varepsilon_{\rm F}$ 情况下, 能谱中 $\varepsilon_{\rm F}\leqslant\varepsilon_{L_1'}\leqslant\varepsilon_{L_1}-\varepsilon_{\rm F}$ 部分是常数谱.

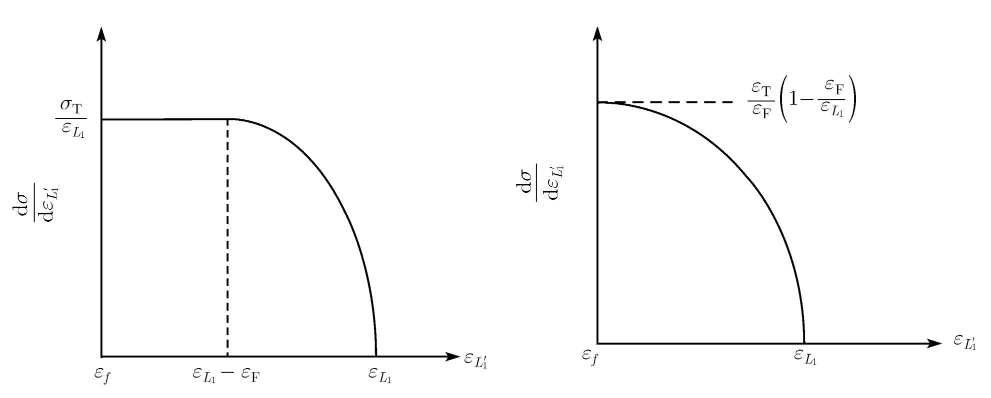


图 3.4　在 $\varepsilon_{L_1}\geqslant 2\varepsilon_{\rm F}$ 时平均核子散射截面　　图 3.5　在 $\varepsilon_{L_1}\leqslant 2\varepsilon_{\rm F}$ 时平均核子散射截面

对 (3.2.80) 式进行 $\varepsilon_{L_1'}$ 的积分, 得到核子在核物质中的平均核子散射截面为 (Clementel, 1961)

$$\bar{\sigma}=\int_{\varepsilon_{\mathrm{F}}}^{\varepsilon_{L_1}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_{L_1'}}\mathrm{d}\varepsilon_{L_1'}=\sigma_{\mathrm{T}}\left\{1-\frac{7}{5}\frac{\varepsilon_{\mathrm{F}}}{\varepsilon_{L_1}}+\frac{2}{5}\frac{\varepsilon_{\mathrm{F}}}{\varepsilon_{L_1}}\left(2-\frac{\varepsilon_{L_1}}{\varepsilon_{\mathrm{F}}}\right)^{5/2}\Theta(2\varepsilon_{\mathrm{F}}-\varepsilon_{L_1})\right\} \tag{3.2.81}$$

其中阶梯 Θ 函数的定义见 (2.2.48). 平均核子散射截面 $\bar{\sigma}$ 是入射能量 ε_{L_1} 的函数.

下面对考虑费米运动和 Pauli 原理的物理效应进行分析. 由于 Pauli 原理要求 $\varepsilon_{\mathrm{F}}\leqslant\varepsilon_{L_1'}$ 的条件存在, 仅在 $\varepsilon_{L_1'}=\varepsilon_{\mathrm{F}}$ 时, $\alpha_2=-1$. 特别是在 $\varepsilon_{L_1'}=\varepsilon_{L_1}$ 时, $\alpha_2=(\varepsilon_{L_1}-2\varepsilon_{\mathrm{F}})/\varepsilon_{L_1}$, 所以当 $\varepsilon_{L_1}<2\varepsilon_{\mathrm{F}}$ 时 (这是低能核反应中常遇到的情况), $\alpha_2<0$, 否则 $\alpha_2>0$. 这就表示, 在 $\varepsilon_{L_1}<2\varepsilon_{\mathrm{F}}$ 的情况下大角度散射禁区是在大于 90° 的区域, 而在 $\varepsilon_{L_1}>2\varepsilon_{\mathrm{F}}$ 的情况下大角度散射禁区是在小于 90° 的区域, 这意味着粒子散射角都是朝前的.

另外, 由直观的物理图形可以看出, 当费米面减小时, 核内的高动量核子成分减少, 可以降低费米运动效应, 并使得核子被激发到费米海上的概率加大. 因此, 总的说来, 在费米能减小时, Pauli 原理和费米运动效应减小.

可以看一个极端的情况, 当费米能 $\varepsilon_{\mathrm{F}}\to 0$ 时, 这时角度限制区域变为

$$\cos\theta=\alpha_2=\beta_2=\sqrt{\varepsilon_{L_1'}/\varepsilon_{L_1}},\quad \varepsilon_{\mathrm{F}}\to 0 \tag{3.2.82}$$

这表示了对一定出射粒子能量仅对应确定的角度, 使得双微分截面退化为角分布. 这相当于自由核子散射. 在自由核子散射的情况下 (见第 6 章 6.3 节), 由于费米能为 0, 这时既没有费米运动效应, 也没有 Pauli 原理效应. 因此, (3.2.82) 式就是由第 6 章中 (6.3.17) 式给出的自由核子散射的能量角度关系式.

在 $\varepsilon_{L_1}<2\varepsilon_{\mathrm{F}}$ 的情况下, 由 (3.2.52) 式给出的大角度散射的区域 $\alpha_2<0$, 总存在 $\theta>90^\circ$ 的散射, 不同于自由核子散射的仅有朝前散射的状态 $\theta\leqslant 90^\circ$. 这说明在考虑了费米运动而造成的背角散射. 因此, 在 $\varepsilon_{L_1}<2\varepsilon_{\mathrm{F}}$ 的情况下, 费米运动起主导作用. 而在 $\varepsilon_{L_1}>2\varepsilon_{\mathrm{F}}$ 的情况下, 还会出现 $\alpha_2>0$ 的情况, 这说明在高能粒子入射中高出射粒子能量的情况, 小角度出射的粒子的能量转移不足于激发被撞粒子到达费米面之上, Pauli 原理效应起主导作用, 使得出射粒子存在 $\theta<90^\circ$ 更加严格的限制条件. 由图 3.2 和图 3.3 看出, $\cos\theta<\alpha_2$ 是大角度禁区, 而且最大的禁区发生在 $\varepsilon_{L_1'}\approx\varepsilon_{L_1}$ 附近. 由公式 (3.2.52) 给出在 $\varepsilon_{L_1'}=\varepsilon_{L_1}$ 时的最大值 $\alpha_{2,\max}$ 为

$$\alpha_{2,\max}=1-2\varepsilon_{\mathrm{F}}/\varepsilon_{L_1} \tag{3.2.83}$$

显而易见, 随着入射能量的提高, $\alpha_{2,\max}$ 会由负值变成正值. 当 $\varepsilon_{L_1}=2\varepsilon_{\mathrm{F}}$ 时, $\alpha_{2,\max}=0$. 这说明在 $\varepsilon_{L_1}<2\varepsilon_{\mathrm{F}}$ 时, 总存在大于 90° 的大角度散射, 而 $\varepsilon_{L_1}>2\varepsilon_{\mathrm{F}}$ 时, 散射粒子出射角都在 90° 之内, 这正是上面分析的结果.

为了看清考虑了费米运动和 Pauli 原理后对出射粒子的大小角度限制. 以取 $\varepsilon_{\mathrm{F}}=30\mathrm{MeV}$, $\varepsilon_{L_1}=50\mathrm{MeV}$ 为例, 在表 3.2 给出了在 $\varepsilon_{L_1'}$ 的不同值的情况下 β_2,α_2 值. 表中将角度的余旋转换为角度值. 由表中结果看出, 当单粒子入射能量 $\varepsilon_{L_1'}$ 加大时, 最大出射角的禁区范围减小. 但是都大于距离 90°. 而对小角度出射角度限制都是比较小的. 因此, 考虑 Pauli 原理和费米运动对大角度散射角的限制效应是非常明显的, 而对朝前出射的角度限制效应总是比较小的.

表 3.2　在不同 $\varepsilon_{L_1'}$ 值的情况下, 考虑费米运动和 Pauli 原理对出射粒子角度限制范围

$\varepsilon_{L_1'}$/MeV	30°	35°	40°	45°	50°
β_2	0.000	3.773	3.436	2.055	0.000
α_2	180.0	139.4	123.4	111.5	101.5

应该注意到, 上面所有的动量、能量都是从费米气体的阱底算起. 其物理示意图像由图 3.6 给出. 因此物理观测到的能量与上面的表示有所差别, 实际观测到的发射粒子能量为

$$\varepsilon'=\varepsilon_{L_1'}-\varepsilon_{\mathrm{F}}-B \tag{3.2.84}$$

这里 B 为出射单粒子在复合核中的结合能. 对入射粒子能量也要做类似的变换.

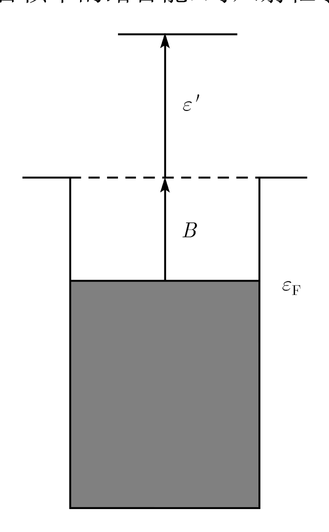


图 3.6　物理观测能量与原能量和结合能的关系示意图

3.3　动量线性相关的激子态密度

值得一提的是, Chadwick 等用另外的理论途径也得到了与 (3.2.54) 式完全相同的结果. 这就是考虑激子态密度与动量线性相关的模型 (Chadwick et al., 1991, 1992), 下面简单地介绍一下这种理论方法. 在与动量线性相关的理论中, 激子态密

度可以表示为

$$\rho(p,h,E,\boldsymbol{K})=\frac{1}{p!h!}\int_{i=1}\cdots\int_{i=p}\int_{j=1}\cdots\int_{j=h}\delta\left(E-\sum_{i=1}^{p}\varepsilon_i+\sum_{j=1}^{h}\varepsilon_j\right)$$
$$\times\delta\left(\boldsymbol{K}-\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{k}_i+\sum_{j=1}^{h}\boldsymbol{k}_j\right)$$
$$\times\prod_{i=1}^{p}\rho_1(k_i)\varTheta(k_i-k_{\mathrm{F}})\mathrm{d}\boldsymbol{k}_i\prod_{j=1}^{h}\rho_1(k_j)\varTheta(k_{\mathrm{F}}-k_j)\mathrm{d}\boldsymbol{k}_j \tag{3.3.1}$$

其中, p 是粒子数, h 是空穴数, ε_{F} 是费米能, ε_i 是粒子能量, ε_j 是空穴能量, $\boldsymbol{k}_i$ 是粒子的动量, $\boldsymbol{k}_j$ 是空穴的动量, 这些为例量都是从核位阱底部算起, 在动量空间的单粒子密度和单空穴密度分别为 $\rho(\boldsymbol{k}_i)$ 和 $\rho(\boldsymbol{k}_j)$.

如果用均匀费米球来近似表示动量空间的单粒子密度和单空穴密度时

$$\rho_1(\boldsymbol{k})=\frac{3A}{4\pi k_{\mathrm{F}}^3} \tag{3.3.2}$$

这里 A 是质量数, k_{F} 为费米动量. 对 (3.3.1) 式做六维积分, 就得到 $n=3$ 激子态在发射一个粒子后, 剩余核的与动量线性相关的激子态密度 $\rho\equiv\rho(1p,1h,E,\boldsymbol{K})$ (Chadwick et al., 1992).

$$\rho=\frac{\pi m\kappa^2}{K}\begin{cases}[k_{\mathrm{F}}^2-(mE/K-K/2)^2], & 若\ K_{\min}<K<K_1\ 或\ K_2<K<K_{\max}\\ 2mE, & 若\ K_1<K<K_2\\ 0, & 其他\end{cases} \tag{3.3.3}$$

其中,

$$K_{\substack{\min\\ \max}}=\sqrt{2mE+k_{\mathrm{F}}^2}\mp k_{\mathrm{F}} \tag{3.3.4}$$

$$K_{\substack{1\\ 2}}=\sqrt{2(k_{\mathrm{F}}^2-mE)\mp 2k_{\mathrm{F}}\sqrt{k_{\mathrm{F}}^2-2mE}} \tag{3.3.5}$$

以及 $\kappa=3A/4\pi k_f^3$. 由一般表示 (3.3.1) 式, 对任意粒子空穴态, 都可以得到了与动量线性相关的激子态密度, 角度相关的单粒子发射双微分截面就可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon\mathrm{d}\varOmega}=\frac{m\sigma_{\mathrm{inv}}\varepsilon}{2\pi^3\hbar^3}Q(p,h)\frac{\rho(p-1,h,E-\varepsilon_{\varOmega},\boldsymbol{K}-\boldsymbol{k}_{\varOmega})}{\rho(p,h,E,\boldsymbol{K})} \tag{3.3.6}$$

其中, σ_{inv} 是吸收截面, $\varepsilon_{\varOmega}$ 是物理观测到的能量, $Q(p,h)$ 是前面提到的区分中子和质子的组合因子. 由于能量和动量都是从核位阱底部算起, 如果 B 为粒子的结合能, 因此有

$$\varepsilon_\Omega = \varepsilon + B + \varepsilon_{\rm F} \tag{3.3.7}$$

以及对应的动量值：

$$|k_\Omega| = \sqrt{2m\varepsilon_\Omega} \tag{3.3.8}$$

这种与动量线性相关的激子态密度方法有其独特的优点. 不仅可以用等间隔单粒子态密度, 也可以用其他形式的单粒子态密度, 例如费米气体模型. 而且, 这种方法还自动包含了费米运动效应和 Pauli 不相容原理. 实际上 (3.3.3) 式就是 (3.2.54) 式的动量表示, 在该式中的三个区域就是 (3.2.54) 式中的 B, A 区, 以及发射角度限制区.

3.4　费米能

前面已经多次提到有关费米能的内容, 它直接影响费米运动和 Pauli 原理修正值. 下面讨论关于费米能量取值问题. 利用费米气体近似 (Bohr et al., 1969), 若考虑一个具有常数位势的体积 Q, 在费米气体的独立粒子态用平面波：

$$\varphi_\nu = \frac{1}{\sqrt{Q}}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\chi_{m_s}\xi_{m_1} \tag{3.4.1}$$

来描述, 其中 χ 和 ξ 是自旋和同位旋波函数, 分别用 $m_s=\pm1/2$ 和 $m_i=\pm1/2$ 标记.

而波矢 $\boldsymbol{k}$ 的允许值由周期性条件：

$$\varphi(x,y,z)=\varphi(x+L,y,z)=\varphi(x,y+L,z)=\varphi(x,y,z+L) \tag{3.4.2}$$

确定, 式中 L 式体积元 ($Q=L^3$) 的边长, 在 Q 中粒子是量子化的. 由条件 (3.4.2), 得到本征值：

$$k_x=\frac{2\pi}{L}n_x,\quad k_y=\frac{2\pi}{L}n_y,\quad k_x=\frac{2\pi}{L}n_z \tag{3.4.3}$$

其中

$$n_x,n_y,n_z=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{3.4.4}$$

在动量空间, 单粒子平均密度为 (Bohr et al., 1969)

$$\mathrm{d}n = 4\left(\frac{1}{4\pi}\right)^3 Q\mathrm{d}\boldsymbol{k} \tag{3.4.5}$$

其中 4 表示对应于每个 $\boldsymbol{k}$ 的本征值, 有四个不同的自旋–同位旋态. 当最低的单粒子态被填充时, 这些单粒子态的乘积构成费米气体的基态. 已填充的和未填充的能

级的分界线称为费米面, 由被占据的轨道的总数必须等于粒子数, 中子数为 N, 质子数为 Z, 从而由 (3.4.3) 式可得中子和质子的波矢值分别为

$$k_{\mathrm{F}}^{n}=\left(3\pi^{2}\frac{N}{Q}\right)^{1/3},\quad k_{\mathrm{F}}^{p}=\left(3\pi^{2}\frac{Z}{Q}\right)^{1/3}\tag{3.4.6}$$

在核结构研究中, 根据 α 衰变寿命和 α 粒子对轻核散射截面的证据, 提出在与质量数 A 粗略成正比的体积中, 原子核具有近似为常数的密度这个特征, 在高能电子散射实验中, 证实了这个推测, 并求得在核中心的密度为

$$\rho(0)=\left(\frac{4\pi}{3}k_{\mathrm{F}}^{3}\right)^{-1}\approx 0.17\ \text{核子}\ \cdot \mathrm{fm}^{-3}\tag{3.4.7}$$

由此可以得到平均 k_{F} 值 $(N=Z=A/2)$ 为

$$k_{\mathrm{F}}\approx 1.12\mathrm{fm}^{-1}\tag{3.4.8}$$

利用 $p_{\mathrm{F}}=\hbar k_{\mathrm{F}}=\sqrt{2m\varepsilon_{\mathrm{F}}}$, 得到费米气体中单粒子的最大动能, 也就是费米面能：

$$\varepsilon_{\mathrm{F}}=\frac{(\hbar k_{\mathrm{F}})^{2}}{2m}\approx 26\mathrm{MeV}\tag{3.4.9}$$

这仅是一个粗略的估计值. 如在第二章中所述, 在应用等间隔单粒子能级密度时, 往往取 $\varepsilon_{\mathrm{F}}\geqslant 30\mathrm{MeV}$, 以匹配这种近似条件的成立条件.

3.5　推广的激子模型主方程

为了更加精细地描述在预平衡核反应过程中各种粒子的发射行为, 使之可以计算包含角度的核子发射双微分截面, 就需要在普通的激子态占有概率 $p(n,t)$ 中加入能量和角度因素, 记为 $q(n,\varepsilon,\Omega,t)$, 它表示 n 激子态在 t 时刻、能量是 ε, 角度方向沿 Ω 方向的占有概率, 它和激子态占有概率 $p(n,t)$ 的关系为 (Iwamota et al., 1984; Wen et al., 1985; Zhang et al., 1989; Mantzouranis et al., 1976)

$$\int q(n,\varepsilon,\Omega,t)\mathrm{d}\varepsilon\mathrm{d}t=p(n,t)\tag{3.5.1}$$

这样就把普通激子模型变为推广的激子模型, 这时主方程可写成

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q(n,\varepsilon,\Omega,t)=&\sum_{m}\int q(m,\varepsilon'\Omega,t)W_{m\to n}(\Omega'\varepsilon',\Omega\varepsilon)\mathrm{d}\Omega'\mathrm{d}\varepsilon'\\&-\sum_{m}\int q(n,\varepsilon,\Omega,t)W_{n\to m}(\Omega\varepsilon,\Omega'\varepsilon')\mathrm{d}\Omega'\mathrm{d}\varepsilon'\end{aligned}\tag{3.5.2}$$

其中, $W_{m\to n}(\varOmega'\varepsilon',\varOmega\varepsilon)$ 表示单位时间从 $(m,\varOmega',\varepsilon')$ 态到 $(n,\varOmega,\varepsilon)$ 态的跃迁概率. 假定它可以分解为两个独立的部分：

$$W_{m\to n}(\varOmega'\varepsilon',\varOmega\varepsilon)=\lambda_{m\to n}G(\varOmega'\varepsilon',\varOmega\varepsilon) \tag{3.5.3}$$

这里, $\lambda_{m\to n}$ 为单位时间激子态 $p(m,t)$ 到激子态 $p(n,t)$ 的跃迁速率, 而 $G(\varOmega'\varepsilon',\varOmega\varepsilon)$ 表示由 $\varOmega'\varepsilon'$ 状态的核子经过一次有效碰撞后变为 $\varOmega\varepsilon$ 状态的概率 (Mantzouranis et al., 1975), 因此 $G(\varOmega'\varepsilon',\varOmega\varepsilon)$ 可视为粒子散射的双微分截面. 并假设它满足 $G(\varOmega'\varepsilon',\varOmega\varepsilon)=G(\varOmega\varepsilon,\varOmega'\varepsilon')$ 的可逆条件, 并满足归一化条件：

$$\int G(\varOmega'\varepsilon',\varOmega\varepsilon)\mathrm{d}\varOmega'\mathrm{d}\varepsilon'=1 \tag{3.5.4}$$

而 $\lambda_{m\to n}$ 为普通激子模型中的跃迁速率, 满足 $m=n,n\pm2$. 其中 $\lambda_n^{0,\pm}$ 分别表示在 n 激子态中产生 $\Delta n=0,\pm2$ 跃迁过程的跃迁速率, W_n 为 n 激子态发射各种粒子的总速率. 这时主方程 (3.5.2) 可改写为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q(n,\varepsilon,\varOmega,t)=&\sum_m\lambda_{m\to n}\int q(m,\varepsilon',\varOmega',t)G(\varOmega'\varepsilon',\varOmega\varepsilon)\mathrm{d}\varOmega'\mathrm{d}\varepsilon'\\&-\sum_m\lambda_{n\to m}\int q(n,\varepsilon,\varOmega,t)G_{nm}(\varOmega\varepsilon,\varOmega'\varepsilon')\mathrm{d}\varOmega'\mathrm{d}\varepsilon'\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

在多部直接核反应中需要追踪记录碰撞过程中的能量, 而在多部复合核反应过程中, 认为是每次碰撞后都有足够时间达到局部统计平衡, 因此在多部复合核反应过程不显含末态能量 ε', 这表示在上面方程中与能量无关. 这时主方程退化为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}q(n,\varOmega,t)}{\mathrm{d}t}=&\sum_m\lambda_{m\to n}\int q(m,\varOmega',t)G(\varOmega',\varOmega)\mathrm{d}\varOmega'\\&-\sum_m\lambda_{n\to m}\int q(n,\varOmega,t)G_{nm}(\varOmega,\varOmega')\mathrm{d}\varOmega'\end{aligned}$$

定义含角度因素的寿命, 并用 Legendre 多项式展开：

$$\tau(n,\varOmega)=\int_0^\infty q(n,\varOmega,t)\mathrm{d}t=\sum_l\frac{2l+1}{4\pi}\tau_l(n)P_l(\cos\varOmega) \tag{3.5.6}$$

对时间积分后得到寿命主方程为

$$\begin{aligned}-\delta_{n,n_0}q(n,\varOmega,t=0)=&\sum_m\lambda_{m\to n}\int\tau(m,\varOmega')G(\varOmega',\varOmega)\mathrm{d}\varOmega'\\&-\sum_m\lambda_{n\to m}\int\tau(n,\varOmega)G_{nm}(\varOmega,\varOmega')\mathrm{d}\varOmega'\end{aligned}$$

将 $G(\Omega', \Omega)$ 按下面的 Legendre 多项式展开为

$$G(\Omega, \Omega') = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} \mu_l(\varepsilon) P_l(\cos\theta) \tag{3.5.7}$$

其中 θ 为 Ω 和 Ω' 之间的夹角. 利用公式球谐函数求和公式 (王竹溪等, 1965):

$$P_l(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_m Y_{lm}(\Omega) Y^*_{lm}(\Omega') \tag{3.5.8}$$

其中 $Y_{lm}(\Omega)$ 是球谐函数, 由此 (3.4.8) 式变为

$$G(\Omega, \Omega') = \sum_{lm} \mu_l(\varepsilon) Y_{lm}(\Omega) Y^*_{lm}(\Omega') \tag{3.5.9}$$

因此, 再利用 Legendre 多项式与球谐函数的关系:

$$P_l(\Omega) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{l0}(\Omega) \tag{3.5.10}$$

利用 (3.5.4) 式, 完成对 Ω' 角度积分, 并在主方程乘上 $P_l(\cos\Omega)$, 完成对 Ω 的角度积分后, 寿命主方程变为

$$-\delta_{n,n_0} \int \mathrm{d}\Omega P_l(\cos\Omega) q(n, \Omega, t=0) = \sum_{m,l} \lambda_{m\to n} \mu_l(\varepsilon) \tau_l(m) - \sum_{m,l} \lambda_{n\to m} \mu_l(\varepsilon) \tau_l(n) \tag{3.5.11}$$

对于初始激子态, 可以用核子散射双微分截面代替, 即 $q(n, \Omega, t=0) = G(\Omega, \Omega')$. 因此,

$$\int \mathrm{d}\Omega P_l(\cos\Omega) q(n, \Omega, t=0) = \int \mathrm{d}\Omega P_l(\cos\Omega) G(\Omega, \Omega') = \mu_l(\varepsilon) \tag{3.5.12}$$

由于在激子模型中, $\lambda_{n\to m}, \lambda_{m\to n}$ 只能在相邻的激子态之间跃迁, 即有

$$\sum_m \lambda_{m\to n} = \lambda^+_{n-2} + \lambda^-_{n+2} + \lambda^0_n \text{ 和 } \sum_m \lambda_{n\to m} = \lambda^+_n + \lambda^-_n + \lambda^0_n + W_n \tag{3.5.13}$$

其中 $\lambda^{0,\pm}_n$ 分别表示在 n 激子态中, 产生 $\Delta n = 0, \pm 2$ 跃迁过程的跃迁速率, W_n 为 n 激子态发射各种粒子的总速率. 将上述结果代入 (3.5.12) 式, 可得分波形式的寿命主方程:

$$-\delta_{n,n_0} \mu_l = \lambda^+_{n-2} \mu_l \tau_l(n-2) + \lambda^-_{n+2} \mu_l \tau_l(n+2) - \tau_l(n)[\lambda^+_n + \lambda^-_n + \lambda^0_n(1-\mu_l) + W_n] \tag{3.5.14}$$

这时分波形式主方程为一组 $n = n_0, n_0+2, n_0+4, \cdots$ 的耦合微分方程, n_0 为初始激子数. 显而易见, 由于在微观态中加入了角度这个物理量, 因此在 $\Delta n = 0$ 内部

的跃迁过程中, 也会发生角度的变化, 因此主方程中需要加入 λ_n^0 的跃迁. 为了简化, 用了 $\mu_l \equiv \mu_l(\varepsilon)$ 表示.

令

$$\Lambda_l^+(n) \equiv \mu_l \lambda_n^+, \quad \Lambda_l^-(n) \equiv \mu_l \lambda_n^-, \quad \zeta_l(n) \equiv [\lambda_n^+ + \lambda_n^- + (1-\mu_l)\lambda_n^0 + W_n]^{-1} \tag{3.5.15}$$

这时可以将分波形式主方程变化为

$$-\delta_{n,n_0}\mu_l = \Lambda_l^+(n-2)\tau_l(n-2) + \Lambda_l^-(n+2)\tau_l(n+2) - \frac{\tau_l(n)}{\zeta_l(n)} \tag{3.5.16}$$

仍然采用无返回近似, 在 $\zeta_l(n)$ 中略去 λ_n^-, 这时分波寿命解为

在 $n=3$ 时

$$\tau_l(3) = \zeta_l(3)\mu_l \tag{3.5.17}$$

在 $n>3$ 时可利用递推贡献

$$\tau_l(n) = \zeta_l(n)\Lambda_l^+(n-2)\tau_l(n-2) \tag{3.5.18}$$

由此可见, 在 $n>3$ 时分波寿命解中包含了 $\mu_l^{(n-1)/2}$ 的项, 由于总有 $\mu_{l>0}<1$, 当 n 加大时 $\mu_{l>0}^{(n-1)/2} \to 0$, 因此从高激子态发射粒子的双微分截面是趋向各向同性分布的.

这时出射粒子的双微分截面可以被写为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon\mathrm{d}\Omega} = \sigma_a \sum_n W_n \tau(n,\Omega) = \sigma_a \sum_n W_n \sum_l \frac{2l+1}{4\pi}\tau_l(n)P_l(\cos\theta) \tag{3.5.19}$$

其中 $l=0$ 项对应能谱, 即

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon} = \sum_n \frac{\mathrm{d}\sigma(n)}{\mathrm{d}\varepsilon} = \sigma_a \sum_n \tau_0(n) W_n \tag{3.5.20}$$

因此, 出射粒子的双微分截面也可以写为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon\mathrm{d}\Omega} = \sum_n \frac{\mathrm{d}\sigma(n)}{\mathrm{d}\varepsilon} A(n,\varepsilon,\Omega) \tag{3.5.21}$$

其中 $A(n,\Omega)$ 是 n 激子态的角度因子, 由 (3.5.19) 式、(3.5.20) 与 (3.5.21) 式对比得到 n 激子态的角度因子的具体表示:

$$A(n,\varepsilon,\Omega) = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi}\frac{\tau_l(n)}{\tau_0(n)}P_l(\cos\theta) \tag{3.5.22}$$

显然, 它满足归一化条件. (3.5.22) 式本身关系的成立是不依赖于所使用的具体物理模型. 而在计算 (3.5.17) 式中的 μ_l 时, 则要依赖于所使用的物理模型, 下面分别用自由核子散射模型和 Fermi 气体模型来求 μ_l.

关于自由核子散射的有关公式在第 6 章的 6.3 节给出. 在低能自由核子散射中, 实验测量结果显示在质心系中的角分布近似为各向同性, 即

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_C}=\frac{\sigma_\mathrm{T}}{4\pi} \tag{3.5.23}$$

由 (6.3.18) 式得知在实验室系中的角分布仅存在 $\frac{\pi}{2}\leqslant\theta_L$ 的角度区域内, 因此可表示为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_L}=\sigma_\mathrm{T}\frac{\cos\theta_L}{\pi}\Theta\left(\frac{\pi}{2}-\theta_L\right) \tag{3.5.24}$$

其中 $\Theta(x)$ 是由 (2.2.48) 式定义的阶梯函数. 在 $G(\Omega,\Omega')$ 之中表示朝 Ω 运动方向的核子经过一次碰撞变为朝 Ω' 方向, 下面简记 θ_L 为 θ, 可得

$$G(\Omega,\Omega')=\frac{1}{\sigma_\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_L}=\frac{\cos\theta}{\pi}\Theta\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \tag{3.5.25}$$

显然, 它是满足归一化条件的, 即

$$\int G(\Omega,\Omega')\mathrm{d}\Omega=\int\frac{\cos\theta}{\pi}\Theta\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\mathrm{d}\cos\theta\mathrm{d}\varphi=2\int_0^1\cos\theta\mathrm{d}\cos\theta=1 \tag{3.5.26}$$

将 (3.5.26) 式代入 (3.5.7) 式的 Legendre 多项式展开中, 可得

$$G(\Omega,\Omega')=\frac{\cos\theta}{\pi}\Theta\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sum_l\frac{2l+1}{4\pi}\mu_l P_l(\cos\theta) \tag{3.5.27}$$

记 $x=\cos\theta$, 在上述 Legendre 多项式展开的形式下, 得到自由核子散射的 Legendre 多项式展开系数 μ_l 的表示为

$$\mu_l=2\int_{-1}^1 x\Theta(x)P_l(x)\mathrm{d}x=2\int_0^1 xP_l(x)\mathrm{d}x \tag{3.5.28}$$

显然 $\mu_0=1$. 当 l 是奇数时, $P_l(x)$ 是 x 的奇函数, 因此 $xP_l(x)$ 是 x 的偶函数. 这时 (3.4.28) 式可以改写为

$$\mu_l=\int_{-1}^1 xP_l(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 P_1(x)P_l(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\delta_{l1} \tag{3.5.29}$$

显然有

$$\mu_1=2/3 \tag{3.5.30}$$

而其他 $l>1$ 奇数分波都是 $\mu_l=0$, 因此核子散射的朝前性都是来自 $l=1$ 的分波.

当 $l=2n$ 为偶数时, 这时 $n=1,2,3,\cdots$. 利用 Legendre 多项式的罗巨格公式 (王竹溪等, 1965):

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l \tag{3.5.31}$$

代入到 (3.5.28) 式, 进行分步积分, 代入积分的上下限后得到

$$\mu_{l=2n}=\frac{1}{2^{2n-1}}\frac{(-1)^{n+1}(2n-2)!}{(n+1)!(n-1)!} \tag{3.5.32}$$

例如, $\mu_2=0.25$, $\mu_3=0$, $\mu_4=-1/24$. 综上所述, (3.5.30)~(3.5.32) 式是自由核子散射模型中 μ_l 的值. 这种公式已经在一些理论计算程序中曾被应用 (Mantzouranis et al., 1976).

自由核子散射模型没有考虑靶内核子的费米运动, 自然也就没有考虑 Pauli 原理. 因此在实际应用中, 应该将 3.4 节得到的考虑了费米运动和 Pauli 原理的单核子出射的双微分截面公式. 它的归一化单粒子发射平均双微分截面的表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_{L_1'}\mathrm{d}\Omega_{L_1'}}=\begin{cases}\dfrac{3\sigma_T}{8\pi\bar{\sigma}\varepsilon_{\mathrm{F}}}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_{L_1'}}{\varepsilon_{\mathrm{F}}}}\dfrac{\varepsilon_{L_1}-\varepsilon_{L_1'}}{\sqrt{Q\varepsilon_{L_1}}}, & \text{在 A 区}\\[2ex] \dfrac{3\sigma_T}{8\pi\bar{\sigma}\varepsilon_{\mathrm{F}}}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_{L_1'}}{\varepsilon_{\mathrm{F}}}}\dfrac{1}{\sqrt{Q\varepsilon_{L_1}}Q}[\varepsilon_{L_1}\varepsilon_{L_1'}\sin^2\theta-(\varepsilon_{L_1'}-\varepsilon_{\mathrm{F}})Q], & \text{在 B 区}\end{cases} \tag{3.5.33}$$

其中 $\bar{\sigma}$ 是平均核子散射截面. 由于核子总散射截面 σ_T 也包含在 $\bar{\sigma}$ 之中, 因此在 (3.5.33) 式中, 归一化的单粒子发射双微分截面实际上与 σ_T 无关. 在这种情况下, 无法得到自由核子散射的 μ_l 解析表达式, 而只能用数值计算得到 μ_l 值 (Zhang et al., 1999). 在 (3.5.33) 式中, 除了入射能量 ε_{L_1} 是自变量外, 对出射能量 $\varepsilon_{L_1'}$ 积分后, 仅是散射角 θ 的函数. 由 (3.5.7) 式, 利用 Legendre 多项式的正交性, 可以得到 μ_l 的计算公式为

$$\mu_l=\int G(\Omega,\Omega')P_l(\cos\theta)\mathrm{d}\Omega'=\int \mathrm{d}\Omega'\int_{\varepsilon_{\mathrm{F}}}^{\varepsilon_{L_1}}\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_{L_1'}d\Omega_{L_1'}}\mathrm{d}\varepsilon_{L_1}P_l(\cos\theta) \tag{3.5.34}$$

由于 (3.5.33) 式给出的核子散射双微分截面是归一化的, 因此 $\mu_0=1$. 计算表明, μ_l 之值随着分波值 l 的加大而明显减小, 但是总有 $\mu_1>0$, 这表明粒子发射有朝前性, 这正是预平衡发射的特征, 它不同于 90° 对称的平衡态发射的特征. 在表 3.3 中给出了用 LUNF 程序计算得到的在中子入射能量为 14MeV 时的 μ_l 值 (Zhang, 2002). 可以看出, μ_l 随分波 l 加大而迅速减小, 具有很好的收敛性. 其中 $l=1$ 的 μ_1 值的大小是发射粒子朝前性强弱的象征. 对比自由核子散射的 (3.5.30) 式, 总有 $\mu_1=0.6667$, 由此可见, 在考虑了费米运动和 Pauli 原理后, 减弱了粒子发射的朝前性. 另外 $\mu_3>0$ 也不同于自由核子散射.

表 3.3 $E_n = 14$MeV 时, 从 ^{6}Li 到 ^{16}O 的 μ_l 计算值

核素	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$
Li−6	0.4836	0.1219	0.08068	0.07842
Li−7	0.4537	0.1213	0.11000	0.08798
Be−9	0.5293	0.1335	0.00328	0.00381
B−10	0.6091	0.1444	0.01302	0.01107
B−11	0.5085	0.1258	0.05235	0.06058
C−12	0.5198	0.1297	0.04233	0.04906
N−14	0.5485	0.1434	0.01447	0.01330
O−16	0.4713	0.1203	0.09313	0.08346

参 考 文 献

丁大钊, 叶春堂, 赵志祥, 等. 2005. 中子物理学 —— 原理, 方法与应用. 北京: 原子能出版社.

王竹溪, 郭敦仁. 1965. 特殊函数概论. 北京: 北京大学出版社: 235.

Akkermans J M, Gruppelaar H, Refo G. 1980. Angular Distributions in a unified model of pre-equilibrium and equilibrium neutron emission. Phys. Rev. C, 22: 73.

Bohr A, Mottelson B R. 1969. Nuclear structure. New York: W. A. Benjamin, Inc, 1.

Chadwick M B, Oblozinsky P. 1991. Linear momentum in the Exciton model: Consistent way to obtain angular distributions. Phys. Rev. C, 44: 1740.

Chadwick M B, Oblozinsky P. 1992. Particle-hole state densities with linear momentum and angular distribution in pre-equilibrium reactions. Phys. Rev., C46: 2028-2041.

Clementel E, Glashow S L. 1961. Phys. Rev. Lett., 6: 423.

Cline C K. 1972. Extensions to the pre-equilibrium statistical model and a study of complex particle emissions. Nucl. Phys. A, 193: 417.

Costa C, Grupperlaar H, Akkermans J M. Angle-energy Correlated model of pre-eguilibrium angular distribution. phys. Rev. C, 28: 587.

Dobes J, Betak E. 1983. Two-component exciton model. Z. Phys. A, 310: 329.

Iwamoto A, Hadada K. 1984. An extension of the generalized exciton model and calculation of (p, p') and (p, α) angular distribution. Nucl. Phys. A, 419: 472.

Kikuchi K, Kawai M. 1968. Nuclear matter and nuclear reaction. Amsterdam: North-land.

Mantzouranis K, Agassi D, Weidenmuller H A. 1975. Angular distribution of nucleons for pre-equilibrium reactions. Phys. Lett. B, 57: 220.

Mantzouranis K, Weidenmuller H A, Agassi D. 1976. Generalized exciton model for the description of pre-equilibrium angular distributions, Z. Phys. A, 276: 145.

Sun Z Y, Wang S N, Zhang J S, et al. 1982. Angular distribution calculation based on the exciton model taking account of the inference of the Fermi motion and the Pauli Principle Z. Phys. A, 305: 61.

Wen Y Q, Shi X J, Yan S W, et al. 1985. A semi-classical model of multi-step direct and compound nuclear reactions. Z. Phys. A, 324: 325-330.

Zhang J S, Shi X J. 1989. The formulation of UNIFY code for the calculation of fast neutron data for structure material. INDC(CRP)-014/LJ, IAEA, Vienna.

Zhang J S, Han Y L, Cao L G. 1999. Model calculation of n+^{12}C reactions from 4.8 to 20 MeV. Nucl. Sci. Eng., 133: 218-234.

Zhang J S. 2002. UNF Code for fast neutron data Calculations. Nucl. Sci. Eng., 142: 207.

第 4 章　复杂粒子的预平衡发射

4.1　复杂粒子预平衡发射率

复杂粒子发射的直接反应机制已有相当成熟的理论模型 (Clendenming, 1983; Satchler, 1983). 直接反应的物理图像是, 入射粒子在进入到靶核前, 仅与核外层的少数核子通过拾缀过程或削裂过程发生粒子交换, 而其他核子是仅为它们提供一个平均场. 模型理论是建立在扭曲波玻恩近似 (DWBA) 的基础上, 内禀波函数通常是用壳模型波函数来描述的 (Satchler, 1964). 但是, 对复杂粒子发射过程情况就变得很不同了. 对于平衡态的复杂粒子发射, 由于经过长时间的核内的级联碰撞, 会存在集团形成的概率, 而且这些集团在核表面形成的概率比较大, 这些集团就有被发射的可能, 形成平衡态的复杂粒子发射过程. 而对于复杂粒子的预平衡发射, 其物理过程的图像就有所不同了. 由于入射粒子已经进入靶核而形成复合核, 在达到平衡态之前, 就会存在粒子发射的可能. 而平衡前出射的核子在发射过程中拾取了复合核内的其他核子而形成复杂粒子, 就会形成复杂粒子的预平衡发射. 目前比较成功的理论模型是预平衡的拾缀机制 (Pickup-Mechanism). 下面介绍这个理论模型的内容.

从细致平衡原理已经得到从 n 激子态预平衡发射的速率, 但是在复杂粒子发射的情况下, 不仅需要考虑单费米子激子模型理论中区分中子和质子效应的组合因子 $Q_b(n)$, 还要考虑复杂粒子的预形成概率, 这时复杂粒子的预平衡发射速率为 (丁大钊等, 2005)

$$
\begin{aligned}
W^{J\pi}(n,E^*,\varepsilon_b) = &\frac{1}{2\pi\hbar}\sum_{jl}\sum_{I'\pi'}T_{jl}(\varepsilon_b)\Delta(JjI')f_l(\pi,\pi') \\
&\times F_b(\varepsilon_b)Q_b(n)\frac{\omega^{I'\pi'}(n-\Delta n,E')}{\omega^{J\pi}(n,E^*)}
\end{aligned}
\tag{4.1.1}
$$

其中 E' 是发射复杂粒子后的剩余激发能, $F_b(\varepsilon)$ 是出射能量为 ε 的 b 粒子在复合核内的预形成概率, 这实际上是核子出射时拾取复合核内其他核子形成复杂粒子集团的概率, 它不同于直接反应中的拾缀机制, Δn 是发射复杂粒子后激子数的变化量, ω 是激子态密度.

显然, 对于单核子发射不存在拾取复合核内其他核子的过程, 因此 $F_b(\varepsilon)=1$ 为量纲为一因子. $W^{J\pi}(n,E^*,\varepsilon_b)$ 的量纲为 $\mathrm{MeV^{-1}s^{-1}}$.

复杂粒子预形成概率计算的基本物理思想是, 应用相空间体积大小来确定预形成概率. 有关内容可以参见下列文献 (Iwamoto et al., 1982; Sato et al, 1983; Zhang et al., 1993b; Zhang et al., 1988), 改进的理论结果参见 (Zhang et al., 1996; Zhang, 1994a).

在考虑了复杂粒子的拾取机制时, 需要对各种组态求和, 这时 (4.1.1) 式改写为

$$W^{J\pi}(n,E^*,\varepsilon_b)=\frac{1}{2\pi\hbar}\sum_{jl}\sum_{I'\pi'}T_{jl}(\varepsilon_b)\Delta(JjI')f_l(\pi,\pi')\times\sum_{\lambda m}F_{b[\lambda,m]}(\varepsilon_b)Q_{b[\lambda,m]}(n)\frac{\omega^{I'\pi'}(n-\lambda,E')}{\omega^{J\pi}(n,E^*)} \tag{4.1.2}$$

其中, 组态符号 $[\lambda,m]$ 的意义是由第 3 章的 (3.1.8) 式给出. 虽然复合核内的预形成概率满足归一化条件 (见 (4.3.25) 式), 而在公式 (4.1.2) 中显示出, 在考虑不同拾取机制组态后末态激子数的变化是 $\Delta n=n-\lambda$, 这意味着出射核子在费米海上减少 λ 个核子, 因此不同组态的预形成概率因子是乘在不同的末态激子态密度上, 在费米海下拾取了 m 个核子, 但被拾取走后而形成的 m 个空穴不是由剩余相互作用造成的空穴, 这不应该记入末态激子态的空穴数之中 (Iwamoto et al., 1982).

一般来说, 复杂粒子发射时, 不仅要克服库仑位垒, 还需要扣除结合能. 另外, 由第 3 章的表 3.1 的结果所示, 复杂粒子组合因子对激子数的依赖关系相对比较弱. 影响复杂粒子发射率的主要因素来自于复杂粒子的预形成概率 $F_{b[\lambda,m]}$ 和激子态的末态密度. 为了看清不同组态发射后对应的激子态的变化值, 下面给出一些数值例子.

定义被拾取 $\lambda\geqslant 2$ 核子与被拾取一个核子 $(\lambda=1)$ 的末态激子态密度比值为

$$R(n,E',\lambda)\equiv\omega(n-\lambda,E')/\omega(n-1,E') \tag{4.1.3}$$

当激子态密度用 (2.2.42) 式表示的 Williams 公式时, (4.1.3) 式可以变为

$$R(n,E',\lambda)=\frac{(p-1)!(n-2)!(gE'-A(p-\lambda,h))^{n-\lambda-1}}{(p-\lambda)!(n-\lambda-1)!(gE'-A(p-1,h))^{n-2}} \tag{4.1.4}$$

由于 (4.1.4) 式是应用于中重核的情况, 一般来说 $gE'\gg 1$. 当 gE' 值足够大时, 使得 Pauli 原理修正值可以被忽略时, (4.1.4) 式可以近似写为

$$R(n,E',\lambda)\approx\frac{(p-1)!(n-2)!}{(p-\lambda)!(n-\lambda-1)!(gE')^{\lambda-1}} \tag{4.1.5}$$

由 (4.1.5) 式可以看出, 激子态密度比值是随 λ 的加大以 gE' 的幂次迅速减小. 对于中重核, 在中高能的核反应中, gE' 值可以达到上百甚至更高. 这时, 高 λ 组态的

末态激子态密度会变得非常之小, 以致可以被忽略. 另外, 为了进一步说明问题, 以中重核的低激发能情况为例, 取 $g \approx 10\text{MeV}^{-1}$, 当剩余激发能取为 $E' = 5\text{MeV}$ 时, Pauli 原理修正值取自第 2 章中的表 2.1. 在表 4.1 中给出用不同激子数, 不同组态, 在上述剩余激发能的情况下激子态密度比值.

表 4.1 各种剩余激发能的情况下, 不同组态的激子态密度比值 $R(n, E', \lambda)$

λ	$n=3$	$n=5$	$n=7$
2	0.020	0.125	0.494
3		0.005	0.067
4			0.004

表 4.1 中的空格表示没有这种组态出现, 它们对应出射复杂粒子拾取费米面上的核子数大于粒子数 $\lambda > p$. 相对于 $\lambda = 1$ 组态, 其他高 λ 组态对应的末态概率都是非常小的. 当激发能比较高时, 在 $n = 5, 7$ 激子态中, 需要适当考虑 $\lambda = 2$ 的组态发射. 因此, 在 $n = 3$ 激子态中, 仅考虑 $\lambda = 1$ 组态是一个很好的近似. $\lambda = 1$ 组态对应的物理图像是, 被发射的核子拾取费米海下的核子而组成的复杂粒子. 从表 4.1 还看到, 对于低剩余激发能的高激子态中, 低 λ 组态的 $R(n, E', \lambda)$ 值并不小, 不能轻易被忽略. 而从后面的预形成概率的结果可以看出, 高激子态中的高 λ 组态的预形成概率都非常小. 综合起来看, 高 λ 组态在预平衡发射中的贡献是比较小的.

下面来讨论在轻核反应中的复杂粒子的预平衡发射. 前面已经提到, 中子引发的轻核反应中, 剩余核都处于分立能级. 其角动量和宇称都具有确定的状态. 剩余核的剩余激发能就是 k 分立能级的能量 E_k, 角动量和宇称分别为 I_k, π_k. 因此发射粒子的能量 ε_b 也是确定的, 能谱中包含了 δ 函数. 因此对末态的能量积分后, 就得到复杂粒子的预平衡发射率, 量纲为 s^{-1}. 于是对于 $J\pi$ 道, 从复合核预平衡 n 激子态到剩余核分立能级的发射率为

$$W^{J\pi}(n, E^*, \varepsilon_b) = \frac{1}{2\pi\hbar\omega^{J\pi}(n, E^*)} \sum_{j=|J-I_k|}^{J+I_k} \sum_{l=|j-s_b|}^{J+s_b} T_{jl}(\varepsilon_b) f_l(\pi, \pi_k) F_b(\varepsilon_b) Q_b(n) \tag{4.1.6}$$

其中, s_b 为发射粒子的自旋,ε_b 是发射粒子能量, $f_l(\pi, \pi_k)$ 是 (2.4.17) 式给出的保证宇称守恒的因子.

4.2 中子诱发的轻核反应中 ^{5}He 的发射

目前中子能量在 20MeV 以下区域的核数据内容是有重要的应用价值, 在这个能区, 目前已经有一些核反应统计理论模型程序 (Young et al., 1996; Fu, 1988; Zhang, 2002) 作为广泛使用的核数据理论计算工具. 在这些程序中, 考虑的发射粒

子包括有中子、质子以及 $A \leqslant 4$ 的复杂粒子, 如氘、氚、^{3}He 和 α 粒子, 这些复杂粒子都是稳定的核子集团. 轻核的集团结构比较强, 而作为轻核集团结构的研究, 早在 1984 年就已经有人研究过 14.4MeV 中子引发 ^{10}B 的集团结构效应 (Turk et al., 1984). 测量了 ^{10}B(n, ^{5}He)^{6}Li$_1$(d,α) 反应数据, 是用准自由散射过程, 在扭曲波玻恩近似的理论基础上, 加入了末态相互作用 FSI 的理论方法来解释实验测量数据. 但是, 这个非稳定核 ^{5}He 的发射却长期以来被忽略了. 研究表明, 对一些轻核, 在考虑了 ^{5}He 发射后, 就可以显著改进中子能谱在低能区域与实验值的符合. 因此, 对 ^{5}He 发射进行了研究 (Zhang, 2004). 首先在中子诱发的核反应中比较了 ^{3}He 和 ^{5}He 发射的阈能值, 两者的电荷数相同, 库仑势垒效应也应该大致相同. 结果表明, 中子引发的各种轻核的复合核都普遍地有利于 ^{5}He 的发射, 而不利于 ^{3}He 的发射. 遗憾的是, 目前上述广泛应用的核反应统计理论模型程序中都没有考虑 ^{5}He 的发射.

^{5}He 是非稳定核, 会自发分裂为一个中子和一个 α 粒子, 因此发射 ^{5}He 的反应最终属于 (n, nα) 反应道. 表 4.2 给出了中子诱发 1p 壳轻核发射 ^{3}He 和 ^{5}He 的阈能值.

表 4.2　中子诱发 1p 壳核发射 ^{3}He 和 ^{5}He 的阈能值/MeV

核素	^{9}Be	^{10}B	^{11}B	^{12}C	^{14}N	^{16}O
^{3}He	24.04	17.34	25.27	21.10	18.62	15.64
^{5}He	3.74	5.89	10.43	8.95	13.41	8.56

由表 4.2 可以看出, 在中子诱发 1p 壳轻核反应中, ^{5}He 发射的阈能普遍比 ^{3}He 低很多, 在理论上会有 ^{5}He 发射存在的可能. 因此在轻核反应的理论模型计算中考虑了 ^{5}He 的发射. 关于发射 ^{5}He 后自发崩裂的运动学公式将在第五章中将给出. 本章在研究稳定复杂粒子集团, 如氘、氚、^{3}He 和 α 粒子的基础上, 推导出了预平衡发射中 ^{5}He 的预形成概率 (Duan et al., 2004) 和 ^{5}He 发射的双微分截面理论公式 (Yan et al., 2005), 并已经应用到了核反应数据理论计算程序之中.

为了说明问题, 在中子入射能量为 $E_{\rm n} = 14$MeV 的情况下, 计算了这个崩裂中子的出射在质心系中的能谱范围. 计算结果见表 4.3, 其中 $\varepsilon_{\min}$ 和 $\varepsilon_{\max}$ 分别表示出射的崩裂中子在质心系中的最低和最高能量值, $\Delta\varepsilon_{\rm n}$ 表示能谱宽度. 由表 4.3 可以看出, ^{5}He 崩裂放出的中子都贡献在低能区域, 而且中子能谱宽度大都在几个兆电子伏特的范围.

中子引发 ^{10,11}B 的计算实例表明, 在考虑了 ^{5}He 发射后, 会明显地改善在各种角度下出射中子双微分谱在低能区与实验测量数据的符合 (Wang et al., 2006). 在图 4.1~4.4 中给出考虑 ^{5}He 发射的结果, 图中实线是考虑了 ^{5}He 的发射, 而虚线是没考虑 ^{5}He 发射的结果. 实验测量数据取自 (Baba et al., 1985).

表 4.3　中子诱发 1p 壳轻核反应中, ^{5}He 崩裂中子的能谱范围

核素	$(\varepsilon_{\min} \sim \varepsilon_{\max})$MeV	$\Delta\varepsilon_{\rm n}$MeV
^{9}Be	0.031∼3.265	3.25
^{10}B	0.016∼2.875	2.77
^{11}B	0.008∼1.777	1.77
^{12}C	0.008∼2.034	2.03
^{14}N	0.105∼0.759	0.65
^{16}O	0.092∼1.949	1.86

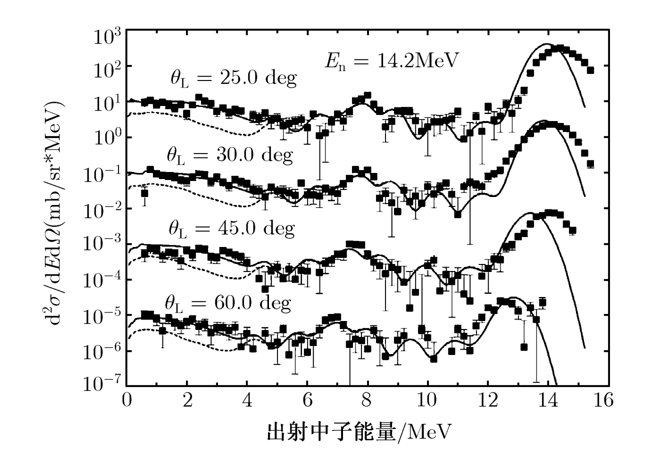


图 4.1　n + ^{10}B 核反应在 $\theta = 25°, 30°, 45°, 60°$ 的总中子出射的双微分谱, 实线为考虑了 ^{5}He 发射的结果; 虚线为没有考虑 ^{5}He 发射的结果

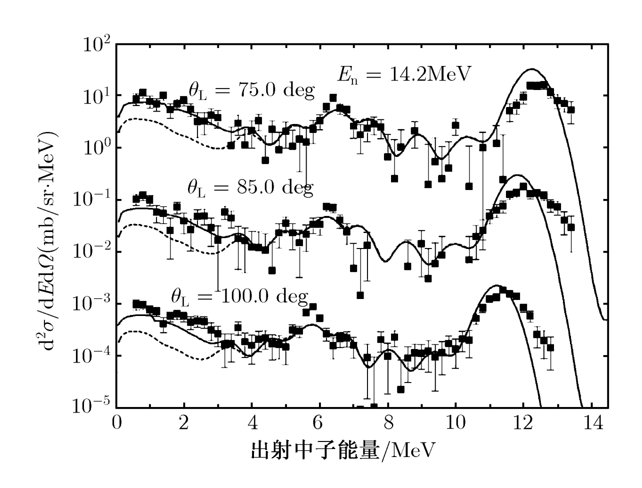


图 4.2　n + ^{10}B 核反应在 $\theta = 75°, 85°, 100°$ 的总中子出射双微分谱, 实线为考虑了 ^{5}He 发射的结果; 虚线为没有考虑 ^{5}He 发射的结果

因此, 在对中子引发 ^{9}Be 以上的轻核反应中都需要将 ^{5}He 的发射考虑到理论模型程序计算中. 而比 ^{9}Be 更轻的核素, ^{5}He 仅能作为剩余核来考虑. 由于 ^{5}He 是非稳定核, 具有一个中子在稳固的 ^{4}He 集团之外, 这种松散结构可以导致中子晕的存在. 理论计算表明, 在 ^{5}He 的光学势中, 其弥散宽度需要比通常的稳定核素的值明显大 (Wang et al., 2006), 这与目前研究中子晕的结果相一致 (Newton et al., 2004).

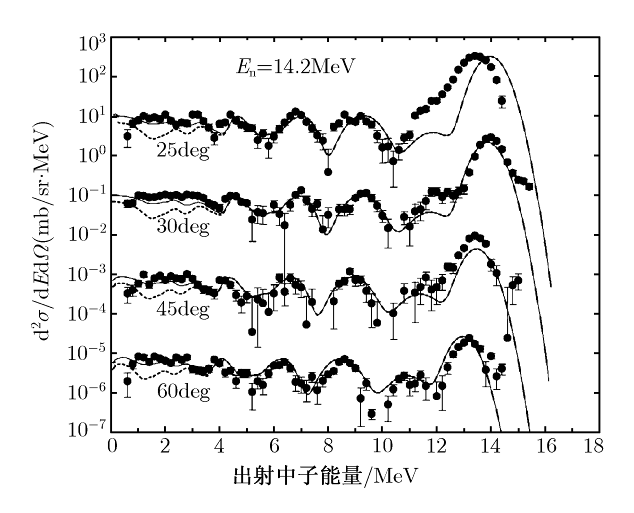


图 4.3　$n + {}^{11}B$ 核反应在 $\theta = 25°, 30°, 45°, 60°$ 的总中子出射的双微分谱, 实线为考虑了 ^{5}He 发射的结果; 虚线为没有考虑 ^{5}He 发射的结果

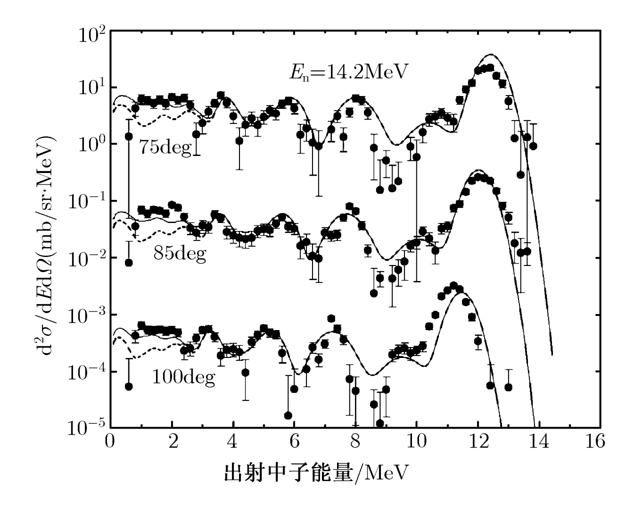


图 4.4　$n + {}^{11}B$ 核反应在 $\theta = 75°, 85°, 100°$ 的总中子出射的双微分谱, 实线为考虑了 ^{5}He 发射的结果; 虚线为没有考虑 ^{5}He 发射的结果

4.3 复杂粒子发射的预形成概率

4.3.1 相对运动内禀坐标

复杂粒子均为带电粒子. 在核内级联碰撞达到平衡态时, 基本上是呈 Maxwellan 谱的形状. 因而由核反应平衡态统计理论预言仅有少量高能量粒子可以克服库仑势垒, 使得理论计算的带电粒子发射概率明显比实验测量值偏低. 为了解决这个问题, 在复杂粒子的预平衡发射过程中引入拾取机制, 而复杂粒子的预形成概率要由模型理论给出, 预形成概率表示在没有达到平衡之前在核内形成复杂粒子的概率. 比较成功的模型理论是 Iwamoto-Harada 模型 (Iwamoto et al., 1982; Sato et al., 1983), 下面介绍这个模型理论的物理图像.

首先, 在这个模型中需要引入相对运动内禀坐标. 对于质量数为 A_b 的复杂粒子, 包含质心坐标和 A_b-1 个相对运动坐标. 质心坐标为

$$\boldsymbol{R}=\frac{1}{A_b}\sum_{i=1}^{A_b}\boldsymbol{r}_i \tag{4.3.1}$$

相对运动内禀坐标的定义和对应相对运动的内禀动量, 以及每个内禀自由度的折合质量 μ 由表 4.4 给出.

表 4.4 相对内禀坐标和内禀动量定义

A_b	μ	相对内禀坐标	相对内禀动量
2	$\frac{m}{2}$	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$	$\boldsymbol{p}_r=\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)$
3	$\frac{m}{2}$	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$	$\boldsymbol{p}_r=\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)$
	$\frac{2m}{3}$	$\boldsymbol{r}'=\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)-\boldsymbol{r}_3$	$\boldsymbol{p}'_r=\frac{1}{3}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2-2\boldsymbol{p}_3)$
4	$\frac{m}{2}$	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$	$\boldsymbol{p}_r=\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)$
	$\frac{m}{2}$	$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_4$	$\boldsymbol{p}'_r=\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_4)$
	m	$\boldsymbol{r}''=\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)-\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_4)$	$\boldsymbol{p}''_r=\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)-\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{p}_4)$
5	$\frac{m}{2}$	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$	$\boldsymbol{p}_r=\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)$
	$\frac{m}{2}$	$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_4$	$\boldsymbol{p}'_r=\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_4)$
	m	$\boldsymbol{r}''=\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)-\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_4)$	$\boldsymbol{p}''=\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)-\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{p}_4)$
	$\frac{4m}{5}$	$\boldsymbol{r}'''=\boldsymbol{r}_5-\frac{1}{4}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_4)$	$\boldsymbol{p}'''=\frac{4}{5}\boldsymbol{p}_5-\frac{1}{5}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{p}_4)$

注：其中 m 为核子质量.

质量数为 A_b 的复杂粒子的总动量为

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{A_b} \boldsymbol{p}_i \tag{4.3.2}$$

内禀坐标的逆关系表示由表 4.5 给出.

表 4.5　核子坐标和内禀坐标的关系

A_b	核子坐标	核子坐标
2	$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{r}$
3	$\boldsymbol{r}_1 = R + \frac{1}{2}\boldsymbol{r} + \frac{1}{3}\boldsymbol{r}'$ $\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{R} - \frac{2}{3}\boldsymbol{r}'$	$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{r} + \frac{1}{3}\boldsymbol{r}'$
4	$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}''$ $\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}' - \frac{1}{2}\boldsymbol{r}''$	$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}''$ $\boldsymbol{r}_4 = \boldsymbol{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{r}' - \frac{1}{2}\boldsymbol{r}''$
5	$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}'' - \frac{1}{5}\boldsymbol{r}'''$ $\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}' - \frac{1}{2}\boldsymbol{r}'' - \frac{1}{5}\boldsymbol{r}'''$ $\boldsymbol{r}_5 = \boldsymbol{R} + \frac{4}{5}\boldsymbol{r}'''$	$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}'' - \frac{1}{5}\boldsymbol{r}'''$ $\boldsymbol{r}_4 = \boldsymbol{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{r}' - \frac{1}{2}\boldsymbol{r}'' - \frac{1}{5}\boldsymbol{r}'''$

事实上, 由动量算符定义出发, 由表 4.5 的单核子坐标可以得到表 4.4 中内禀自由度 ξ 的相对动量表示：

$$\boldsymbol{p}_\xi = -\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{\nabla}_\xi = -\mathrm{i}\hbar\sum_{i=1}^{A_b}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial\boldsymbol{\xi}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_i} = \sum_{i=1}^{A_b}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{p}_i \tag{4.3.3}$$

Iwamoto-Harada 模型认为 $\mathrm{d}, {}^3\mathrm{He}, \mathrm{t}, \alpha$ 集团是由在谐振子中的 1s 态粒子构成, 其中单粒子归一化波函数是用谐振子波函数描述：

$$\varphi(r) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{\beta}{2}r^2\right) \tag{4.3.4}$$

而 $^5\mathrm{He}$ 的一个核子是处于 1p 态粒子, 1p 壳单粒子谐振子径向归一化波函数是

$$\varphi_{1p}(r) = \beta\left(\frac{64\beta}{9\pi}\right)^{\frac{1}{4}} r\exp\left(-\frac{1}{2}\beta r^2\right) \tag{4.3.5}$$

其中 β 是与谐振子阱参数相关的参数. 当复杂粒子集团是由 A_b 个核子组成时, 该集团的波函数可以表示为单粒子波函数 (4.3.4) 的乘积, 对 $^5\mathrm{He}$ 还要包含 (4.3.5) 的

乘积, 并可将其分解为质心运动波函数和内禀波函数两个部分:

$$\psi=\prod_{i=1}^{A_b}\phi(r_i)=\varPhi(R)\varphi_{\rm int} \tag{4.3.6}$$

这里 $\varPhi(R)$ 为集团质心运动归一化波函数, $\varphi_{\rm int}$ 为归一化内禀波函数. 对于各种复杂粒子的内禀波函数分别是

$$\varphi_{\rm int}=\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{3/4}\exp\left(-\frac{\beta}{4}r^2\right),\quad A_b=2 \tag{4.3.7}$$

$$\varphi_{\rm int}=\left(\frac{\beta^2}{3\pi^2}\right)^{3/4}\exp\left(-\frac{\beta}{4}r^2-\frac{\beta}{3}r'^2\right),\quad A_b=3 \tag{4.3.8}$$

$$\varphi_{\rm int}=\left(\frac{\beta^3}{4\pi^3}\right)^{3/4}\exp\left(-\frac{\beta}{4}r^2-\frac{\beta}{4}r'^2-\frac{\beta}{2}r''^2\right),\quad A_b=4 \tag{4.3.9}$$

$$\varphi_{\rm int}=\left(\frac{\beta^4}{5\pi^4}\right)^{3/4}\sqrt{\frac{8\beta}{15}}r'''\exp\left(-\frac{\beta}{4}r^2-\frac{\beta}{4}r'^2-\frac{\beta}{2}r''^2-\frac{2\beta}{5}r'''^2\right),\quad A_b=5 \tag{4.3.10}$$

其中, $\beta=m\omega/\hbar$ 参数可由集团的均方半径实验值给出, 而均方半径的理论公式表示是

$$\bar{r}_b^2=\frac{1}{A_b}\int\sum_{i=1}^{A_b}(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{R})^2|\varphi_{\rm int}|^2{\rm d}\xi \tag{4.3.11}$$

这里 ${\rm d}\xi$ 表示对全部 A_b-1 个相对内禀坐标积分. 完成对全部相对内禀坐标积分后, 分别得到均方半径与谐振子势的 $\hbar\omega$ 值的关系:

$$\bar{r}^2_{A_b=2}=\frac{3}{4\beta}=\frac{3\hbar}{4m\omega} \tag{4.3.12}$$

$$r^2_{A_b=3}=\frac{1}{\beta}=\frac{\hbar}{m\omega} \tag{4.3.13}$$

$$r^2_{A_b=4}=\frac{9}{8\beta}=\frac{9\hbar}{8m\omega_{N=4}} \tag{4.3.14}$$

$$r^2_{A_b=5}=\frac{13}{10\beta}=\frac{13\hbar}{10m\omega} \tag{4.3.15}$$

于是可以由均方半径的实验值来确定其曲率参数 $\hbar\omega$ 值. 对于 $A_b=2,3,4,5$ 的复杂粒子, 由均方半径的值确定的 $\hbar\omega$ 值如表 4.6 所示.

表 4.6　集团均方半径及谐振子曲率参数

A_b	核素	r/fm	$\hbar\omega$/MeV
2	d	1.96	8.1
3	t	1.70	14.4
3	^{3}He	1.77	11.7
4	α	1.60	18.2
5	^{5}He	2.69	7.45

在表 4.6 中 $A_b = 2, 3, 4$ 的均方半径是由实验测量得到的, 而对于 ^{5}He, 由于其中一个核子是处于 1p 壳的内禀态, 不同于 1s 壳的表示. ^{5}He 是不稳定的, 无法给出实验测量的方半径的值, 而是应用平均场理论计算得到的. 由表 4.6 可以看出, α 粒子集团是结合最紧密的复杂粒子, 它的均方半径最小, 对应的谐振子阱的曲率参数最大, 这说明 α 粒子集团中的核子是处在一个很窄的谐振子阱内, 而氘核中核子就结合得很松, 氘核的均方半径比 α 粒子集团的还要大. 特别是 ^{5}He 的均方半径是最大的, 对应的谐振子阱的曲率参数最小, 这说明 ^{5}He 粒子集团中的核子是处在一个很宽松的谐振子阱内运动.

由量子力学的知识得知, 每个三维谐振子的基态能量为 $3\hbar\omega/2$. 因此对 1s 态粒子有

$$\frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 = \frac{3}{2}\hbar\omega \tag{4.3.16}$$

而对 1p 态粒子则有

$$\frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 = \frac{5}{2}\hbar\omega \tag{4.3.17}$$

根据谐振子理论, 平均动能等于平均势能, 因此每个内禀自由度的平均动能和平均位能各占 $3\hbar\omega_b(A_b-1)/4$, 对质量数为 A_b 的复杂粒子, 集团能量的动能和平均位能之和为

$$\frac{p^2}{2A_b m} + \frac{3}{4}\hbar\omega(A_b-1) \tag{4.3.18}$$

在费米气体模型中, 所有的能量和动量都是从阱底计算起, 为了与实验观测值对应起来, 在 (4.3.18) 式中要减去 $A_b\varepsilon_f$ 才能得到观测能量, 并要扣除复杂粒子在复合核内的结合能 B, 因而实际观测到的集团粒子能量为

$$\varepsilon_b = \frac{p^2}{2A_b m} + \frac{3}{4}\hbar\omega_b(A_b-1) - A_b\varepsilon_{\mathrm{F}} - B \tag{4.3.19}$$

为避免不同核的结合能差异, 以后用激发能 $E^* = \varepsilon_b + B_b$ 作为自由变量. 因此有

$$\frac{p^2}{2A_b m} = E^* - \frac{3}{4}\hbar\omega_b(A_b-1) + A_b\varepsilon_{\mathrm{F}} \tag{4.3.20}$$

以上仅是对复杂粒子全部处于 1s 壳, 而对于 1p 壳的粒子平均位能为 $5\hbar\omega/4$. ^{5}He 的总动能为 $p^2/10m$, 它与实际观测能量 ε_5 和激发能的关系为

$$\frac{p^2}{10m} = \varepsilon_5 + B - \frac{7}{2}\hbar\omega + 5\varepsilon_{\rm F} = E^* - \frac{7}{2}\hbar\omega + 5\varepsilon_{\rm F} \tag{4.3.21}$$

4.3.2　氘核的预形成概率

在核反应的预平衡阶段, 发射复杂粒子的组态可以用 $[l,m]$ 表示, 在这个符号表示在组成的复杂粒子中有 l 个核子在费米面上, 而 m 个核子在费米面下, 且 $l+m=A_b$. $p_{\rm F}$ 是费米动量. 因而在 $[l,m]$ 组态中对每个核子的动量限制条件为

$$\begin{aligned} &|\boldsymbol{p}_i| > p_{\rm F}, \quad i=1,2\cdots,l \\ &|\boldsymbol{p}_j| < p_{\rm F}, \quad j=1,2\cdots,m \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

按照 Iwamoto - Harada 理论模型的思想, 复杂粒子的预形成概率是正比于各内禀相空间的体积所占据的相格数, 这是预平衡拾取机制的最基本的物理思想, 是预形成概率理论的出发点, 这也就是量子统计理论中的相空间体积的概念 (朗道等, 1964). 因此, 对于质量数为 A_b 的复杂粒子集团, 复杂粒子集团的预形成概率可以普遍被表示为

$$F_{lm}(\varepsilon_b) = \frac{C}{(2\pi\hbar)^{3(A_b-1)}} \int_{\substack{p\text{-fixed}\\ [l,m]}} \prod_{i=1,2\cdots A_b-1} {\rm d}\boldsymbol{p}_i {\rm d}\boldsymbol{r}_i \tag{4.3.23}$$

其中 C 为归一化常数. 对于氘核集团内禀态占据的相格数为

$$F_{lm}(\varepsilon_{\rm d}) = \frac{C}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\substack{p\text{-fixed}\\ [l,m]}} {\rm d}\boldsymbol{p}_r {\rm d}\boldsymbol{r} \tag{4.3.24}$$

归一化条件是对所有组态的预形成概率之和为 1. 即

$$\sum_{lm} F_{lm}(\varepsilon_{\rm d}) = 1 \tag{4.3.25}$$

由此给出氘核各组态的预形成概率 $F_{lm}(\varepsilon_{\rm d})$. 完成 (4.3.24) 式的积分是很繁杂的. 首先给出无组态限制的积分结果, 在公式 (4.3.24) 中不计组态限制, 对于氘核有

$$\sum_{lm} F_{lm}(\varepsilon_{\rm d}) = \frac{C}{(2\pi\hbar)^3} \int_{p\text{-fixed}} {\rm d}\boldsymbol{p}_r {\rm d}\boldsymbol{r} = 1 \tag{4.3.26}$$

对于确定的 p_r 值, 由式 (4.3.16) 得到 r 的积分区域为

$$0 < r < \sqrt{\frac{3\hbar}{\mu\omega} - \frac{p_r^2}{(\mu\omega)^2}} \tag{4.3.27}$$

而对动量 p_r 的积分区域则为

$$0 < p_r < \sqrt{3\mu\hbar\omega} \tag{4.3.28}$$

完成对 $\boldsymbol{r}$ 积分得到

$$\sum_{lm} F_{lm}(\varepsilon_i) = \frac{C}{(2\pi)^3}\frac{(4\pi)^2}{3(\mu\hbar\omega)^3}\int_0^{\sqrt{3\mu\hbar\omega}}(3\hbar\omega\mu - p_r^2)^{\frac{3}{2}} p_r^2 \mathrm{d}p_r \tag{4.3.29}$$

若令 $u = p^2/3\hbar\omega\mu$, 上面的积分变为 B 函数形式：

$$\sum_{lm} F_{lm}(\varepsilon_i) = \frac{9C}{\pi}\int_0^1 (1-u)^{\frac{3}{2}} u^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}u = \frac{9C}{\pi} B\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{16}C \tag{4.3.30}$$

由此得到了归一化因子为

$$C = (4/3)^2 \tag{4.3.31}$$

通过对任意质量数 $A_b \leqslant 4$ 的复杂粒子的推导得到, 其归一化因子一般的表示为 (丁大钊等, 2005)

$$C = (4/3)^{A_b} \tag{4.3.32}$$

对于氘核, 拾取组态 $[l, m]$ 共包括三项, 它们分别是 $[2, 0]$, $[1, 1]$, $[0, 2]$, 即分别表示两核子全在费米面上, 一个在费米面上一个在费米面下, 两核子全在费米面下. 定义符号

$$G \equiv \sqrt{3\mu\hbar\omega} \tag{4.3.33}$$

G 的量纲为动量. 而从表 4.6 给出的各种复杂粒子的 $\hbar\omega$ 值也可以看出, 总有 $G < p_{\mathrm{F}}$ 成立. 记 $\boldsymbol{p}$ 为氘核的动量, β 为 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{p}_r$ 间的夹角, 如图 4.5 所示. 这样, 就可以得到氘核内的两个单核子用氘核动量和两核子相对运动的动量来表示.

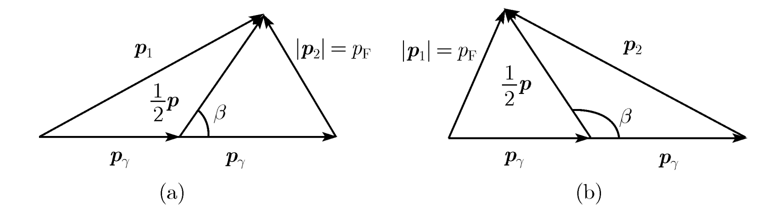


图 4.5　核子 1, 2 的动量 $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ 与质心动量 $\boldsymbol{p}$, 相对动量 $\boldsymbol{p}_r$ 的关系示意图

由余弦定理可得

$$p_{1,2}^2 = \frac{1}{4}p^2 + p_r^2 \pm p p_r \cos\beta \tag{4.3.34}$$

于是有

$$\cos\beta = \pm\frac{p_{1,2}^2 - p^2/4 - p_r^2}{pp_r} \tag{4.3.35}$$

因此在费米动量空间表面, 当 $p_1 = p_{\mathrm{F}}$ 或 $p_2 = p_{\mathrm{F}}$ 时, 可以给出 $\cos\beta$ 的积分限. 但是, 这里需要注意的是在一定 p_r 值处, $p_{\mathrm{F}}^2 - p^2/4 - p_r^2$ 会变号, 表示 $p_{1,2}$ 会改变核子在费米面上下的状态, 而出现正负值变化对应的 p_r 值满足下式:

$$p^2/4 + p_r^2 = p_{\mathrm{F}}^2 \tag{4.3.36}$$

此时若令

$$B = \left|\frac{p_r^2 + p^2/4 - p_{\mathrm{F}}^2}{pp_r}\right| \tag{4.3.37}$$

由图 4.5 可以看出, 当 p_r 与 p_{d} 都很小, 即 $p_r + p/2 < p_{\mathrm{F}}$ 成立时, 这时 $\cos\beta$ 没有积分区域的限制, 因为在任何 β 角度下, 总有 $p_{1,2} < p_{\mathrm{F}}$, 因此属于 $[0,2]$ 组态. 反之, 当 p_r 与 p 都很大时, 且 $|p_r - p/2| > p_{\mathrm{F}}$ 成立时, 这时 $\cos\beta$ 也没有积分限制, 因为在任何 β 角度下, 总有 $p_{1,2} > p_{\mathrm{F}}$, 因此属于 $[2,0]$ 组态. 如 4.6(a) 图所示. 如果 β 角逐渐变小即 $B < \cos\beta < 1$, 则有 $p_1 > p_{\mathrm{F}}, p_2 < p_{\mathrm{F}}$, 此时氘核处于 [1,1] 组态, 如 4.6(b) 图所示, 当 $p_1 = p_{\mathrm{F}}$ 时, 由 (4.3.35) 式可以得到 $\cos\beta = -B$, 如果 β 角逐渐变大, 即 $-1 < \cos\beta < -B$, 则有 $p_2 > p_{\mathrm{F}}, p_1 < p_{\mathrm{F}}$, 此时氘核仍然处于 [1,1] 组态, 反之, 当 β 角处于上述两种情况之间即 $-B < \cos\beta < B$ 时, 则有 $p_2 > p_{\mathrm{F}}, p_1 > p_{\mathrm{F}}$, 此时氘核处于 [2,0] 组态.

综上所述分析过程, 对于不同的 p 和 p_r 值 $\cos\beta$ 的积分域可分为以下三种情况:

(1) $-1 \leqslant \cos\beta \leqslant 1$

(2) $-B \leqslant \cos\beta \leqslant B$

(3) $-1 \leqslant \cos\beta \leqslant -B, B \leqslant \cos\beta \leqslant 1$　(4.3.38)

为了推导方便, 引入量纲为一的量:

$$z = p_r/G \tag{4.3.39}$$

这时氘核各组态对相对动量的积分可以改写为

$$F_{lm}(\varepsilon_{\mathrm{d}}) = \frac{32}{\pi}\int_{\substack{p\text{-fixed}\\ [l.m]}} (1-z^2)^{\frac{3}{2}} z^2 \mathrm{d}z \tag{4.3.40}$$

定义量纲为一的符号

$$x = \frac{p_{\mathrm{F}} - p/2}{G}, \quad y = \frac{\sqrt{p_{\mathrm{F}}^2 - p^2/4}}{G} \tag{4.3.41}$$

显然, 总有 $y > x$ 成立. 通过对不同氘核动量 p 的各组态的积分区域的分析后, 对于给定动量 p 的值时, z 的积分域由表 4.7 给出.

表 4.7 对于各种 p, p_r 值, 各种组态的 z 值积分域

	p	z	[20]	[11]	[02]
1	$0 < p < 2(p_F - G)$	$0 < z < 1$			(1)
2	$2(p_F - G) < p < 2\sqrt{p_F^2 - G^2}$	$0 < z < x$			(1)
		$x < z < 1$		(3)	(2)
3	$2\sqrt{p_F^2 - G^2} < p < 2p_F$	$0 < z < x$			(1)
		$x < z < y$		(3)	(2)
		$y < z < 1$	(2)	(3)	
4	$2p_F < p < 2(p_F + G)$	$0 < z < -x$	(1)		
		$-x < z < 1$	(2)	(3)	
5	$2(p_F + G) < p$	$0 < z < 1$	(1)		

定义两个 z 的函数

$$Q(z) \equiv \frac{2}{3\pi}\left\{3\arcsin z - 8z\left(1-z^2\right)^{\frac{5}{2}} + 2z\left(1-z^2\right)^{\frac{3}{2}} + 3z\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{4.3.42}$$

和

$$W(z) \equiv \frac{32}{\pi}\left\{\frac{1}{5}\left(\frac{p^2 - 4p_F^2 + 4G^2}{4pG}\right)\left(1-z^2\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{7}\left(1-z^2\right)^{\frac{7}{2}}\right\} \tag{4.3.43}$$

应用表 4.7 给出的各组态的积分限, 完成对 (4.3.40) 式的积分后, 就得到对应于各种氘核动量 p 值的预成概率 F_{lm} 的解析表达式, 其结果由表 4.8 给出. 其中五种 p 值同于表 4.7. 从表中可解析地看出, 在每种情况下都有 $F_{20} + F_{11} + F_{02} = 1$, 这表示归一化条件总能得到满足. 由表中的表示看出, 每一种预形成概率对不同 p 值都是分段表示的. 可以验证在每一个边界处都满足光滑连接条件.

表 4.8 对应于各种氘核动量 p 的 F_{lm} 表达式

p 值区域	F_{20}	F_{11}	F_{02}
1	0	0	1
2	0	$1 + W(x) - Q(x)$	$Q(x) - W(x)$
3	$W(y)$	$1 - 2W(y) + W(x) - Q(x)$	$Q(x) + W(y) - W(x)$
4	$Q(-x) + W(-x)$	$1 - Q(-x) - W(-x)$	0
5	1	0	0

用表 4.8 中的公式可以计算出氘核预形成概率随氘核激发能的变化, 结果如图 4.6 所示.

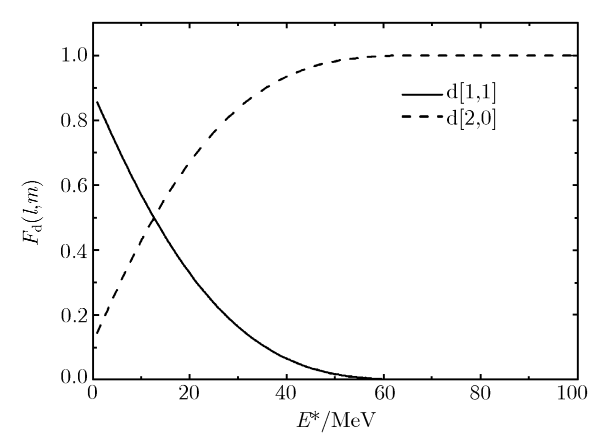


图 4.6 d 的预形成概率

这里需要说明的是, 表 4.8 中最后一行对应的是仅有 $[0,2]$ 组态. 由它对应的氘核动量条件 $p < 2(p_{\mathrm{F}} - \sqrt{G})$, 以及 (4.3.20) 式得到的对应激发能为

$$E^* < 9\hbar\omega_2/4 - 2\sqrt{3\hbar\omega_2\varepsilon_{\mathrm{F}}} < 0 \tag{4.3.44}$$

由表 4.6 给出的氘核曲率值 $\hbar\omega_2 = 8.1\mathrm{MeV}$, 不等式总成立. 由于 $[0,2]$ 组态都是由费米海下的核子组成, 因此不能发射氘核. 另外, 由图 4.6 看出, 组态 $[1,1]$ 随激发能上升而下降, 组态 $[2,0]$ 随激发能上升而单调上升. 在激发能在 20MeV 以下时, 以组态 $[1,1]$ 为主, 而在激发能在 20MeV 以上时, 以组态 $[2,0]$ 为主.

另外, 在表 4.8 中的第一行仅有 $[2,0]$ 组态. 由它对应的氘核动量条件 $p > 2(p_{\mathrm{F}} + \sqrt{G})$, 由 (4.3.15) 式得到的对应激发能为 $E^* > 9\hbar\omega_2/4 + 2\sqrt{3\hbar\omega_2\varepsilon_{\mathrm{F}}}$, 当取 $\varepsilon_{\mathrm{F}} = 30\mathrm{MeV}$ 时, 得到 $E^* > 72.225\mathrm{MeV}$. 这只有在中能核反应中才会出现.

由表 4.8 给出的氘核集团各组态的解析结果, 可以比较容易地得到更重的复杂粒子集团的预形成概率的理论公式表示. 详细内容见下面几节.

4.3.3 氚和 ^{3}He 的预形成概率

在氘核 $(A_b = 2)$ 预形成概率的解析表达式的基础上, 可以用比较简洁的方式得到 $A_b = 3$ 的预形成概率表达式. 对于 t 和 $^3\mathrm{He}(A_b = 3)$, 认为 1,2 粒子是氘核的两个粒子, 动量是 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{d}}$, 这时总动量为

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{\mathrm{d}} + \boldsymbol{p}_3 \tag{4.3.45}$$

由于上一节已经给出各种氘核动量情况下的组态分布, 因此, 这里是考虑在给定三核子总动量 p 的情况下, 第三核子在费米海上下的条件, 以确定三核子集团的各种组态概率表示. 将第三核子相对氘核的相对坐标 $\boldsymbol{r}_3$ 和动量记为 $\boldsymbol{p}'_r$, 这时有

$$\boldsymbol{r}' = r_{\mathrm{d}} - \boldsymbol{r}_3, \quad \boldsymbol{p}'_r = \frac{1}{3}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{p}_{\mathrm{d}} - 2\boldsymbol{p}_3) \tag{4.3.46}$$

$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'_r$ 与 $\boldsymbol{p}_3$ 之间的矢量关系由图 4.7 所示.

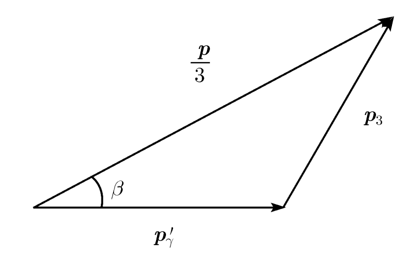


图 4.7 $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'_r$ 与 $\boldsymbol{p}_3$ 之间的矢量关系

利用 (4.3.46) 式, 由矢量相加的余弦定理得到

$$p_3^2 = \frac{p^2}{9} + p_r'^2 - \frac{2}{3}pp'_r\cos\beta \tag{4.3.47}$$

定义符号

$$B = \frac{\dfrac{p^2}{9} + p_r'^2 - p_f^2}{\dfrac{2}{3}pp'_r} \tag{4.3.48}$$

关于 p_3 在费米海上下对应的 p'_r 和 $\cos\beta$ 的积分区域由表 4.9 给出.

表 4.9 $A_b = 3$ 集团中第三个核子在费米面上或下, 以及 p'_r 和 $\cos\beta$ 的积分区域

p	p'_r	$\cos\beta$	p_3
$p > 3p_{\mathrm{F}}$	$0 < p'_r < p/3 - p_{\mathrm{F}}$	$-1 \leqslant \cos\beta \leqslant 1$	$p_3 \geqslant p_{\mathrm{F}}$
	$\dfrac{p}{3} - p_{\mathrm{F}} \leqslant p'_r \leqslant \sqrt{2m\hbar\omega}$	$-1 \leqslant \cos\beta \leqslant B$	$p_3 \geqslant p_{\mathrm{F}}$
		$B \leqslant \cos\beta \leqslant 1$	$p_3 \leqslant p_{\mathrm{F}}$
$p < 3p_{\mathrm{F}}$	$0 < p'_r < p_{\mathrm{F}} - p/3$	$-1 \leqslant \cos\beta \leqslant 1$	$p_3 \leqslant p_{\mathrm{F}}$
	$p_{\mathrm{F}} - \dfrac{p}{3} \leqslant p'_r \leqslant \sqrt{2m\hbar\omega}$	$-1 \leqslant \cos\beta \leqslant B$	$p_3 \geqslant p_{\mathrm{F}}$
		$B \leqslant \cos\beta \leqslant 1$	$p_3 \leqslant p_{\mathrm{F}}$

从复杂粒子集团的预形成概率的普遍表示式 (4.3.23) 出发, 这时还需要考虑第三核子与氘核集团的相对运动自由度的相空间积分, 由 (4.3.27) 式得到相对运动坐标 r' 的积分区域, 完成对 r' 的积分后对相对运动动量 p' 的积分表示为

$$T(p') = \frac{16}{\pi\,(3\mu\hbar\omega)^3}p'^2(3\mu\hbar\omega - p'^2)^{\frac{3}{2}} \tag{4.3.49}$$

对 $A_b = 3$ 体系, 折合质量为 $\mu = 2m/3$. 积分区域由 (4.3.27) 式给出. 若令 $p' = \sqrt{3\mu\hbar\omega x}$, 这时 x 的积分限变为 $0 \to 1$, 得到

$$\int_0^{\sqrt{3\mu\hbar\omega}} T(p')\mathrm{d}p' = \frac{16}{\pi}\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = 1 \tag{4.3.50}$$

因此, $T(p')$ 是归一化的.

记

$$D \equiv \left|\frac{p}{3} - p_{\mathrm{F}}\right| \quad 和 \quad G = \sqrt{3\mu\hbar\omega} \tag{4.3.51}$$

因此, 利用氘核预形成概率的解析表达式, 可以得到 $A_b = 3$ 各组态预形成概率的表达式.

当 $p > 3p_{\mathrm{F}}$ 时

$$\begin{aligned}
F_{30}(p) &= \int_0^D \mathrm{d}p' T(p') \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\beta F_{20}(\bar{p}) + \int_D^G \mathrm{d}p' T(p') \int_{-1}^B \mathrm{d}\cos\beta F_{20}(\bar{p}) \\
F_{21}(p) &= \int_0^D \mathrm{d}p' T(p') \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\beta F_{11}(\bar{p}) + \int_D^G \mathrm{d}p' T(p') \\
&\quad \times \left[\int_B^1 \mathrm{d}\cos\beta F_{20}(\bar{p}) + \int_{-1}^B \mathrm{d}\cos\beta F_{11}(\bar{p})\right] \\
F_{12}(p) &= \int_0^D \mathrm{d}p' T(p') \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\beta F_{02}(\bar{p}) + \int_D^G \mathrm{d}p' T(p') \\
&\quad \times \left[\int_B^1 \mathrm{d}\cos\beta F_{11}(\bar{p}) + \int_{-1}^B \mathrm{d}\cos\beta F_{02}(\bar{p})\right] \\
F_{03}(p) &= \int_D^G \mathrm{d}p' T(p') \int_B^1 \mathrm{d}\cos\beta F_{02}(\bar{p})
\end{aligned} \tag{4.3.52}$$

当 $p < 3p_{\mathrm{F}}$ 时

$$\begin{aligned}
F_{30}(p) &= \int_D^G \mathrm{d}p' T(p') \int_{-1}^B \mathrm{d}\cos\beta F_{20}(\bar{p}) \\
F_{21}(p) &= \int_0^D \mathrm{d}p' T(p') \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\beta F_{20}(\bar{p}) + \int_D^G \mathrm{d}p' T(p') \\
&\quad \times \left[\int_B^1 \mathrm{d}\cos\beta F_{20}(\bar{p}) + \int_{-1}^B \mathrm{d}\cos\beta F_{11}(\bar{p})\right] \\
F_{12}(p) &= \int_0^D \mathrm{d}p' T(p') \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\beta F_{11}(\bar{p}) + \int_D^G \mathrm{d}p' T(p') \\
&\quad \times \left[\int_B^1 \mathrm{d}\cos\beta F_{11}(\bar{p}) + \int_{-1}^B \mathrm{d}\cos\beta F_{02}(\bar{p})\right] \\
F_{03}(p) &= \int_0^D \mathrm{d}p' T(p') \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\beta F_{02}(\bar{p}) \\
&\quad + \int_D^G \mathrm{d}p' T(p') \int_B^1 \mathrm{d}\cos\beta F_{02}(\bar{p})
\end{aligned} \tag{4.3.53}$$

其中, 在计算时 $\hbar\omega$ 值分别为 t 或 ^{3}He 各自的值, 而氚核集团的动量为

$$\bar{p} = \left[\frac{4}{9}p^2 + \frac{4}{3}pp'\cos\beta + p'^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.3.54}$$

(4.3.52) 和 (4.3.53) 式在连接点是在 $p = 3p_f$ 处, 这时 $D = 0$, 由 (4.3.20) 式给出对应的激发能为 $E^* = 3\hbar\omega/2$.

将各组态相加, 由于氚核各组态的预形成概率满足归一化条件, 因而得到

$$F_{30} + F_{21} + F_{12} + F_{03} = \int_0^G T(p')\mathrm{d}p' = 1 \tag{4.3.55}$$

于是证明了 $A_b = 3$ 复杂粒子预形成概率的归一性.

由 (4.3.52)~(4.3.53) 式计算得到的氚和 ^{3}He 的预形成概率分别由图 4.8 和图 4.9 给出.

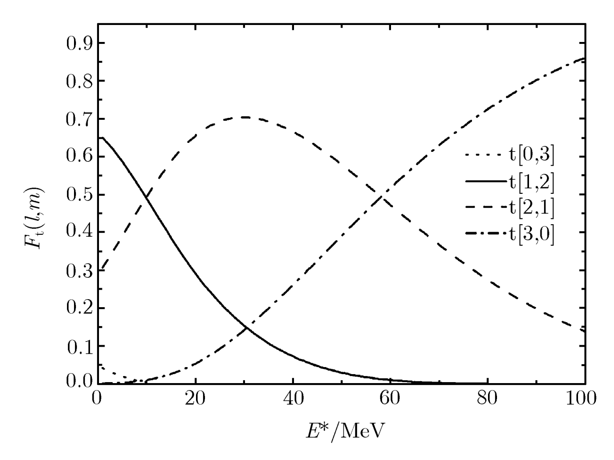


图 4.8　t 的预形成概率

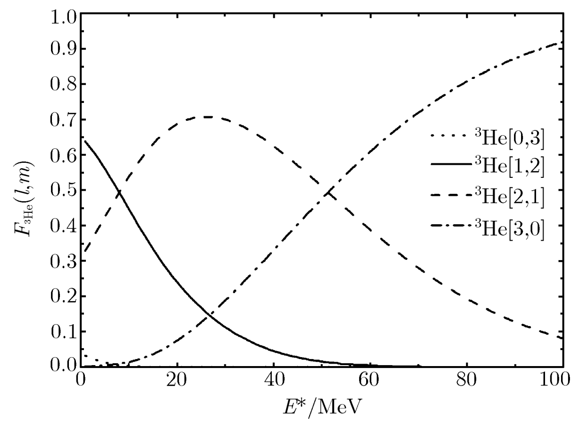


图 4.9　^{3}He 预形成概率

同样, 如同氘核一样, 组态 $[0,3]$ 是不能发射 $A_b=3$ 的复杂粒子. 组态 $[1,2]$ 随激发能上升而下降; 组态 $[2,1]$ 随激发能在低能区上升, 在 30MeV 附近达到最大值, 然后随激发能加大而单调下降; 组态 $[3,0]$ 随激发能上升而单调上升. 在激发能在 10MeV 附近, 组态 $[1,2]$ 与组态 $[2,1]$ 值近似相同, 而在激发能在 50MeV 以上时, 以组态 $[3,0]$ 为主. 虽然预形成概率的计算公式对 t 和 ^{3}He 完全相同, 但是由于谐振子阱的曲率参数 $\hbar\omega$ 的值彼此不同, 因而预形成概率的计算结果会出现一些差别.

4.3.4 α 粒子的预形成概率

同样可以用上面类似的途径讨论 α 粒子 ($A_b=4$) 发射预形成概率的公式表示. 最方便的是可以将 α 粒子看作由两个氘核构成, 两个氘核的动量分别为 $\boldsymbol{p}_+,\boldsymbol{p}_-$, 而这两个动量之间的相对动量记为 $\boldsymbol{p}'$:

$$\boldsymbol{p}'=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{p}_+-\boldsymbol{p}_-\right) \tag{4.3.56}$$

α 粒子的总动量为

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_++\boldsymbol{p}_- \tag{4.3.57}$$

α 粒子中的两个氘核集团的动量 $\boldsymbol{p}_\pm$ 可用 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{p}'$ 表示, 它们之间的关系如图 4.10 所示.

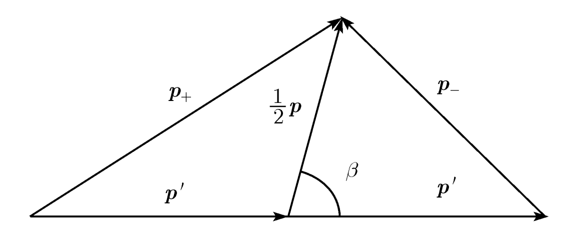


图 4.10 $\boldsymbol{p}_+,\boldsymbol{p}_-$ 与 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{p}'$ 之间的矢量关系示意图

由此得到

$$p_\pm=\sqrt{\frac{p^2}{4}\pm pp'\cos\beta+p'^2} \tag{4.3.58}$$

同样, 还需要考虑两个氘核集团之间的相对运动自由度的相空间积分, 由 (4.3.27) 式得到相对运动坐标 r' 的积分区域, 完成对 r' 的积分后, 对相对运动动量 p' 的归一化的积分表示由 (4.3.49) 式给出, 但这时折合质量为 $\mu=m$.

因此 α 粒子各种组态的预形成概率可以表示为

$$F_{40}(p)=\int_0^{\sqrt{3\hbar\omega m}}\mathrm{d}p'T(p')\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\beta F_{20}(p_+)F_{20}(p_-)$$

$$F_{31}(p)=\int_0^{\sqrt{3\hbar\omega m}}\mathrm{d}p'T(p')\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\beta\left[F_{20}(p_+)F_{11}(p_-)+F_{11}(p_+)F_{20}(p_-)\right]$$

$$
\begin{aligned}
F_{22}(p) =& \int_0^{\sqrt{3\hbar\omega m}} \mathrm{d}p'T(p') \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\beta [F_{20}(p_+)F_{02}(p_-) \\
& + F_{11}(p_+)F_{11}(p_-) + F_{02}(p_+)F_{20}(p_-)] \\
F_{13}(p) =& \int_0^{\sqrt{3\hbar\omega m}} \mathrm{d}p'T(p') \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\beta\,[F_{11}(p_+)F_{02}(p_-) + F_{02}(p_+)F_{11}(p_-)] \\
F_{04}(p) =& \int_0^{\sqrt{3\hbar\omega m}} \mathrm{d}p'T(p') \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\beta F_{02}(p_+)F_{02}(p_-)
\end{aligned} \tag{4.3.59}
$$

由于氘核的预形成概率在任何动量下都是归一的, 对所有组态求和后, 令 $p' = \sqrt{3\hbar\omega m x}$, 得到 α 粒子预形成概率的归一性的验证

$$\sum_{lm} F_{lm}(p) = \frac{16}{\pi}\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = 1 \tag{4.3.60}$$

用 (4.3.59) 式计算得到的 α 粒子各组态的预形成概率随能量的变化由图 4.11 给出. 可以看出, 如同前面其他复杂粒子一样, 组态 $[0,4]$ 是不能发射 α 粒子的. 组态 $[1,3]$ 随激发能上升而下降, 组态 $[2,2]$ 随激发能在低能区上升, 在 20MeV 附近达到最大值, 然后随激发能加大而单调下降, 组态 $[3,1]$ 随激发能在低能区上升, 在 70MeV 附近达到最大值, 然后随激发能加大而单调下降; 组态 $[4,0]$ 随激发能上升而单调上升. 在激发能在 40MeV 以下, 以组态 $[2,2]$ 为主, 而在激发能在 40MeV 以上时, 以组态 $[3,1]$ 为主.

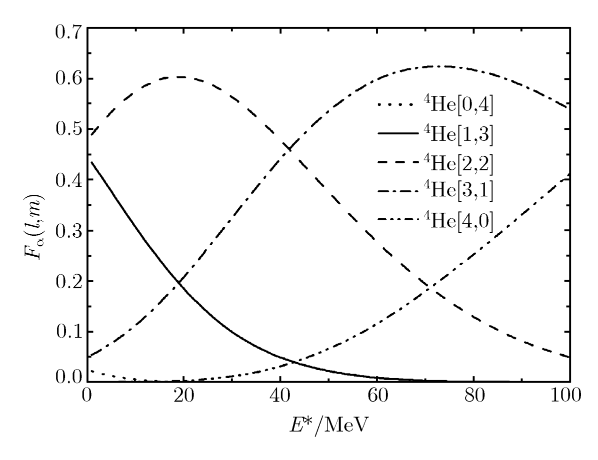


图 4.11 α 粒子的预形成概率

如前所述, 由 (4.1.2) 式看出, α 粒子的预形成概率组态 $[1,3]$ 对应的末态激子态密度为 $\omega(n-1,E')$, 而组态 $[2,2]$ 对应的末态激子态密度为 $\omega(n-2,E')$. 在中高能核反应中, 需要考虑组态 $[2,2]$ 时, 由于 $\omega(n-2,E') \ll \omega(n-1,E')$, 组态 $[2,2]$ 的

实际贡献是发生在组态 [1,3] 概率几乎消失时. 但是, 在剩余激发能达到 100MeV 时, 组态 [2,2] 的概率也会迅速下降, 对实际的预平衡发射贡献也很小, 虽然组态 [3,1] 的预形成概率迅速上升, 但激子态密度 $\omega(n-3,E')$ 的值非常之小, 因此会造成总的 α 粒子预平衡发射贡献变得很小, 这是需要注意的地方. 这方面的改进内容在 4.4 节中给出.

4.3.5 ^{5}He 的预形成概率

下面讨论对于 $A_b=5$ (^{5}He) 的情况, 与上面 $A_b\leqslant 4$ 情况所不同的是, 在 ^{5}He 集团中有一个核子是处于 1p 壳. 最简便的方式是将 ^{5}He 看作为一个核子和一个 α 集团. 若核子 1~4 为 α 集团, 5 为另一个核子, 前面已经得到各种动量下 α 集团各组态的表示式, 因此判断处第五粒子的动量在费米海上下的条件可以确定 ^{5}He 的预形成组态的表示. 由表 4.4 得到第五粒子动量有如下关系成立：

$$\boldsymbol{p}_5=\frac{1}{5}\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_r''' \tag{4.3.61}$$

因此, 第五粒子的动量可以表示为

$$p_5^2=\frac{p^2}{25}+\frac{2}{5}pp'''\cos\beta+p'''^2 \tag{4.3.62}$$

β 是 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{p}_r'''$ 之间的夹角. 下面用 $\bar{\boldsymbol{p}}$ 表示 α 粒子集团的总动量：

$$\bar{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{p}_4=\frac{4}{5}\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}''' \tag{4.3.63}$$

在给定 ^{5}He 的动量 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{p}_r'''$ 之后, 与 $\bar{\boldsymbol{p}}$ 的关系由图 4.12 表示.

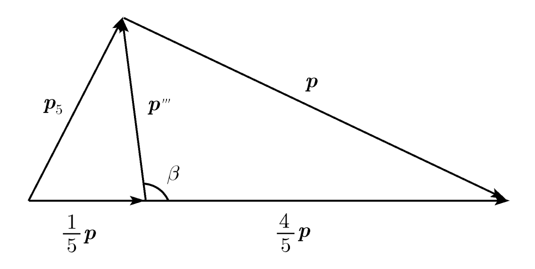


图 4.12 $\boldsymbol{p}_r'''$ 和 $\bar{\boldsymbol{p}}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 之间的矢量关系示意图

定义 B 为

$$B=\frac{p_{\mathrm{F}}^2-\dfrac{1}{25}p^2-p'''^2}{\dfrac{2}{5}pp'''} \tag{4.3.64}$$

在给定 p 值后, 由表 4.10 给出公式 (4.3.61) 中对 p''' 和 $\cos\beta$ 的积分限制条件.

表 4.10　^{5}He 集团中第五个核子在费米面上或下，以及 p''' 和 $\cos\beta$ 的积分区域

p	p'''	$\cos\beta$	p_5
$p > 5p_{\rm F}$	$0 < p''' < p/5 - p_{\rm F}$	$-1 \leqslant \cos\beta \leqslant 1$	$p_5 \geqslant p_{\rm F}$
	$\dfrac{p}{5} - p_{\rm F} \leqslant p''' \leqslant 2\sqrt{m\hbar\omega_5}$	$-1 \leqslant \cos\beta \leqslant B$	$p_5 \leqslant p_{\rm F}$
		$B \leqslant \cos\beta \leqslant 1$	$p_5 \geqslant p_{\rm F}$
$p < 5p_{\rm F}$	$0 < p''' < p_{\rm F} - p/5$	$-1 \leqslant \cos\beta \leqslant 1$	$p_5 \leqslant p_{\rm F}$
	$p_{\rm F} - \dfrac{p}{5} \leqslant p''' \leqslant 2\sqrt{m\hbar\omega_5}$	$-1 \leqslant \cos\beta \leqslant B$	$p_5 \leqslant p_{\rm F}$
		$B \leqslant \cos\beta \leqslant 1$	$p_5 \geqslant p_{\rm F}$

在给定 p 和 p''' 后，由 (4.3.63) 式给出的 α 集团的动量 $\bar{p}$，这时可写为

$$\bar{p} = \sqrt{\frac{16}{25}p^2 - \frac{8}{5}pp'''\cos\beta + p'''^2} \tag{4.3.65}$$

同样，还需要考虑第五核子与 α 之间的相对运动自由度的相空间积分，由 (4.3.17) 式得到相对运动坐标 r''' 的积分区域，完成对 r''' 的积分，相对动量 p'''(以下用 p' 代换) 的积分区域由 (4.3.17) 式得到的是 $0 \to \sqrt{5\mu\hbar\omega}$，被积函数的归一化表示为

$$T(p') = \frac{16}{\pi(5\mu\hbar\omega_5)^3}(5\mu\hbar\omega_5 - p'^2)^{\frac{3}{2}}p'^2 \tag{4.3.66}$$

这里，折合质量是 $\mu = 4m/5$ 为了简化表示，记

$$D = \left|\frac{p}{5} - p_{\rm F}\right| \quad 和 \quad G = \sqrt{5\mu\hbar\omega_5} \tag{4.3.67}$$

由此得到 ^{5}He 各组态的预形成概率的理论公式表示.

当 $p > 5p_{\rm F}$ 时

$$F_{50}(p) = \int_0^D {\rm d}p'T(p')\int_{-1}^1 {\rm d}\cos\beta F_{40}(\bar{p}) + \int_D^G {\rm d}p'T(p')\int_B^1 {\rm d}\cos\beta F_{40}(\bar{p})$$

$$\begin{aligned} F_{41}(p) =& \int_0^D {\rm d}p'T(p')\int_{-1}^1 {\rm d}\cos\beta F_{31}(\bar{p}) \\ &+ \int_D^G {\rm d}p'T(p')\left[\int_B^1 {\rm d}\cos\beta F_{31}(\bar{p}) + \int_{-1}^B {\rm d}\cos\beta F_{40}(\bar{p})\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{32}(p) =& \int_0^D {\rm d}p'T(p')\int_{-1}^1 {\rm d}\cos\beta F_{22}(\bar{p}) \\ &+ \int_D^G {\rm d}p'T(p')\left[\int_B^1 {\rm d}\cos\beta F_{22}(\bar{p}) + \int_{-1}^B {\rm d}\cos\beta F_{31}(\bar{p})\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{23}(p) =& \int_0^D {\rm d}p'T(p')\int_{-1}^1 {\rm d}\cos\beta F_{13}(\bar{p}) \\ &+ \int_D^G {\rm d}p'T(p')\left[\int_B^1 {\rm d}\cos\beta F_{13}(\bar{p}) + \int_{-1}^B {\rm d}\cos\beta F_{22}(\bar{p})\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_{14}(p) &= \int_0^D \mathrm{d}p' T(p') \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\beta F_{04}(\bar{p}) \\
&\quad + \int_D^G \mathrm{d}p' T(p') \left[\int_B^1 \mathrm{d}\cos\beta F_{04}(\bar{p}) + \int_{-1}^{B} \mathrm{d}\cos\beta F_{13}(\bar{p}) \right] \\
F_{05}(p) &= \int_D^G \mathrm{d}p' T(p') \left[\int_{-1}^{B} \mathrm{d}\cos\beta F_{04}(\bar{p}) \right]
\end{aligned} \tag{4.3.68}
$$

当 $p < 5p_{\mathrm{F}}$ 时

$$
\begin{aligned}
F_{50}(p) &= \int_D^G \mathrm{d}p' T(p') \int_{B}^{1} \mathrm{d}\cos\beta F_{40}(\bar{p}) \\
F_{41}(p) &= \int_0^D \mathrm{d}p' T(p') \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\beta F_{40}(\bar{p}) \\
&\quad + \int_D^G \mathrm{d}p' T(p') \left[\int_B^1 \mathrm{d}\cos\beta F_{31}(\bar{p}) + \int_{-1}^{B} \mathrm{d}\cos\beta F_{40}(\bar{p}) \right] \\
F_{32}(p) &= \int_0^D \mathrm{d}p' T(p') \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\beta F_{31}(\bar{p}) \\
&\quad + \int_D^G \mathrm{d}p' T(p') \left[\int_B^1 \mathrm{d}\cos\beta F_{22}(\bar{p}) + \int_{-1}^{B} \mathrm{d}\cos\beta F_{31}(\bar{p}) \right] \\
F_{23}(p) &= \int_0^D \mathrm{d}p' T(p') \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\beta F_{22}(\bar{p}) \\
&\quad + \int_D^G \mathrm{d}p' T(p') \left[\int_B^1 \mathrm{d}\cos\beta F_{13}(\bar{p}) + \int_{-1}^{B} \mathrm{d}\cos\beta F_{22}(\bar{p}) \right] \\
F_{14}(p) &= \int_0^D \mathrm{d}p' T(p') \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\beta F_{13}(\bar{p}) \\
&\quad + \int_D^G \mathrm{d}p' T(p') \left[\int_B^1 \mathrm{d}\cos\beta F_{04}(\bar{p}) + \int_{-1}^{B} \mathrm{d}\cos\beta F_{13}(\bar{p}) \right] \\
F_{05}(p) &= \int_0^D \mathrm{d}p' T(p') \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\beta F_{04}(\bar{p}) \\
&\quad + \int_D^G \mathrm{d}p' T(p') \left[\int_{-1}^{B} \mathrm{d}\cos\beta F_{04}(\bar{p}) \right]
\end{aligned} \tag{4.3.69}
$$

(4.3.68) 和 (4.3.69) 式在连结点是在 $p = 5p_{\mathrm{F}}$ 处, 这时 $D = 0$, 由 (4.3.20) 式给出对应的激发能为 $E^* = 7\hbar\omega/2 \approx 26.1\mathrm{MeV}$.

用前面同样方式可以验证上述 $^5\mathrm{He}$ 预形成概率的归一性. 由 (4.3.68)~(4.3.69) 式计算的 $^5\mathrm{He}$ 各组态 $[l, m]$ 的预形成概率随激发能的变化由图 4.13 给出. 横坐标为激发能.

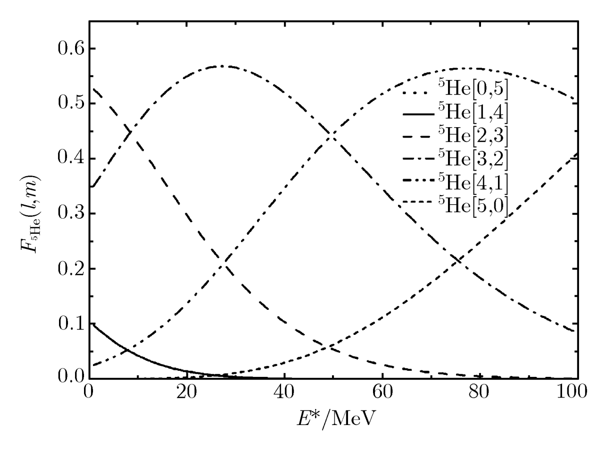


图 4.13　^{5}He 的预形成概率

在物理上 $[l=0,m]$ 组态表示全部核子在费米海下的结团概率, 虽然这个集团不能被发射, 但是, 作为模型理论, 数学上仍然给出 $[l=0,m]$ 组态, 以保证归一化条件成立. 由于拾缀核子的核子一定在费米面上, 而组态 $[1,4]$ 在整个能区内明显比组态 $[2,3]$ 要小, 而激发能在 10MeV 以上, $[3,2]$ 组态的概率要比 $[2,3]$ 组态明显大, 激发能在 50MeV 以上, $[4,1]$ 组态的概率要比 $[3,2]$ 组态明显大, 是主要成分. 这就是在 Iwamoto-Harada 模型 (Iwamoto et al., 1982) 基础上得到的数值结果. 由图 4.13 给出的结果揭示出这样的物理问题, 即或在低激发能的情况下, 例如, 在 $E\approx 20$MeV 时除了 $[1,4]$ 组态外, 仍然出现 $[2,3]$ 和 $[3,2]$ 等组态, 而且明显比 $[1,4]$ 组态的预形成概率要大, 由于 $[2,3]$ 和 $[3,2]$ 组态对应的末态激子态密度都很小, 如同上面对 α 粒子的预平衡发射的分析那样, 使得总的 ^{5}He 预平衡发射概率过小, 这种物理图像的出现为改进 Iwamoto-Harada 模型给出了提示.

当然, 上述的理论方法可以被推广应用到 ^{6}Li 和 ^{8}Be 复杂粒子的预平衡发射概率的描述中, 例如, ^{6}Li 可视为 $\mathrm{d}+\alpha$ 集团组成, ^{8}Be 可视为 $\alpha+\alpha$ 集团的组成. Iwamoto-Harada 模型提供了一个有用的理论方法途径, 但是在这个模型中还有一些物理因素没有被考虑周全. 因此, 以上对各种复杂粒子的预形成概率中, 各种组态的比例还不能给出比较准确的结果. 在下一节中将对这方面的改进研究内容给予详细的阐述.

4.4　与激子态有关的复杂粒子预形成概率

上面介绍了 Iwomoto-Harada 理论模型方法 (Iwamoto et al., 1982; Sato et al., 1983), 及其改进的结果 (Zhang, 1993b; Zhang et al., 1988). 然而, 在 Iwomoto-Harada 方法中对内禀动量积分时, 没有对物理系统中的动量分布做任何限制, 即假定了在

费米面上仍然像费米面下那样处处填充了费米子, 这是不符合实际情况的. 带有一定能量的入射粒子进入靶核内部形成复合核, 它具有确定的激发能 E^*, 对应的最大动量值为

$$p_{\max} = \sqrt{2mE^*} \tag{4.4.1}$$

因此, 在考虑了由入射粒子能量给出的动量限制后, 被称为与能量有关的复杂粒子预形成概率, 就会修正复杂粒子的预形成概率 (Zhang, 1994a; Zhang et al., 1996). 但是, 这仅是限制了动量积分的上限. 实际上, 在上述方法中仍然认为动量空间中在 $p_{\max}$ 以下被核子占满, 这仍然与实际情况不符.

为了进一步改进 Iwomoto-Harada 模型, 不仅考虑了由入射粒子能量给出的最大动量的限制, 还要考虑在各种激子态的情况下的动量分布. 通过这种与激子态有关的动量分布来计算的复杂粒子预形成概率就与激子态有关了, 因而被称为与激子态有关的复杂粒子预形成概率 (Exciton Dependent Pre-formation Probability) (Zhang et al., 2007). 下面讨论如何计算与激子态有关的动量分布, 再讨论这种考虑动量分布对复杂粒子预形成概率的影响.

首先讨论与激子态有关的动量分布问题. 核反应非平衡态的耗散过程可以用占据数方程来描述. 这里用的是约化占据数方程 (Wolschin, 1982), 它的合理性在于, 复合核系统从任何形式的初始态分布出发通过核系统的能量耗散过程, 经过足够长的时间, 最终都能达到平衡态的费米分布. 上述演化过程对任意初始状态都是成立的. 平衡态费米分布的温度由入射粒子的能量决定. 平衡态费米分布的温度由入射粒子的能量决定. 占据数是指每个动量空间相格在每个时刻被占据的状态, 且满足 $0 \leqslant n(\varepsilon,t) \leqslant 1$, 占据数的演化过程给出核反应非平衡态耗散过程的理论描述. 而在 Iwamoto-Harada 模型中仅是用了相空间的大小来确定预形成概率的大小, 这就暗示了在这些被占据的相空间中总有 $n(\varepsilon,t)=1$ 存在, 这就造成仅用相空间体积来估算概率的大小会发生一定的偏差. 因此, 需要研究在耗散过程中占据数随时间变化的演化过程.

这里采用了约化占据数方程来描述核反应系统的能量耗散过程, 其一般形式表示如下 (Wolschin, 1982):

$$\frac{\partial n(\varepsilon,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left[V(t)n(\varepsilon,t)(1-n(\varepsilon,t)) + n^2(\varepsilon,t)\frac{\partial D(t)}{\partial \varepsilon}\right] + D(t)\frac{\partial^2 n(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon^2} \tag{4.4.2}$$

其中, $V(t)$ 为漂移系数 (量纲 MeV/s), $D(t)$ 为扩散系数 (量纲 MeV^2/s). 方程中右边第一项为漂移项, 描述任一个占据态向不同能量区域的漂移过程, 而右边第二项为扩散项, 描述任一个占据态分布在耗散过程中的扩散过程.

以往求解约化占据数方程有三种途径：漂移系数和扩散系数为常数时可以得到解析解, 或用迟豫近似法求解, 而漂移系数和扩散系数随时间变化时只能用数值

解 (Zhang et al., 1983).

由于感兴趣的是耗散过程中的核子动量分布, 而不是耗散过程本身. 为简单起见, 这里仅讨论漂移系数和扩散系数为常数的情况 (Zhang et al., 1983). 因为在这种情况下可以得到解析解. 当耗散系数和扩散系数为常数时, 方程简化为

$$\frac{\partial n(\varepsilon,t)}{\partial t} = -V\frac{\partial}{\partial\varepsilon}[n(\varepsilon,t)(1-n(\varepsilon,t))] + D\frac{\partial^2 n(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon^2} \tag{4.4.3}$$

对于如图 4.14 所示的矩形初始分布, 如果单粒子能级密度仍然用等间隔形式, 则有

$$n_0(\varepsilon) = [1-\Theta(\varepsilon-\varepsilon_1)] + [1-\Theta(\varepsilon-\varepsilon_3)]\Theta(\varepsilon-\varepsilon_2) \tag{4.4.4}$$

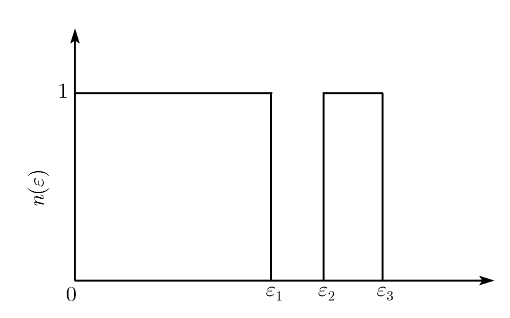


图 4.14　矩形初始分布示意图

其中

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{当} < 0 \\ 1, & \text{当} > 0 \end{cases} \tag{4.4.5}$$

因此, 入射粒子携带能量为

$$E_{0_i} = g\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3}\varepsilon\mathrm{d}\varepsilon = \frac{1}{2}g(\varepsilon_3^2-\varepsilon_2^2) \tag{4.4.6}$$

这时 $\varepsilon_1 = \varepsilon_{\mathrm{F}_0}$ 是靶核的费米面. 对于单粒子入射需要满足下面关系:

$$g\int_{\varepsilon_{\mathrm{F}_0}}^{\infty}\mathrm{d}\varepsilon = g(\varepsilon_3-\varepsilon_2) = 1 \tag{4.4.7}$$

这里 g 是单粒子能级密度. 与通常激子模型一样, 单粒子能级分布取为等间隔形式, 即 g 为常数, 一般地, 取近似 $g \approx A/10$, A 为靶核的质量数. 按矩形初始分布, 封闭核系统的总能量为

$$E_{\mathrm{T}} = g\int_0^{\infty}\varepsilon\mathrm{d}\varepsilon = E_0 + E_1 = \frac{g}{2}\varepsilon_{\mathrm{F}_0}^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_3+\varepsilon_2) \tag{4.4.8}$$

其中, 靶核初始能量为 $E_0 = \frac{g}{2}\varepsilon_{\mathrm{F}_0}^2$. 核系统的激发能 E^* 为

$$E^* = \frac{1}{2}(\varepsilon_3 + \varepsilon_2) - \varepsilon_{\mathrm{F}_0} \tag{4.4.9}$$

由单粒子入射条件 (4.4.7) 和 (4.4.9) 式给出的激发能表示后, 可以得到由图 4.14 给出的矩形初始分布中能量范围分别是

$$\varepsilon_2 = E^* + \varepsilon_{\mathrm{F}_0} - \frac{1}{2g}, \quad \varepsilon_3 = E^* + \varepsilon_{\mathrm{F}_0} + \frac{1}{2g} \tag{4.4.10}$$

由于最后要达到的平衡态, 并满足费米–狄拉克分布：

$$n(\varepsilon, t \to \infty) = \frac{1}{1 + \exp[\beta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{F}})]} \tag{4.4.11}$$

其中, ε_{F} 是复合核的费米能, 而初始靶核的费米能为 $\varepsilon_{\mathrm{F}_0}$, 它们之间是不同的. 将 (4.4.11) 式代入方程 (4.4.3), 由此可以得到漂移系数与扩散系数之间的关系为

$$V = -\beta D \tag{4.4.12}$$

β 是一个关联系数, 对比 (1.10.1) 式的费米分布表示, 得到 β 与平衡态温度之间的关系为

$$\beta(t \to \infty) = 1/KT \tag{4.4.13}$$

这意味着只有达到平衡态时才有温度可言, T 是平衡态核系统的温度. 对于封闭系统, 还需要满足粒子数守恒和能量守恒的条件. 由粒子数守恒可以得到初始粒子数为

$$N = g\varepsilon_{\mathrm{F}_0} + 1 \tag{4.4.14}$$

特别要指出的是, 我们所研究的只是费米能远远大于核温度的情况, 即要求

$$\exp(-\varepsilon_{\mathrm{F}}/KT) \ll 1 \tag{4.4.15}$$

的条件成立, 即相对于 1 而言, 公式 (4.4.15) 的指数函数项总可以被忽略不计的. 这个条件给出了限定研究适用的能量范围. 一般低能核反应的情况都能满足上述这个条件. 通常取费米能大约为 $\varepsilon_{\mathrm{F}} \approx 30\mathrm{MeV}$, 而核系统的温度仅为几个兆电子伏特. 例如当 $KT = 1, 2, 3\mathrm{MeV}$ 时, 相应的 $\exp(-\varepsilon_{\mathrm{F}}/KT)$ 值分别为 9.35×10^{-14}, 3.06×10^{-7}, 4.54×10^{-5}, 都远小于 1, 都是可以被忽略的. 一般初始靶核的费米能为 $20 \sim 30\mathrm{MeV}$, 当激发能 E^* 在 $20 \sim 100\mathrm{MeV}$ 范围时, 这时平衡态温度 KT 的数量级为几个兆电子伏特. 这正是我们感兴趣的能量范围.

利用不定积分公式：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\mathrm{e}^{mx}} = \frac{1}{am}[mx - \ln(a+b\mathrm{e}^{mx})] = \frac{-1}{am}\ln(a\mathrm{e}^{-mx}+b) \tag{4.4.16}$$

可以得到平衡态粒子数 (此时 $a=1$, $m=\beta$, $b=\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_\mathrm{F}}$)：

$$g\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{1+\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\varepsilon_\mathrm{F})}} = \frac{-g}{\beta}\ln(\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}+\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_\mathrm{F}})|_0^\infty = g\varepsilon_\mathrm{F}+\frac{g}{\beta}\ln(1+\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_\mathrm{F}}) \approx g\varepsilon_\mathrm{F} \tag{4.4.17}$$

因此对于一个封闭系统, 由粒子数守恒可以确定在单粒子入射时, 复合系统的费米能 ε_F 与靶核费米能 $\varepsilon_{\mathrm{F}_0}$ 之间的关系是

$$\varepsilon_\mathrm{F} = \varepsilon_{\mathrm{F}_0} + 1/g \tag{4.4.18}$$

显然, 对质量数为 A 的入射粒子而言, 在 (4.4.18) 式中就将 1 改为 A 即可.

对于封闭系统, 由能量守恒可以得到

$$E_T = \frac{g}{2}\varepsilon_{\mathrm{F}_0}^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_3-\varepsilon_2) = \int_0^\infty g\frac{\varepsilon\mathrm{d}\varepsilon}{1+\exp[\beta(\varepsilon-\varepsilon_\mathrm{F})]} \tag{4.4.19}$$

为了作出这个积分, 需要将被积函数作级数展开, 为保证级数收敛, 需将能量分段采用下面两种不同的级数展开形式：

$$\begin{aligned}E_T &= \int_0^\infty \frac{g\varepsilon\mathrm{d}\varepsilon}{1+\exp[\beta(\varepsilon-\varepsilon_\mathrm{F})]} = g\int_0^{\varepsilon_\mathrm{F}} \frac{\varepsilon\mathrm{d}\varepsilon}{1+\exp[\beta(\varepsilon-\varepsilon_\mathrm{F})]} + g\int_{\varepsilon_\mathrm{F}}^\infty \frac{\exp[-\beta(\varepsilon-\varepsilon_\mathrm{F})]\varepsilon\mathrm{d}\varepsilon}{1+\exp[-\beta(\varepsilon-\varepsilon_\mathrm{F})]}\\ &= \frac{g}{2}\varepsilon_\mathrm{F}^2 + g\sum_{n=1}^\infty(-1)^n\mathrm{e}^{-n\beta\varepsilon_\mathrm{F}}\int_0^{\varepsilon_\mathrm{F}}\mathrm{e}^{n\beta\varepsilon}\varepsilon\mathrm{d}\varepsilon + g\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\mathrm{e}^{(n+1)\beta\varepsilon_\mathrm{F}}\int_{\varepsilon_\mathrm{F}}^\infty \mathrm{e}^{-(n+1)\beta\varepsilon}\varepsilon\mathrm{d}\varepsilon\\ &= \frac{g}{2}\varepsilon_\mathrm{F}^2 - \frac{2g}{\beta^2}\sum_{n=1}\frac{(-1)^n}{n^2} - g\sum_{n=1}\frac{(-1)^n}{n^2\beta^2}\mathrm{e}^{-n\beta\varepsilon_\mathrm{F}}\end{aligned} \tag{4.4.20}$$

在 (4.4.20) 式中的第二项可利用等式：

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \tag{4.4.21}$$

由 (4.4.15) 式的条件, (4.4.20) 式中的第三项可以被忽略. 利用 (4.4.8), (4.4.10) 和 (4.4.20) 式, 由能量守恒得到下面的关系式：

$$E_T = \frac{g}{2}\varepsilon_{\mathrm{F}_0}^2 + E^* + \varepsilon_{\mathrm{F}_0} \approx \frac{g}{2}\varepsilon_\mathrm{F}^2 + \frac{g\pi^2}{6\beta^2} \tag{4.4.22}$$

将 (4.4.18) 式代入到 (4.4.22) 式, 应用了 (4.4.15) 式的条件, 经过整理后得到

$$\frac{g\pi^2}{6\beta^2} = E^* - \frac{g}{2}(\varepsilon_\mathrm{F}^2-\varepsilon_{\mathrm{F}_0}^2) + \varepsilon_{\mathrm{F}_0} = E^* + \varepsilon_{\mathrm{F}_0} - \frac{1}{2g} \approx E^* \tag{4.4.23}$$

就得到一般文献中熟知的激发能与平衡态温度之间的关系：

$$KT \approx \sqrt{\frac{6E^*}{g\pi^2}} = \sqrt{\frac{E^*}{a}} \tag{4.4.24}$$

其中 a 是能级密度参数, (4.4.24) 式的右边是由平衡态统计理论给出的激发能与核温度的关系, 由此得到单粒子能级密度与能级密度参数的关系：

$$a = \frac{\pi^2}{6} g \tag{4.4.25}$$

在一个核激发系统中, 粒子数是指在费米海 ε_{f_0} 之上的占据数. 特别需要指出的是, 入射粒子不会改变靶核的费米能, 因此不能用复合核的费米能 ε_f 来标定粒子数, 因此粒子数随时间的变化可表示为

$$p(t) = g \int_{\varepsilon_{\mathrm{F}_0}}^{\infty} n(\varepsilon, t) \mathrm{d}\varepsilon \tag{4.4.26}$$

对于单粒子入射情况, 初始粒子数为 $p_0 = 1$. 利用积分公式 (4.4.16), 得到平衡态粒子数：

$$p(t \to \infty) = g \int_{\varepsilon_{\mathrm{F}_0}}^{\infty} \mathrm{d}\varepsilon \frac{1}{1 + \exp[(\varepsilon - \varepsilon_f)/KT]} = gKT \ln(1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{gKT}}) \tag{4.4.27}$$

相应地, 空穴数随时间的变化一般的表示为

$$h(t) = g \int_0^{\varepsilon_{\mathrm{F}_0}} [1 - n(\varepsilon, t)] \mathrm{d}\varepsilon \tag{4.4.28}$$

初始靶核在基态情况下, 初始空穴数为 $h_0 = 0$, 而平衡态的空穴数为

$$h(t \to \infty) = g \int_0^{\varepsilon_{\mathrm{F}_0}} \mathrm{d}\varepsilon \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \exp[(\varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{F}})/KT]} \right\} = gKT \ln(1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{gKT}}) - 1 \tag{4.4.29}$$

因此, 平衡态对应的最大激子数为

$$n_{\max} = n(t \to \infty) = p(t \to \infty) + h(t \to \infty) = 2gKT \ln(1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{gKT}}) - 1 \tag{4.4.30}$$

由上面公式很容易看出, 随着单粒子能级密度 g 或温度 KT 增大时, 封闭系统平衡态的粒子数、空穴数以及激子数都随之单调增大. 注意到上述结果是对应于单核子引发的核反应过程的结果. 对于重离子引发的核反应过程, 在上面公式的基础上很容易地进行推广得到.

与 Iwomoto-Harada 模型根本不同的地方在于, 在一定的激发能情况下最大粒子数和空穴数是被确定的, 而不可能像前面的结果那样, 在任何激发能的情况下所

有的组态都可能出现. 例如, 对 $n=3$ 的激子态, 由于费米海上仅有两个核子, 因此 $[l>3,m]$ 的组态就不可能出现了, 而对 $n=5$ 的激子态, $[l>4,m]$ 的组态就不可能出现了. 为此下面讨论出现 n 激子态的条件. 为了方便计算, 将 (4.4.30) 式用激发能代替温度的形式表示. 对于单粒子入射情况, 激子数与粒子数满足条件 $n=2p-1$, 利用 (4.4.24) 式、(4.4.30) 式用激发能表示的最大激子数是

$$n_{\max}=\frac{2\sqrt{6gE^*}}{\pi}\cdot\ln\left[1+\exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{6gE^*}}\right)\right]-1 \tag{4.4.31}$$

若令

$$x=\frac{\pi}{\sqrt{6gE^*}} \tag{4.4.32}$$

公式 (4.4.31) 变为

$$\exp\left[\frac{(n_{\max}+1)}{2}x\right]-\exp(x)-1=0 \tag{4.4.33}$$

这是 x 的超越方程, 是在给定的激子数时要求激发能的关系式. 数值计算表明, $n_{\max}$ 越大, 方程 (4.4.32) 的根 x 值越小, 由 (4.4.32) 式看出要求的激发能越高. 例如, 如果要求 $n_{\max}=3$ 的激子态存在时, 令

$$y=\exp(x) \tag{4.4.34}$$

(4.4.33) 式变为

$$y^2-y-1=0 \tag{4.4.35}$$

解出 $y=(1+\sqrt{5})/2\approx 1.681$. 对一定的单粒子能级密度 g 情况下, 存在 $n_{\max}=3$ 激子态的激发能必须满足的条件为

$$E^*>\frac{1}{6g}\left(\frac{\pi}{\lg 1.681}\right)^2\approx 6.098/\mathrm{g} \tag{4.4.36}$$

这个不等式的物理含义在于, 当激发能满足 (4.4.37) 式时, 表示这个核系统才可能激发出 $n=3$ 的激子态. 否则核系统不能出现 $n=3$ 的激子态. 因此, 对于任意激子态 n, 由 (4.4.31) 式可以给出这个激子态出现所需要的最低激发能. 换句话说, 在给定激发能时, 由 (4.4.31) 式可以确定允许哪些激子态存在.

为了在物理图像上清楚起见, 对于核素 ^{10}B, ^{12}C, ^{16}O, 利用 (4.4.31) 式, 在激发能从 10~50MeV 的情况下, 存在可能的最大激子态数由表 4.11 给出.

表 4.11　在不同激发能的情况下, ^{12}C, ^{14}N, ^{16}O 的最大激子数

E^*/MeV	10	20	30	40	50
B-10	3	3	5	5	7
C-12	3	5	5	7	9
O-16	3	5	7	7	9

例如, 激发能在 20MeV 附近时, 由表 4.11 看出, 这时 ^{10}B 的最大激子数仅为 n =3, 这表明在中子引发的轻核反应中, 费米海上的粒子数最大仅是 2. 因此, 对于 ^{5}He 发射的情况, 仅能存在组态 $[1,4],[2,3]$, 而前面不考虑激子态中动量分布的情况下, 还会有 $[3,2]$, $[4,1]$, 以及 $[5,0]$ 组态的出现. 而 ^{12}C 和 ^{16}O 的最大激子数为 n =5, 表明在上述激发能的情况下中子引发的轻核反应中, 费米海上的粒子数是 3. 因此, 对于 ^{5}He 发射的情况, 仅存在 $[1,4],[2,3],[3,2]$ 组态, 而前面由图 4.13 可见, 还会有 $[4,1],[5,0]$ 组态出现. 考虑到激发能对最大激子态存在的物理条件, 因而限制了一些复杂粒子预形成的组态出现, 这是与原来 Iwomoto-Harada 模型根本不同之处.

为了看清关于预平衡复杂粒子发射的各组态构成的物理图像, 在 $n=3$, 5 的情况下各组态的组成由图 4.15 和图 4.16 示意地给出. 可以很容易地看出, 在 $n=3$ 激子态时, 不可能存在 $[3,m]$ 的组态. 而在原来 Iwomoto-Harada 模型中却是可以存在的. 这也就是需要进一步考虑与激子数有关的预平衡形成概率的原因.

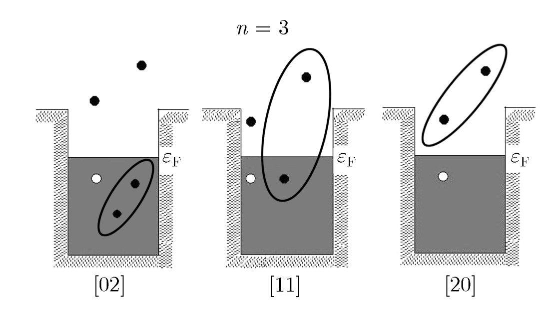


图 4.15 激子态 $n=3$ 时 d 的 $[0,2],[1,1]$ 和 $[2,0]$ 组态示意图

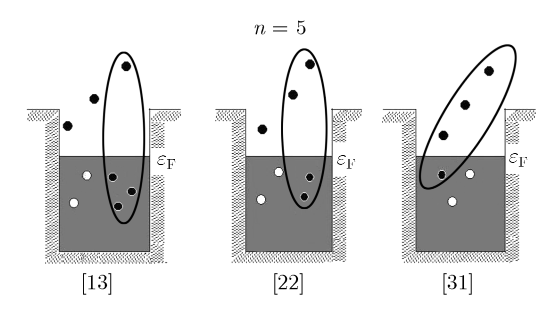


图 4.16 激子态 $n=5$ 时 α 粒子的 $[1,3]$, $[2,2]$ 和 $[3,1]$ 组态示意图

以前已经讨论了传输系数为常数和与时间有关的传输系数的能量耗散过程之间的区别 (Zhang et al., 1983). 而在这里研究的主要目的是为了得到在确定的激子态情况下费米子系统的动量分布状态. 为计算方便, 在约化占据数方程 (4.4.3) 中对时间变量作如下标度变换：

$$\tau = Dt \tag{4.4.37}$$

这时 τ 的量纲为 MeV^2. 显而易见, 当解出 t 时刻的耗散过程的行为时, 扩散系数越大, 对应的真实时间越短, 因此这种标度变换可以简化扩散过程的物理分析. 于是, 约化占据数方程 (4.4.3) 演变为

$$\frac{\partial n(\varepsilon,\tau)}{\partial \tau} = \beta\frac{\partial}{\partial\varepsilon}n(\varepsilon,\tau)(1-n(\varepsilon,\tau)) + \frac{\partial^2 n(\varepsilon,\tau)}{\partial\varepsilon^2} \tag{4.4.38}$$

在漂移系数和扩散系数为常数的情况下, 可以得到约化占据数方程 (4.4.38) 中 $n(\varepsilon,\tau)$ 的解析解, 对任意初始分布的情况下, 已经证明了这个解析解可以写成下面的形式 (Zhang et al., 1983)：

$$n(\varepsilon,\tau) = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} n_0(x)f(x,\varepsilon,\tau)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\varepsilon,\tau)\mathrm{d}x} \tag{4.4.39}$$

这里 n_0 为初始占据数分布. 其中

$$f(x,\varepsilon,\tau) = \exp\left\{\frac{\beta}{2}\left[x - 2\int_0^x n_0(y)\mathrm{d}y\right]\right\}\exp\left[-\frac{(\varepsilon-x)^2}{4\tau}\right] \tag{4.4.40}$$

由于费米海的负能态全部被核子占据, 因此在 $-\infty < x < 0$ 的区域 $n_0(x) = 1$. 因此在 (4.4.39) 式中, 当 $-\infty < x < 0$ 时有下面积分结果存在

$$\frac{\beta}{2}\left[x - 2\int_0^x n_0(y)\mathrm{d}y\right] = -\frac{\beta}{2}x \tag{4.4.41}$$

这时在 (4.4.40) 式的分子和分母中, 都有下面的积分结果存在

$$\int_{-\infty}^0 f(x,\varepsilon,\tau)\mathrm{d}x = \exp\left\{-\frac{1}{2}\beta\varepsilon + \frac{1}{4}\beta^2\tau\right\}\sqrt{\pi\tau}\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\varepsilon-\beta\tau}{2\sqrt{\tau}}\right)\right] \tag{4.4.42}$$

这里 $\mathrm{erf}(x)$ 是误差函数, 其定义是

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u \tag{4.4.43}$$

在 (4.4.39) 式的分子分母中共同约去公共因子 $\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\beta\varepsilon + \dfrac{1}{4}\beta^2\tau\right\}\sqrt{\pi\tau}$, 占据数方程的解 (4.4.39) 式可以改写为 (Wolschin, 1982)

$$n(\varepsilon,\tau) = \frac{\left[1 - \mathrm{erf}\left(\dfrac{\varepsilon-\beta\tau}{2\sqrt{\tau}}\right) + \displaystyle\int_0^{\infty} n_0(x)G(x,\varepsilon,\tau)\mathrm{d}x\right]}{\left[1 - \mathrm{erf}\left(\dfrac{\varepsilon-\beta\tau}{2\sqrt{\tau}}\right) + \displaystyle\int_0^{\infty} G(x,\varepsilon,\tau)\mathrm{d}x\right]} \tag{4.4.44}$$

其中

$$G(x,\varepsilon,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\exp\left\{\frac{\beta}{2}\varepsilon-\frac{1}{4}\beta^2\tau\right\}f(x,\varepsilon,\tau) \tag{4.4.45}$$

将 (4.4.40) 式的 $f(x,\varepsilon,t)$ 代入 (4.4.45) 式得到

$$G(x,\varepsilon,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi Dt}}\exp\left\{-\frac{(x-\varepsilon-\beta\tau)^2}{4\tau}+\beta\varepsilon-\beta\int_0^x n_0(y)\mathrm{d}y\right\} \tag{4.4.46}$$

对于矩形初始分布 (4.4.4) 式是分段给出的, 可以得到下面分段的积分结果

$$\int_0^x n_0(y)\mathrm{d}y=\begin{cases}x, & \text{当}0<x\leqslant\varepsilon_1\\ \varepsilon_1, & \text{当}\varepsilon_1<x\leqslant\varepsilon_2\\ x+\varepsilon_1-\varepsilon_2, & \text{当}\varepsilon_2<x\leqslant\varepsilon_3\\ \varepsilon_1+\varepsilon_3-\varepsilon_2, & \text{当}\varepsilon_3<x\end{cases} \tag{4.4.47}$$

因此, 在 (4.4.46) 式中需要分段积分, 将 (4.4.47) 式代入 (4.4.46) 式中, 得到四个能量区域的积分结果分别是

$$\begin{aligned}
\int_0^{\varepsilon_1}G(x,\varepsilon,\tau)\mathrm{d}x&=\mathrm{erf}\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon+\beta\tau}{2\sqrt{\tau}}\right)+\mathrm{erf}\left(\frac{\varepsilon-\beta\tau}{2\sqrt{\tau}}\right)\\
\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}G(x,\varepsilon,\tau)\mathrm{d}x&=\exp\{\beta(\varepsilon-\varepsilon_1)\}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon-\beta\tau}{2\sqrt{\tau}}\right)-\mathrm{erf}\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon-\beta\tau}{2\sqrt{\tau}}\right)\right]\\
\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3}G(x,\varepsilon,\tau)\mathrm{d}x&=\exp\{\beta(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{\varepsilon_3-\varepsilon+\beta\tau}{2\sqrt{\tau}}\right)-\mathrm{erf}\left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon+\beta\tau}{2\sqrt{\tau}}\right)\right]\\
\int_{\varepsilon_3}^{\infty}G(x,\varepsilon,\tau)\mathrm{d}x&=\exp\{\beta(\varepsilon-\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3)\}\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{\varepsilon_3-\varepsilon-\beta\tau}{2\sqrt{\tau}}\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.4.48}$$

在 (4.4.44) 式的分子中, 对于矩形初始分布, 该积分只有两个不为零的积分区间：

$$\int_0^\infty n_0(x)G(x,\varepsilon,\tau)\mathrm{d}x=\int_0^{\varepsilon_1}G(x,\varepsilon,\tau)\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3}G(x,\varepsilon,\tau)\mathrm{d}x \tag{4.4.49}$$

积分结果已经包含在 (4.4.49) 式中. 定义下面符号：

$$\begin{aligned}
A(\varepsilon,\tau)&=\mathrm{erf}\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon+\beta\tau}{2\sqrt{\tau}}\right)+1\\
B(\varepsilon,\tau)&=\exp\{\beta(\varepsilon-\varepsilon_1)\}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon-\beta\tau}{2\sqrt{\tau}}\right)-\mathrm{erf}\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon-\beta\tau}{2\sqrt{\tau}}\right)\right]\\
E(\varepsilon,\tau)&=\exp\{-\beta(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{\varepsilon_3-\varepsilon+\beta\tau}{2\sqrt{\tau}}\right)-\mathrm{erf}\left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon+\beta\tau}{2\sqrt{\tau}}\right)\right]\\
F(\varepsilon,\tau)&=\exp\{\beta(\varepsilon-\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3)\}\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{\varepsilon_3-\varepsilon-\beta\tau}{2\sqrt{\tau}}\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.4.50}$$

显然在 (4.4.50) 式中, 无论在指数函数和误差函数中的变量都是量纲为一的量. 将以上的结果代入 (4.4.44) 式, 就得到了与能量时间无关的传输系数下约化占据数方程的解析解：

$$n(\varepsilon,\tau)=\frac{A(\varepsilon,\tau)+E(\varepsilon,\tau)}{A(\varepsilon,\tau)+B(\varepsilon,\tau)+E(\varepsilon,\tau)+F(\varepsilon,\tau)} \tag{4.4.51}$$

利用误差函数的性质 $\mathrm{erf}(x\to\pm\infty)=\pm1$, 当 $\tau\to0$ 时, 在 (4.4.51) 式中, 有当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ 时：

$$A=2;\quad B=E=F=0,\quad n_0(\varepsilon)=\frac{A}{A}=1$$

当 $\varepsilon_1<\varepsilon\leqslant\varepsilon_2$ 时：

$$B=2\mathrm{e}^{\beta\{\varepsilon-\varepsilon_1\}};\quad A=E=F=0,\quad n_0(\varepsilon)=\frac{0}{B}=0$$

当 $\varepsilon_2<\varepsilon\leqslant\varepsilon_3$ 时：

$$E=2\mathrm{e}^{-\beta\{\varepsilon_1-\varepsilon_2\}};\quad A=B=F=0,\quad n_0(\varepsilon)=\frac{E}{E}=1$$

当 $\varepsilon_3<\varepsilon$ 时：

$$F=2\mathrm{e}^{\beta\{\varepsilon-\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3\}};\quad A=B=E=0,\quad n_0(\varepsilon)=\frac{0}{F}=0 \tag{4.4.52}$$

代入到 (4.4.51) 式后, 这正是矩形初始分布 (4.4.4) 式. 说明占据数方程的解析解 (4.4.51) 满足初始矩形分布.

另外还可以证明, 当时间足够长时, 占据数分布 (4.4.51) 趋向费米分布. 事实上, 当时间 $\tau\to\infty$ 时, 利用误差函数的性质可得到

$$A(\varepsilon,\tau\to\infty)=2$$

$$B(\varepsilon,\tau\to\infty)=E(\varepsilon,\tau\to\infty)=0,$$

$$F(\varepsilon,\tau\to\infty)=2\exp[(\varepsilon-\varepsilon_{\mathrm{F}})/KT]$$

于是, 当 $\tau\to\infty$ 时, 占据数分布 (4.4.51) 式自动演化成为费米分布 (4.4.11) 式.

对于初始的矩形分布 (4.4.4) 而言, 由 (1.10.5) 给出熵的公式得到的初始熵值为 0. 将平衡态费米分布代入到 (1.10.5) 式, 得到平衡态的熵为

$$S(t\to\infty)=Kg\left\{\frac{\pi^2}{3}KT-(\varepsilon_{\mathrm{F}}+2KT)\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon_{\mathrm{F}}}{KT}}\right\}\approx K\frac{\pi^2}{3}gKT \tag{4.4.53}$$

其中 $\exp(-\varepsilon_f/KT)$ 项是仍然是可被忽略的. 平衡态的熵是随温度的上升而近似地线性单调上升. 因此, 在封闭核激发系统的能量耗散过程中, 在给定的上述初始条件下, 其熵值是从 $0\to S(t\to\infty)$ 的增加过程, 满足熵增加定律.

得到占据数分布 $n(\varepsilon,\tau)$ 之后, 就可以求出与激子数 $n(\tau)=p(\tau)+h(\tau)$ 相对应的新标度 “时间”$\tau(n)$. 费米子系统在 “时间”τ 的粒子数可以由下式计算:

$$p(\tau)=g\int_{\varepsilon_{\mathrm{F}_0}}^{\infty}n(\varepsilon,\tau)\mathrm{d}\varepsilon \tag{4.4.54}$$

因此可以计算出每个可存在的激子数 n 对应的 “时间”τ_n, 不同的激发能对应不同的 τ_n. 下面给出一个计算示例. 在单核子入射, 费米能取 30MeV, $A=56$ 的核系统, 激发能为 20MeV 的情况下, 在考虑了低激子态的动量分布后, 这时在费米海上的动量分布与 Iwomoto-Harada 模型中用充满的费米球分布有着十分明显的差别. 在图 4.17 中, 在初始为矩形分布时, 激子数分别为 $n=3,5,7,9$ 以及平衡态的占据数分布图 (Zhang et al., 2007).

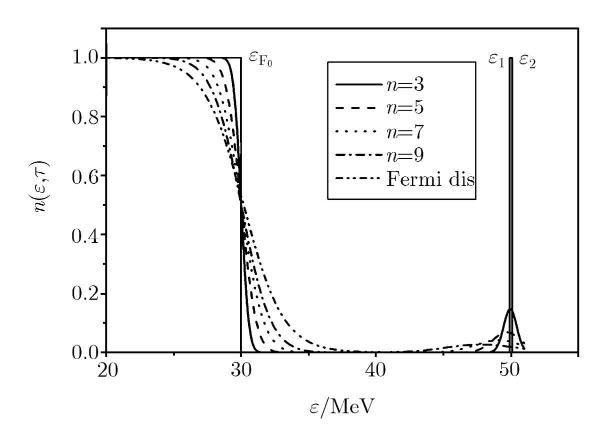


图 4.17 $n=3,5,7,9$ 及平衡态的占据数分布图

可以看出在耗散过程中, 在费米面附近, 海下出现空穴的产生, 海上出现粒子态的产生, 且随激子数的加大这种图像显得越明显. 在低激子态的情况下, 费米海上的动量分布概率很小, 使得对于高粒子态的预形成 $[l>1,m]$ 组态概率成分会明显降低. 由约化占据数方程的解析解 (4.4.51) 式, 可以得到各种激子态下的动量分布, 将这一新物理因素纳入预形成概率的动量积分中, 就得到与激子态有关 (即考虑了动量分布) 的复杂粒子的预形成概率.

理论计算表明, 激发能越高, 达到各激子态的时间越短, 而在一定激发能的情况下, 达到越高激子态的时间就越长.

下面给出氘核的与激子数有关的预形成概率, 这时对动量的积分变为

$$F_{lm}(n,\varepsilon_d)=\frac{8\pi^2C}{3(\pi m\hbar\omega)^3}\int_{[l,m]}\left(\frac{3}{2}m\hbar\omega-p_r^2\right)^{\frac{3}{2}}J(n)p_r^2\mathrm{d}p_r\mathrm{d}\cos\beta \tag{4.4.55}$$

其中引进了 $J(n)$ 是在 n 激子态情况下的动量分布. 在给定的氘核能量 ε_{d}(或氘核

动量 $p_{\rm d}$) 后, 由 (4.3.34) 式可以得到氘核中两个核子的动量 p_1 和 p_2, 也就得到氘核中两个核子的能量 ε_1 和 ε_2. 表 4.5 已给出了 d 核各组态对 p_r 和 $\cos\beta$ 积分的上下限. 再由占据数方程得到在一定激子态下每个核子的占据数分布 $n(\varepsilon)$, 从而给出 (4.4.55) 式的积分中动量分布 $J(n)$ 因子值为

$$J(n) = n(\varepsilon_1)n(\varepsilon_2) \tag{4.4.56}$$

但这时无法像表 4.6 那样得到 $F_{lm}(n,\varepsilon_2)$ 的解析表达式, 只能用数值积分方法计算.

在考虑了动量分布之后, 经过重归一化, 可以得到氘核的预形成概率, 并利用 4.3 节的公式进一步得到各种复杂粒子的预形成概率. 在 ^{16}O 的 α 粒子预形成概率情况下, 分别对激子数为 $n = 3$, 5 的情况进行了计算, 其结果如图 4.18 和图 4.19 所示.

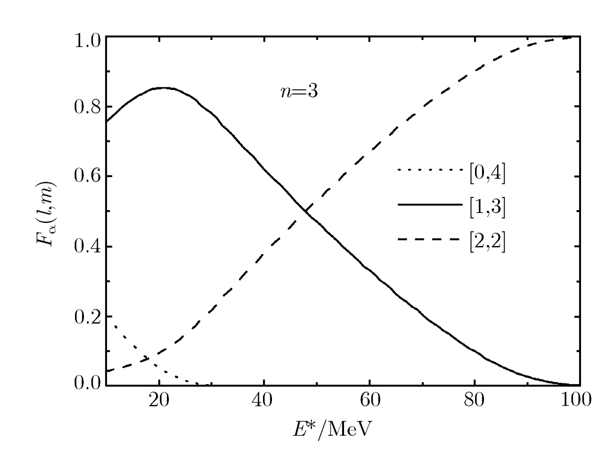


图 4.18　^{16}O 在 $n = 3$ 时 α 粒子各组态预形成概率随激发能变化的曲线

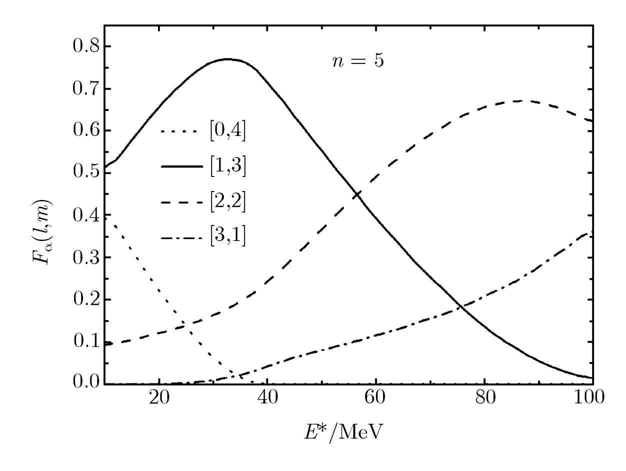


图 4.19　^{16}O 在 $n = 5$ 时 α 粒子各组态预形成概率随激发能变化的曲线

将图 4.18 和图 4.19 与原来的图 4.11 比较可以明显看出, 在考虑了动量空间的占据状态后, 得到的 $l > 1$ 预形成概率值是明显小于未考虑动量空间的占据状态时得到的值. 以 $n = 3$ 激子态为例, 这时在激发能小于 50MeV 时, 以组态 $[1, 3]$ 为主, 而在大于 50MeV 时, 组态 $[2, 2]$ 的贡献变成主要贡献, 而 $[3, 1]$ 和 $[4, 0]$ 组态却都没出现. 而在 $n = 5$ 的激子态情况下, 虽然出现 $[3, 1]$ 组态, 但是在激发能比较低时, 仍然是比较小的, 而 $[4, 0]$ 组态却没出现. 当然, 组态 $[0, 4]$ 的概率也明显加大, 这是对应了的费米海下四个核子组成 α 粒子的预形成概率, 如前所述, 由于集团能量的限制, 这种组态形成的 α 粒子集团是不能被发射的. 同时, 这种结果也表明, 在高激发能的不同激子态 $n = 3, 5$ 的情况下, 组态 $[2, 2]$ 对预平衡发射的贡献明显比原来由图 4.11 给出的预平衡概率的结果加大, 原来随激发能提高而迅速下降的 $[2, 2]$ 组态预形成概率会使得高激发能的情况复杂粒子总发射的预平衡贡献太小, 以致造成复杂粒子的预平衡发射截面过低. 因此, 在考虑了与动量有关的预形成概率后, 可以解决中高能核反应中复杂粒子发射概率过低的问题.

另外, 由 (4.4.26) 和 (4.4.28) 式看出, 粒子数和空穴数与单粒子能级密度 g 有关, 表明与激子态有关的预形成概率是与靶核质量数有关的. 但是理论计算表明, 这种与质量数的关系是很弱的, 对 ^{16}O 的预形成概率曲线与质量数大的核素的曲线基本是一致, 因此图 4.18 和图 4.19 中的曲线基本给出了各种核素的与激子态有关的预形成概率的结果.

对于低激子态, 激发到费米面上的核子非常稀少, 因此考虑了动量分布会明显改变原来 Iwomoto-Harada 模型的结果, 大大压缩多个核子来自费米面上的组态的形成概率. 计算结果表明, 在低激发能情况下, 与激子态有关的复杂粒子预形成概率, 其最主要的组态是 $[1, m]$. 对质量数为各种不同值的核素进行的计算结果表明, 在低能核反应中, 对各种复杂粒子, 组态 $[3, m]$ 总是可以被忽略. 当激发能升高后, 例如在中高能的情况下, 特别是在考虑了多步预平衡过程时, $[2, m]$ 组态需要给予适当地考虑.

同样, 对于 $t, {}^3He, {}^5He$ 等复杂粒子的预形成概率的计算也得到了类似的结果. 即在考虑了各激子态的动量分布后, $[l > 1, m]$ 组态的预形成概率被明显压缩. 而增大了 $[1, m]$ 组态的概率, 同时 $[2, m]$ 组态随激发能的加大而减小的趋势也会明显减弱, 使得在中高能核反应中复杂粒子预平衡发射的贡献普遍加大.

这种方法可以很容易地推广到重离子入射的核反应情况中去. 原来的 Iwomoto-Harada 模型, 仅考虑了复杂粒子预形成概率中的相空间的体积. 由于没有考虑到每个相格中的平均占据概率, 这就无法考虑与激子态有关的动量分布, 这就会使得对各组态的概率分配产生明显的偏离, 在一定激发能的情况下, 就会使一些不合理的组态概率的出现. 因此, 在低激发能的情况下, 原来的 Iwomoto-Harada 模型会过高地给出了 $[l > 1, m]$ 的贡献, 而在相对高的激发能的情况下, 过高地给出了在费米

海上高粒子数 $[l > 2, m]$ 组态的概率.

4.5 复杂粒子发射的双微分截面

4.5.1 前言

在预平衡发射过程不仅可以发射单核子, 还可以发射复杂粒子, 如 d, t, ^{3}He, α 粒子以及 ^{5}He 等, 所以我们还需要给出复杂粒子发射的双微分截面公式.

但是, 复杂粒子发射双微分截面的理论公式是当前一个未能很好解决的核反应理论课题. 目前, 国际上比较通用的核反应统计理论模型计算程序, 通常是用 Kalbach 系统学公式 (Kalbach, 1987) 来计算双微分截面. Kalbach 系统学是对多种出射粒子, 包括中子、质子、氘核、氚核、^{3}He 以及 α 粒子等, 在符合大量核素不同入射能的双微分截面实验测量数据的基础上来确定系统学参数, 它可以描述的出射粒子双微分截面的能量区域很宽, 对中重核数据的计算表明 Kalbach 系统学公式能够成功地描述各种粒子发射的双微分截面. 然而, 这个系统学公式有其局限性, 正如参考文献 (Kalbach, 1987) 的题目所表明的, 只适用于发射粒子后剩余核是处于连续态能级的情况. 而轻核反应恰恰是发射粒子到剩余核的分立能级态, 因此不适用于描述轻核反应. 于是需要建立计算复杂粒子发射双微分截面的理论模型 (Zhang, 1990). 有关内容的介绍还可以参阅 (Zhang et al., 1993a; 丁大钊等, 2005).

在综合考虑了单粒子发射的角分布描述方法和复杂粒子发射的拾取机制后, 就能初步建立起描述复杂粒子预平衡发射双微分截面的理论方法, 其基本思想是：

(1) 单粒子发射的双微分截面用考虑了费米运动和 Pauli 原理后的单粒子发射理论描述.

(2) 复合核系统用费米气体模型描述. 当然, 原子核内的核子配对效应比较强, 而费米气体模型是独立粒子模型, 这是今后可以着手进行改进的一个方面.

(3) 一个被发射的核子如果不拾取其他核子, 则发射单核子; 如果拾取了其他核子而形成复杂粒子集团, 则发射复杂粒子.

(4) 在低能核反应中, 最主要的复杂粒子预形成组态是 $[1, m]$, 这表示所有发射的复杂粒子都是由出射单核子拾取费米面下的核子而形成的.

(5) 复杂粒子的发射方向由发射的单核子动量以及所有可能的在费米海中被拾取的其他核子的动量合成而确定.

在上述思想基础上, 复杂粒子发射的双微分截面可以用类似于单粒子的 (3.5.21) 式表示：

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon\mathrm{d}\Omega} = \sum_n \frac{\mathrm{d}\sigma(n)}{\mathrm{d}\varepsilon} A(n, \varepsilon, \Omega) \tag{4.5.1}$$

其中 $\mathrm{d}\sigma(n)/\mathrm{d}\varepsilon$ 是 n 激子态的能谱, 它由描述粒子预平衡发射的激子模型得到, $A(n,\varepsilon,\Omega)$ 为 n 激子态发射任何粒子的角度因子, 它应该满足归一化条件.

$$\int A(n,\varepsilon,\Omega)\mathrm{d}\Omega=1 \tag{4.5.2}$$

基于上面的思路, 由动量守恒出发, 复杂粒子的动量是等于出射单粒子动量与被拾取核子的动量之和. 因此可将复杂粒子 b 的预平衡发射角度因子普遍表示为

$$A(n,\varepsilon_b,\Omega)=\frac{1}{N}\int_{[1,m]}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\cdots\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{A_b}\delta\left(\boldsymbol{p}-\sum_{i=1}^{A_b}\boldsymbol{p}_i\right)\tau(n,\Omega_1) \tag{4.5.3}$$

其中, N 为归一化因子, $\boldsymbol{p}$ 是质心系中复杂粒子的总动量, ε_b 是复杂粒子的发射能量,A_b 是复杂粒子质量数. 显然, 如果出射粒子 b 是单核子, 那么 (4.5.3) 式便退化为单粒子发射的角分布. 对于低能核反应, $[1,m]$ 是最主要的组态, 因此有

$$|\boldsymbol{p}_1|>p_{\mathrm{F}},\quad |\boldsymbol{p}_i|<p_{\mathrm{F}},\quad i=2,\cdots,A_b$$

以下公式中下标 1 总表示出射的单核子, 而 $\tau(n,\Omega_1)$ 是出射方向为 Ω_1 的单核子在 n 激子态的寿命, 由单粒子发射的推广的激子模型方程可以得到它的解. 公式中的 δ 函数是为保证在给定复杂粒子发射方向 Ω 时, 在费米海下被拾取的核子所有可能的动量区间, 由此可确定 (4.5.3) 式中被拾取核子动量的积分限.

4.5.2 氘核预平衡发射的双微分截面

对于出射 d 粒子的角度因子, 仅需要考虑的组态为 $[1,1]$ 时, 可以表示为

$$A(n,\varepsilon,\Omega)=\frac{1}{N}\int_{[1,1]}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\tau(n,\Omega_1) \tag{4.5.4}$$

$\boldsymbol{p}$ 是氘核的动量, $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 分别是氘核中的两个核子动量. 将 d 粒子的发射角度记为 $\Omega(\theta,\varphi)$. 将激子态寿命的分波表示代入后, (4.5.4) 式变为

$$\begin{aligned}A(n,\varepsilon_{\mathrm{d}},\Omega)&\equiv\sum_l A_l(n,\varepsilon_{\mathrm{d}})P_l(\cos\theta)\\&=\frac{1}{N}\sum_l\tau_l(n)\int_{[1,1]}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)P_l(\cos\theta_1)\end{aligned} \tag{4.5.5}$$

(4.5.5) 式两边乘上 $P_l(\cos\theta)$, 并对 $\cos\theta$ 积分, 利用 Legendre 多项式的正交归一性, 从而得到角度因子的 Legendre 多项式展开系数为

$$A_l(n,\varepsilon_{\mathrm{d}})=\frac{2l+1}{2N}\sum_{l'}\tau_{l'}(n)\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta\int_{[1,1]}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)P_{l'}(\cos\theta_1)P_l(\cos\theta) \tag{4.5.6}$$

在对 (4.5.6) 式积分之前, 需要先确定积分中各物理量的取值范围. 组成氘核的两个核子的动量取值区间由下面的不等式给出, 由于第 1 核子是可发射粒子, 它必须满足

$$p_{\mathrm{F}} < |\boldsymbol{p}_1| < p_{1\,\max} \tag{4.5.7}$$

其中最大的出射动量 $p_{1\,\max}$ 是由中子入射能量 E_{n} 确定, 且有 $p_{1\,\max}^2/2m = \varepsilon_{\mathrm{F}} + E$, ε_{F} 是费米能, E 是激发能. 而被拾取的核子在费米海中, 因此满足

$$p_2 \leqslant p_{\mathrm{F}} \tag{4.5.8}$$

在费米气体模型中, 费米海中归一化的动量分布为均匀费米气体球:

$$D_n(\boldsymbol{p}) = \frac{3}{4\pi p_{\mathrm{F}}^3}\Theta(p_{\mathrm{F}} - p) \tag{4.5.9}$$

为方便起见, 引入量纲为一的量 $x_1 = p_1/p_{\mathrm{F}}$, $x_2 = p_2/p_{\mathrm{F}}$, 因此它们分别满足下面不等式:

$$1 < x_1 < \sqrt{1 + E/\varepsilon_{\mathrm{F}}} \quad \text{以及} \quad 0 < x_2 \leqslant 1 \tag{4.5.10}$$

应该注意到 (4.5.6) 式中含有 $P_{l'}(\cos\theta_1)$, 因此, 为解析地作出积分, 需要做一个数学变换, 记 $\boldsymbol{p}_2$ 与 $\boldsymbol{p}$ 轴夹角为 Θ. 将 $\boldsymbol{p}$ 的方向视为新的 Z 轴, 且有 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$. 组成氘核的两个核子动量 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 与氘核总动量的关系由图 4.20 所示.

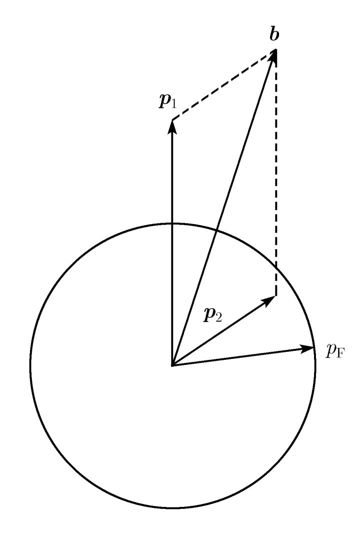


图 4.20　氘核动量 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$ 的示意图

下面介绍一个有用的数学技巧. 由图 4.21 所示, 当有三个矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 时, 它们彼此间的夹角分别为 θ_{ab}, θ_{bc}, θ_{ac} 时, 其中任何两个矢量夹角的 Legendre 多项式

可以用其他两个矢量之间的立体角的 Legendre 多项式来表示, 这就是 Legendre 多项式的合成关系 (王竹溪等, 1965). 例如对矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的 Legendre 多项式, 可以用 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 以及 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 之间的夹角的 Legendre 多项式来表示, 其合成关系由下面公式所示：

$$P_l(\cos\theta_{ab}) = P_l(\cos\theta_{ac})P_l(\cos\theta_{bc}) + 2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \times P_l^m(\cos\theta_{ac})P_l^m(\cos\theta_{bc})\cos m(\varphi_{ac}-\varphi_{bc}) \tag{4.5.11}$$

在 (4.5.11) 中, $P_l^m(\cos\theta)$ 是连带 Legendre 多项式 (王竹溪等, 1965). 相当于将矢量 $\boldsymbol{c}$ 作为 Z 轴. 若在积分表示式中与方位角 φ 角无关, 对 φ 角积分后, (4.5.11) 式中的第二项消失. 这个数学技巧在本节和第 5 章中都会多次应用到.

在目前的情况下, 由图 4.21 可知, 三个矢量分别为 $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}$ 和 Z 轴. 若以 $\boldsymbol{p}$ 作为新 Z 轴时, 可以把粒子 $\boldsymbol{p}_1$ 的 Legendre 多项式 $P_l(\cos\theta_1)$ 用 $\boldsymbol{p}_2$ 和 $\boldsymbol{p}$ 的立体角来表示. 在将 $\boldsymbol{p}$ 作为新 Z 轴的坐标系中 $\boldsymbol{p}_1$ 的立体角是 $(\varTheta, \varPhi)$, 即 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}$ 的夹角为 $\varTheta$, 由图 4.22 所示.

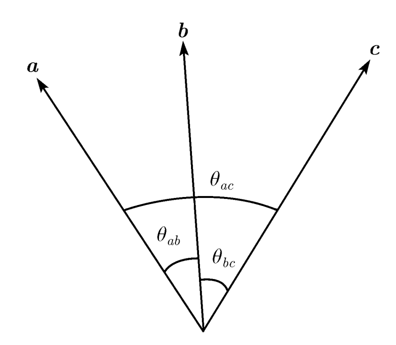



图 4.21 三个矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的示意图

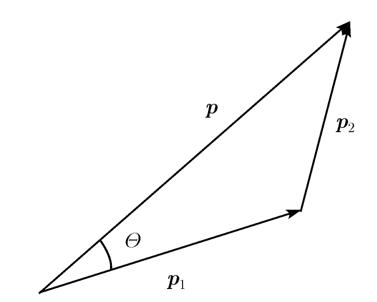


图 4.22 $\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1$ 的矢量关系示意图

原来 Z 轴的立体角是 $\varOmega(\theta, \varphi)$. 这时 $\theta_1 = \theta_{ab}$, $\varTheta = \theta_{ac}$, $\theta = \theta_{bc}$, 将 (4.5.11) 式代入到 d 核发射的角度因子的分波表示 (4.5.6) 中, 由于在费米球内的费米气体为各向同性, 因此对 $\boldsymbol{p}_1$ 的积分可以写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 = p_1^2\mathrm{d}p_1\mathrm{d}\cos\varTheta\mathrm{d}\varPhi \tag{4.5.12}$$

对 $\varPhi$ 积分后, (4.5.11) 式的第二部分消失. 利用 Legendre 多项式的正交性, 完成对 $\cos\theta$ 积分后, 得到 l 分波的角度因子为

$$A_l(n, \varepsilon_d) = \frac{2\pi}{N}\tau_l(n)\int_{[1,1]} p_1^2\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)P_l(\cos\varTheta)\mathrm{d}\cos\varTheta\mathrm{d}p_1 \tag{4.5.13}$$

由于 $\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1$, 得到

$$p_2^2=p^2+p_1^2-2pp_1\cos\Theta \tag{4.5.14}$$

要求被拾取的核子在费米面之下, $p_2\leqslant p_{\rm F}$. 由此得到条件

$$\cos\Theta\geqslant\frac{p^2+p_1^2-p_{\rm F}^2}{2pp_1}\equiv\beta \tag{4.5.15}$$

因此, 由不等式 (4.5.15) 得到 $\cos\Theta$ 的积分范围是

$$\beta<\cos\Theta\leqslant 1 \tag{4.5.16}$$

如果上述积分存在, 就必须有 $\beta<1$ 成立, 这也这是上面 δ 函数宗量的要求条件. 另外, 物理上还要要求 $-1\leqslant\beta$, 事实上, 由 (4.5.15) 式可知, 这个条件相当于要求 $p_{\rm F}^2\leqslant(p+p_1)^2$, 由于 $p_1>p_{\rm F}$ 和 $p>p_{\rm F}$, 所以该不等式永远成立. $\beta<1$ 的要求给出对 p_1 的积分限制：

$$p-p_{\rm F}<p_1 \tag{4.5.17}$$

再利用 δ 函数的性质完成对 $\boldsymbol{p}_2$ 的积分后归一化的 d 核出射的 l 分波角度因子

$$A_l(n,\varepsilon_{\rm d})=\frac{2\pi}{N}\tau_l(n)\int_{[1,1]}p_1^2\int P_l(\cos\Theta){\rm d}\cos\Theta{\rm d}p_1 \tag{4.5.18}$$

应用量纲为一表示 $x_{\rm d}=p/p_{\rm F}$, $y=p_2/p_{\rm F}$, $x_1=p_1/p_{\rm F}$, 由 (4.5.14) 式可将对 $\cos\Theta$ 的积分换为对 y 的积分：

$${\rm d}\cos\Theta=-\frac{y}{x_{\rm d}x_1}{\rm d}y \tag{4.5.19}$$

而对 y 的积分限是从 $(x_{\rm d}-x_1)$ 到 1. 由于 $x_1>1$, 由 (4.5.17) 的条件相当于 $x_{\rm d}-1<x_1$.

将拾取费米海下核子的效应产生的因子称为几何因子. 利用无量纲表示, d 核出射的几何因子的分波形式可表示为

$$G_l(n,\varepsilon_{\rm d})=\frac{1}{x_{\rm d}}\int_{\max\{1,x_{\rm d}-1\}}^{\sqrt{1+E/\varepsilon_{\rm F}}}x_1{\rm d}x_1\int_{x_{\rm d}-x_1}^{1}yP_l\left(\frac{x_{\rm d}^2+x_1^2-y^2}{2x_{\rm d}x_1}\right){\rm d}y \tag{4.5.20}$$

利用 (3.5.6) 式对寿命的分波展开, 这时归一化的 d 核出射的角度因子可以表示为如下形式：

$$A(n,\varepsilon_{\rm d},\Omega)=\frac{1}{4\pi}\sum_l(2l+1)\frac{\tau_l(n,\varepsilon_{\rm d})G_l(n,\varepsilon_{\rm d})}{\tau_0(n,\varepsilon_{\rm d})G_0(n,\varepsilon_{\rm d})}P_l(\cos\theta) \tag{4.5.21}$$

显而易见, 单粒子发射的角度因子中的几何因子为 1.

4.5.3 ^{3}He 和 t 预平衡发射的双微分截面

^{3}He 和 t 核都包含 3 个核子, 预形成概率的主要贡献来自 [1,2] 组态. 在复杂粒子 ^{3}He 和 t 的预平衡发射过程中, 出射单核子从费米海中拾取两个核子形成复杂粒子 ^{3}He 和 t 后再发射出去. 与 d 核的角度因子相类似, ^{3}He 和 t 核的角度因子可以表示为

$$A(n,\varepsilon,\Omega)\frac{1}{N}\int_{[1,2]}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\mathrm{d}\boldsymbol{p}_3\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3)\tau(n,\Omega)_1 \tag{4.5.22}$$

(4.5.22) 式中各项的意义与 (4.5.3) 式中的相同. 由组态 [1,2] 可以确定各动量的积分区间, 这时

$$p_f<|\boldsymbol{p}_1|<p_{1\max},\quad |\boldsymbol{p}_i|<p_{\mathrm{F}},\qquad i=2,3 \tag{4.5.23}$$

其中 $p_{1\max}=\sqrt{2m(E+\varepsilon_{\mathrm{F}})}$. 为了作出 (4.5.22) 式的积分, 首先将被拾取的费米海中的两个核子的动量分别改写成两个动量之和 $\boldsymbol{p}_{23}$ 及相对动量 $\boldsymbol{p}_r$ 的形式:

$$\boldsymbol{p}_{23}=\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3,\quad \boldsymbol{p}_r=\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3) \tag{4.5.24}$$

其逆关系为

$$\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{p}_{23}+\boldsymbol{p}_r,\quad \boldsymbol{p}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{p}_{23}-\boldsymbol{p}_r \tag{4.5.25}$$

于是在角度因子 (4.5.23) 式中对两个被拾取核子动量的积分可替换为对 $\boldsymbol{p}_{23}$ 和 $\boldsymbol{p}_r$ 的积分:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\mathrm{d}\boldsymbol{p}_3=\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{23}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_r \tag{4.5.26}$$

因此, 角度因子可以改写为

$$A(n,\varepsilon,\Omega)=\frac{1}{N}\int_{[1,2]}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{23}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_r\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_{23})\tau(n,\Omega_1) \tag{4.5.27}$$

^{3}He 和 t 核的总动量可以表示为 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_{23}$, 由于被拾取的两个核子都在费米海下, 因此有下面不等式成立:

$$p_{23}^2=p^2+p_1^2-2pp_1\cos\theta'\leqslant 4p_{\mathrm{F}}^2 \tag{4.5.28}$$

定义 β 值为

$$\beta=\frac{p_{\mathrm{F}}^2-p_{23}^2/4-p_r^2}{p_{23}p_r} \tag{4.5.29}$$

其中 θ' 是 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 之间的夹角, 如图 4.23 所示.

图 4.23 $\boldsymbol{p}_{23}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{p}_1$ 之间的矢量关系示意图

由于在 (4.5.27) 式中的 δ 函数中不显含 $\boldsymbol{p}_r$, 对于给定的 $\boldsymbol{p}_{23}$, 可以确定对 $\boldsymbol{p}_r$ 的积分范围. 记 θ'' 为 $\boldsymbol{p}_{23}$ 与 $\boldsymbol{p}_r$ 之间夹角, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ 与 $\boldsymbol{p}_{23}$, $\boldsymbol{p}_r$ 之间的矢量关系如图 4.24 所示.

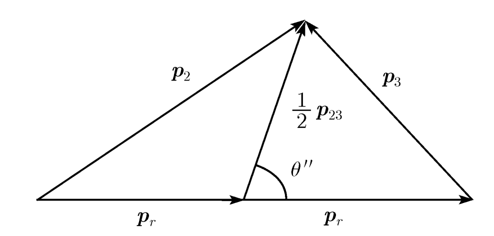


图 4.24　$\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ 与 $\boldsymbol{p}_{23}$, $\boldsymbol{p}_r$ 之间的矢量关系示意图

可以看出, 在 $p_2 \leqslant p_{\mathrm{F}}$ 和 $p_3 \leqslant p_{\mathrm{F}}$ 成立的前提下, 无论 θ'' 取任何值, $|\boldsymbol{p}_r + \boldsymbol{p}_{23}/2| \leqslant p_{\mathrm{F}}$ 总能成立 (即 $p_r + p_{23}/2 \leqslant p_{\mathrm{F}}$ 也成立), 因而对 θ'' 积分时 θ'' 取值范围是 0~π. 若 $p_r + p_{23}/2 > p_{\mathrm{F}}$ 成立时, 当 θ'' 变化到 $\pm\beta$ 时, 就会有 $p_2 \geqslant p_{\mathrm{F}}$ 或 $p_3 \geqslant p_{\mathrm{F}}$ 出现, 这就不满足被拾取的核子是在费米面下的条件. 由条件 $p_2 \leqslant p_{\mathrm{F}}$ 和 $p_3 \leqslant p_{\mathrm{F}}$ 得知, 当 $\beta = 0$ 时, p_r 取其最大值, 这时相应的 $\cos\theta''$ 无积分区域, 因而得到

$$p_{r,\max} = \sqrt{p_{\mathrm{F}}^2 - p_{23}^2/4} \tag{4.5.30}$$

因此, 可以明确地写出对 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{23}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_r$ 的积分上下限的表示:

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{23}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_r = \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{23} \left[\int_0^{p_{\mathrm{F}} - \frac{1}{2}p_{23}} p_r^2 \mathrm{d}p_r \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta'' + \int_{p_{\mathrm{F}} - \frac{1}{2}p_{23}}^{\sqrt{p_{\mathrm{F}}^2 - \frac{1}{4}p_{23}^2}} p_r^2 \mathrm{d}p_r \int_{-\beta}^{\beta} \mathrm{d}\cos\theta'' \right] \tag{4.5.31}$$

完成对 $\cos\theta''$ 积分后得到

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{23}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_r = \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{23} \left[2\int_0^{p_{\mathrm{F}} - \frac{1}{2}p_{23}} p_r^2 \mathrm{d}p_r + \frac{2}{p_{23}} \int_{p_{\mathrm{F}} - \frac{1}{2}p_{23}}^{\sqrt{p_{\mathrm{F}}^2 - \frac{1}{4}p_{23}^2}} p_r \left(p_{\mathrm{F}}^2 - \frac{1}{4}p_{23}^2 - p_r^2 \right) \mathrm{d}p_r \right] \tag{4.5.32}$$

再做出对 p_r 积分, 得到

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{23}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_r = \frac{1}{6} \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{23} \left(p_{\mathrm{F}} - \frac{1}{2}p_{23} \right)^2 (4p_{\mathrm{F}} + p_{23}) \tag{4.5.33}$$

将 (4.5.33) 式代入 (4.5.28) 式得到的角度因子为

$$A(n,\varepsilon,\Omega) = \frac{1}{6N} \int_{[1,2]} \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{23} \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_{23}) \left(p_{\mathrm{F}} - \frac{1}{2}p_{23} \right)^2 (4p_{\mathrm{F}} + p_{23}) \tau(n, \Omega_1) \tag{4.5.34}$$

系统质心坐标系的 Z 轴沿中子入射方向 $\boldsymbol{k}$, 其中出射粒子 $\boldsymbol{p}$ 的立体角为 $\Omega=(\theta,\varphi)$. 前面已经定义 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}$ 的夹角为 θ', 如果应用 (4.5.11) 式介绍的方法, 取新的 Z 轴沿 $\boldsymbol{p}$ 的方向, 利用球谐函数的求和公式:

$$P_l(\cos\theta_1)=P_l(\cos\theta')P_l(\cos\theta)+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta')P_l^m(\cos\theta)\cos m(\varPhi-\phi)$$

与氘核的情形类似, $\boldsymbol{p}_1$ 相对于 $\boldsymbol{p}$ 的分布是旋转对称的, 所以对 $\varPhi$ 积分后上式的第二项消失. 发射 ^{3}He 和 t 核的角度因子的分波形式为

$$A_l(n,\varepsilon)=\frac{\pi\tau_l(n)}{3N}\int_{[1,1]}p_1^2\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{23}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_{23})\left(p_{\mathrm{F}}-\frac{1}{2}p_{23}\right)^2(4p_{\mathrm{F}}+p_{23})P_l(\cos\theta')\mathrm{d}\cos\theta'\mathrm{d}p_1$$

可以利用 δ 函数的性质完成对 $\boldsymbol{p}_{23}$ 的积分. 由于 $\boldsymbol{p}_{23}$ 必须满足条件 $p_{23}\leqslant 2p_f$, 由图 4.23 的矢量关系可以得到 $\cos\theta'$ 的积分限:

$$\gamma\leqslant\cos\theta'\leqslant 1 \tag{4.5.35}$$

其中

$$\gamma\equiv\frac{p^2+p_1^2-4p_{\mathrm{F}}^2}{2pp_1} \tag{4.5.36}$$

对 $\cos\theta'$ 积分不为 0 的条件为 $\gamma<1$, 得到

$$(p-p_1)^2<4p_{\mathrm{F}}^2 \quad 或 \quad p-2p_{\mathrm{F}}<p_1 \tag{4.5.37}$$

以下计算中换为量纲为一的表示, $x_b=p/p_{\mathrm{F}}$, $x_1=p_1/p_{\mathrm{F}}$, $y=p_{23}/p_{\mathrm{F}}$, 对 x_1 的积分限为

$$\max\{1,x_b-2\}\leqslant x_1\leqslant\sqrt{1+E/\varepsilon_{\mathrm{F}}} \tag{4.5.38}$$

由 (4.5.28) 式得到

$$\cos\theta'=\frac{x_b^2+x_1^2-y^2}{2x_bx_1} \tag{4.5.39}$$

将对 $\cos\theta'$ 的积分换为对 y 的积分:

$$\mathrm{d}\cos\theta'=-\frac{y}{x_bx_1}\mathrm{d}y \tag{4.5.40}$$

由 (4.5.35)~(4.5.37) 式可以得到 y 的积分区间是 $(x_b-x_1)\to 2$. 于是得到几何因子的积分表示

$$G_l^b(n,\varepsilon_b)=\frac{1}{x_b}\int_{\max\{1,x_b-2\}}^{\sqrt{1+E/\varepsilon_{\mathrm{F}}}}x_1\mathrm{d}x_1\int_{x_b-x_1}^{2}y(2-y)^2(4+y)P_l\left(\frac{x_b^2+x_1^2-y^2}{2x_bx_1}\right)\mathrm{d}y \tag{4.5.41}$$

因此, ^{3}He 和 t 核出射角度因子的分波展开的归一化表示为

$$A(n,\varepsilon_b,\Omega)=\frac{1}{4\pi}\sum_l(2l+1)\frac{\tau_l(n,\varepsilon_b)G_l(n,\varepsilon_b)}{\tau_0(n,\varepsilon_b)G_0(n,\varepsilon_b)}P_l(\cos\theta) \tag{4.5.42}$$

4.5.4　α 粒子预平衡发射的双微分截面

对于 α 粒子, 如前面所述, 在预平衡发射过程中主要贡献来自 [1,3] 组态, 详细推导过程可参阅 (Zhang et al., 1988), 即一个在费米海以上的核子拾取三个在费米海下的核子, 形成 α 粒子出射. 出射 α 粒子的角度因子可以表示为

$$A(n,\varepsilon,\Omega)=\frac{1}{N}\int_{[1,3]}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\mathrm{d}\boldsymbol{p}_3\mathrm{d}\boldsymbol{p}_4\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_4)\tau(n,\Omega_1) \tag{4.5.43}$$

(4.5.43) 式中各项的意义与 (4.5.3) 式中的相同, 由组态 [1,3] 可以确定各动量的积分区域为

$$p_{\mathrm{F}}<|\boldsymbol{p}_1|<p_{1\max},\quad |\boldsymbol{p}_i|<p_{\mathrm{F}},\qquad i=2,3,4 \tag{4.5.44}$$

由于单粒子的寿命与发射能量无关, 三个被拾取的费米海中核子的总动量为

$$\boldsymbol{p}_{234}=\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{p}_4 \tag{4.5.45}$$

第三、四两个核子的总动量及它们之间的相对动量为

$$\boldsymbol{p}_{34}=\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{p}_4,\quad \boldsymbol{p}_r=\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_4) \tag{4.5.46}$$

因此有 $\int\mathrm{d}\boldsymbol{p}_3\mathrm{d}\boldsymbol{p}_4=\int\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{34}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_r$, 这时出射 α 粒子的角度因子可以改写为

$$A(n,\varepsilon,\Omega)=\frac{1}{N}\int_{[1,3]}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{34}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_r\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_{34})\tau(n,\Omega_1) \tag{4.5.47}$$

在上面 δ 函数中不显含 $\boldsymbol{p}_r$, 在给定 $\boldsymbol{p}_{34}$ 的条件下, 由 $p_3\leqslant p_{\mathrm{F}}$, $p_4\leqslant p_{\mathrm{F}}$ 确定对 $\boldsymbol{p}_r$ 的积分范围, 得到下面不等式：

$$p_{3,4}^2=\frac{1}{4}p_{34}^2+p_r^2\pm p_{34}p_r\cos\theta'\leqslant p_{\mathrm{F}}^2 \tag{4.5.48}$$

记

$$\beta=\frac{p_{\mathrm{F}}^2-p_{34}^2/4-p_r^2}{p_{34}p_r} \tag{4.5.49}$$

$\cos\theta'$ 的积分区间为

$$-\beta\leqslant\cos\theta'\leqslant\beta \tag{4.5.50}$$

记 $\boldsymbol{p}_{34}$ 与 $\boldsymbol{p}_r$ 的夹角为 θ', 这个矢量关系如图 4.25 所示.

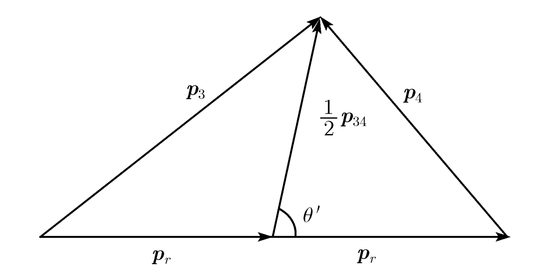


图 4.25　$\boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4$ 与 $\boldsymbol{p}_{34}, \boldsymbol{p}_r$ 的矢量关系示意图

在 (4.5.50) 中, 只有当 $\beta > 0$ 时, 该积分区间才存在, 这就给出了 p_r 的一个取值范围是

$$0 \leqslant p_r \leqslant \sqrt{p_{\mathrm{F}}^2 - p_{34}^2/4} \tag{4.5.51}$$

另外, 还要求 $\beta \leqslant 1$, 这个条件给出在给定 p_{34} 时 p_r 的取值范围要满足 $p_{\mathrm{F}} - p_{34}/2 \leqslant p_r$, 与 (4.5.51) 式比较看出, 这个条件是被包含在 (4.5.51) 式之中. 由图 4.25 以及 (4.5.51) 式的条件得到.

当 $0 \leqslant p_r \leqslant p_{\mathrm{F}} - \dfrac{1}{2}p_{34}$ 时, 对 $\cos\theta'$ 的积分要满足:

$$-1 \leqslant \cos\theta' \leqslant 1,$$

当 $p_{\mathrm{F}} - \dfrac{1}{2}p_{34} \leqslant p_r \leqslant \sqrt{p_{\mathrm{F}}^2 - \dfrac{1}{4}p_{34}^2}$ 时, 对 $\cos\theta'$ 的积分要满足:

$$-\beta \leqslant \cos\theta' \leqslant \beta.$$

因此, 可以把积分 $\displaystyle\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{34}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_r$ 具体形式写出来

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{34}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_r = \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{34}\left[\int_0^{p_{\mathrm{F}}-\frac{1}{2}p_{34}} p_r^2\mathrm{d}p_r \int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta' + \int_{p_{\mathrm{F}}-\frac{1}{2}p_{34}}^{\sqrt{p_{\mathrm{F}}^2-\frac{1}{4}p_{34}^2}} p_r^2\mathrm{d}p_r \int_{-\beta}^{\beta}\mathrm{d}\cos\theta'\right] \tag{4.5.52}$$

完成对 $\cos\theta'$ 的积分后得到

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{34}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_r = \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{34}\left[2\int_0^{p_{\mathrm{F}}-\frac{1}{2}p_{34}} p_r^2\mathrm{d}p_r + \frac{2}{p_{34}}\int_{p_{\mathrm{F}}-\frac{1}{2}p_{34}}^{\sqrt{p_{\mathrm{F}}^2-\frac{1}{4}p_{34}^2}} p_r\left(p_{\mathrm{F}}^2 - \frac{1}{4}p_{34}^2 - p_r^2\right)\mathrm{d}p_r\right] \tag{4.5.53}$$

完成对 p_r 的积分后得到

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{34}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_r = \frac{1}{6}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{34}\left(p_{\mathrm{F}} - \frac{1}{2}p_{34}\right)^2 (4p_{\mathrm{F}} + p_{34}) \tag{4.5.54}$$

下面讨论对 $\boldsymbol{p}_2$ 的积分, 因为 $\boldsymbol{p}_{234}=\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_{34}$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_{34}$ 和 $\boldsymbol{p}_{234}$ 的矢量关系由图 4.26 给出, θ'' 是 $\boldsymbol{p}_{34}$ 和 $\boldsymbol{p}_{234}$ 之间的夹角.

由于第二粒子也是被拾取的核子, 因此要求 $p_2<p_{\mathrm{F}}$, 由图 4.26 可知

$$p_2^2=p_{234}^2+p_{34}^2-2p_{234}p_{34}\cos\theta''\leqslant p_{\mathrm{F}}^2 \tag{4.5.55}$$

记

$$\gamma=\frac{p_{234}^2+p_{34}^2-p_{\mathrm{F}}^2}{2p_{234}p_{34}} \tag{4.5.56}$$

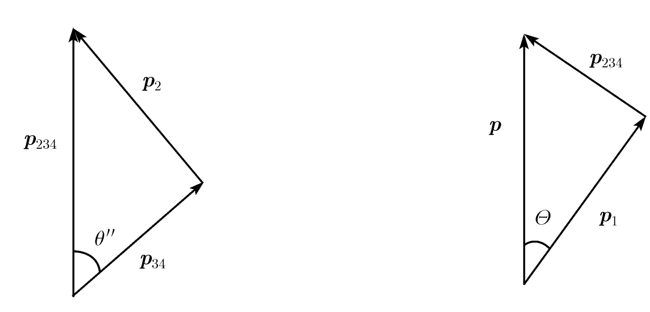


图 4.26　$\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_{34}$ 与 $\boldsymbol{p}_{234}$ 的矢量关系示意图　　图 4.27　$\boldsymbol{p}_{234}$, $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{P}$ 的矢量关系示意图

由于要求 $\gamma<1$, 由 (4.5.56) 式得到 $p_{234}-p_{34}\leqslant p_{\mathrm{F}}$ 或 $p_{234}-p_{\mathrm{F}}\leqslant p_{34}$. 另一方面, 也要求 $-1\leqslant\gamma$ 成立, 于是有

$$p_{\mathrm{F}}\leqslant p_{234}+p_{34} \tag{4.5.57}$$

显然这个条件总是成立的, 于是 $-1\leqslant\gamma$ 这个要求总能被满足. 又知 $p_{34}\leqslant 2p_f$, 因而得到 p_{34} 的积分限为

$$p_{234}-p_{\mathrm{F}}\leqslant p_{34}\leqslant 2p_{\mathrm{F}} \tag{4.5.58}$$

而 $\cos\theta''$ 的积分区间为

$$\gamma\leqslant\cos\theta''\leqslant 1 \tag{4.5.59}$$

于是可将 (4.5.54) 式中对 $\boldsymbol{p}_{34}$ 的积分具体写出为

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{34}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_r=\frac{1}{6}\int_{p_{234}-p_{\mathrm{F}}}^{2p_{\mathrm{F}}}p_{34}^2\mathrm{d}p_{34}\int_{\gamma}^{1}\mathrm{d}\cos\theta''\left(p_{\mathrm{F}}-\frac{1}{2}p_{34}\right)^2(p_{34}+4p_{\mathrm{F}}) \tag{4.5.60}$$

不难做出对 $\boldsymbol{p}_{34}$ 的解析积分, 虽然有些繁琐. 而对 $\boldsymbol{p}_2$ 的积分可以利用 δ 函数的性质做出来. 记 $\boldsymbol{p}_{234}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 轴夹角为 Θ, $\boldsymbol{p}_{234}$, $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}$ 的矢量关系由图 4.27 给出. 其中 θ_1 是 $\boldsymbol{p}_1$ 与中子入射方向 $\boldsymbol{k}$ 的夹角, (θ,φ) 是 $\boldsymbol{p}$ 在以 $\boldsymbol{k}$ 为 Z 轴的质心系中的立体角. 在以 $\boldsymbol{p}$ 为 Z 轴的新坐标系中, (Θ,Φ) 是 $\boldsymbol{p}_1$ 的立体角, (θ,ϕ) 是 $\boldsymbol{k}$ 的立体角 (ϕ 和 φ 是两个不同的方位角). 于是, 新坐标系中, 应用前面介绍的 Legendre 多项

式的求和公式 (4.5.11) 式, 与氘核的情形类似, $\boldsymbol{p}_1$ 相对于 $\boldsymbol{p}$ 的分布是旋转对称的, 所以对 Φ 积分后 (4.5.11) 式的第二项消失.

如同对前面的推导过程那样, 将激子态寿命的分波形式表示代入, 对 $\cos\theta$ 积分后可以得到 α 粒子发射角度因子的分波形式表示. 由条件 $p_{234} \leqslant 3p_{\mathrm{F}}$, 并且由

$$p_{234}^2 = p^2 + p_1^2 - 2pp_1\cos\Theta \leqslant 9p_{\mathrm{F}}^2 \tag{4.5.61}$$

得到 $\cos\Theta$ 的积分区域为

$$\frac{p^2 + p_1^2 - 9p_{\mathrm{F}}^2}{2pp_1} \equiv \eta \leqslant \cos\Theta \leqslant 1 \tag{4.5.62}$$

对 $\cos\Theta$ 的积分不为 0 的条件是 $\eta < 1$, 由 (4.5.62) 式得到 $(p-p_1)^2 < 9p_{\mathrm{F}}^2$, 即 $p - 3p_{\mathrm{F}} < p_1$. 下面采用量纲为一的表示, 令 $x_\alpha = p/p_{\mathrm{F}}$, 得到 x_1 的积分区域为

$$\max\{1, x_\alpha - 3\} \leqslant x_1 \leqslant \sqrt{1 + E/\varepsilon_{\mathrm{F}}} \tag{4.5.63}$$

令 $y = p_{234}/p_{\mathrm{F}}$, 这时 $\cos\Theta$ 可表示为

$$\cos\Theta = \frac{x_\alpha^2 + x_1^2 - y^2}{2x_\alpha x_1} \tag{4.5.64}$$

可将对 $\cos\Theta$ 的积分换为对 y 的积分:

$$\mathrm{d}\cos\Theta = -\frac{y}{x_\alpha x_1}\mathrm{d}y \tag{4.5.65}$$

而 y 的积分限是 $(x_\alpha - x_1) \to 3$. 得到的几何因子为

$$\begin{aligned} G_l^\alpha(n, \varepsilon_\alpha) = \frac{1}{x_\alpha}\int_{\max\{1, x_\alpha - 3\}}^{\sqrt{1+E/\varepsilon_{\mathrm{F}}}} x_1 \mathrm{d}x_1 \int_{x_\alpha - x_1}^{3} (3-y)^4 \\ \times (y^3 + 12y^2 + 27y - 6) P_l\left(\frac{x_\alpha^2 + x_1^2 - y^2}{2x_\alpha x_1}\right)\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{4.5.66}$$

最后得到 α 粒子出射的归一化角度因子为

$$A(n, \varepsilon_\alpha, \Omega) = \frac{1}{4\pi}\sum_l (2l+1)\frac{\tau_l(n, \varepsilon_\alpha)G_l(n, \varepsilon_\alpha)}{\tau_0(n, \varepsilon_\alpha)G_0(n, \varepsilon_\alpha)}P_l(\cos\theta) \tag{4.5.67}$$

低能中子引发轻核反应中出射 α 粒子的双微分截面的实验测量数据比较少, 下面由图 4.28 给出在 $E_{\mathrm{n}} = 14.8\mathrm{MeV}$ 时, 对 $^{56}\mathrm{Fe(n,\alpha)}$ 的计算结果与实验测量数据的比较 (Zhang, 1994b), 实验测量数据取自 Grimes(1979) 的文章.

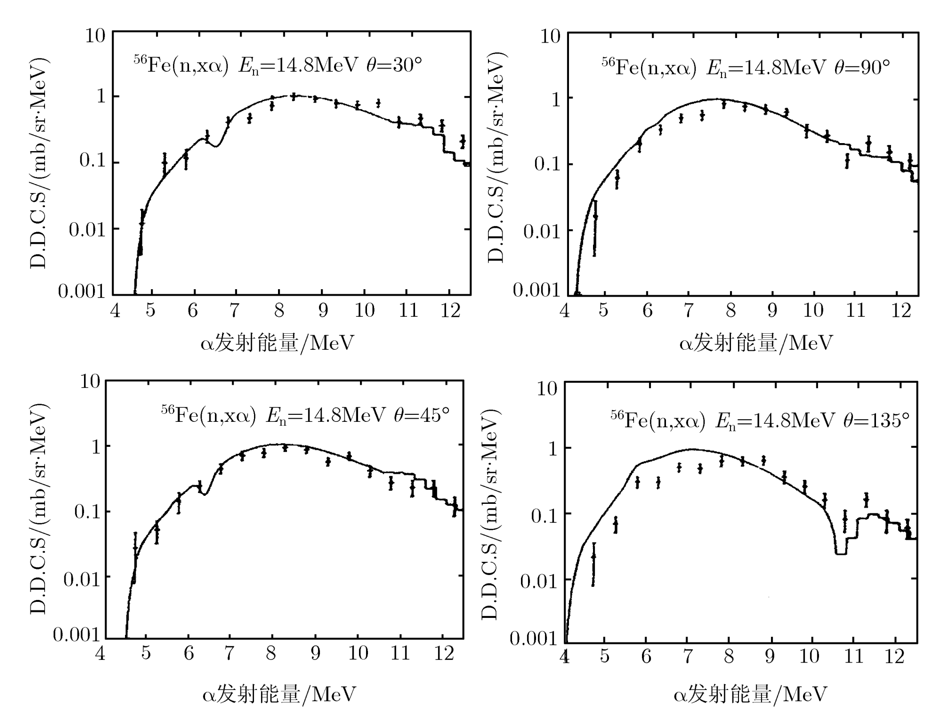


图 4.28 $E_{\rm n}=14.8$MeV 时 ^{56}Fe(n,xα) 反应中总出射 α 粒子的双微分截面

由图 4.28 可以看出, 出射 α 粒子双微分截面的理论计算值与实验测量数据得到较好的符合. 在 ^{56}Fe(n,xα) 核反应过程中, 除了一次 α 粒子发射外, 在能量为 $E_{\rm n}=14.8$MeV 时, (n,nα) 反应道也开放, 由于预平衡发射的 α 粒子在质心系中具有明显的朝前性, 而二次发射的 α 粒子在质心系中几乎为各向同. 从上面图中可以看出, 在出射 α 粒子双微分谱的低能区域, 在小角度的谱中会出现一个凹坑, 而在大角度的双微分谱中不出现这个凹坑, 就是上述原因造成的.

4.5.5 ^{5}He 预平衡发射的双微分截面

既然已经提出了需要在轻核反应中考虑 ^{5}He 的发射 (Zhang, 2004), 因此就要给出描述 ^{5}He 发射的双微分截面公式. ^{5}He 发射双微分截面的理论基本思想与在前面各节中处理其他复杂粒子发射的思想相同. 事实上, ^{5}He 发射是出射单核子在发射前从费米海中拾取了四个核子, 相当于拾取一个 α 粒子. 按照前面处理复杂粒子发射双微分截面的基本思想, ^{5}He 预平衡发射的角度因子可以表示为

$$A(n,\varepsilon,\Omega)=\frac{1}{N}\int_{[1m]}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\mathrm{d}\boldsymbol{p}_3\mathrm{d}\boldsymbol{p}_4\mathrm{d}\boldsymbol{p}_5\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_4-\boldsymbol{p}_5)\tau(n,\Omega_1) \quad (4.5.68)$$

$\boldsymbol{p}$ 是 ^{5}He 的总动量, 主导核子 1 的预平衡发射具有朝前的空间分布. 因此公式

(4.5.68) 表示对于给定的 $\boldsymbol{p}$, 被拾取的四个核子占有的动量空间体积就是 ^{5}He 在 $\Omega=(\theta,\varphi)$ 方向单位立体角内的发射概率. 除费米面上的核子 1 外, 费米海中被拾取的四个核子相当于一个 α 粒子集团, 其内禀相对运动动量用四个核子动量定义为

$$\boldsymbol{p}_{23}=\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3,\quad \boldsymbol{p}_r=\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3),\quad \boldsymbol{p}_{45}=\boldsymbol{p}_4+\boldsymbol{p}_5,\quad \boldsymbol{p}_{r'}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_4-\boldsymbol{p}_5) \tag{4.5.69}$$

被拾取的 α 粒子集团动量为

$$\boldsymbol{p}_\alpha=\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{p}_4+\boldsymbol{p}_5=\boldsymbol{p}_{23}+\boldsymbol{p}_{45} \tag{4.5.70}$$

这种动量相加关系由图 4.29 表示.

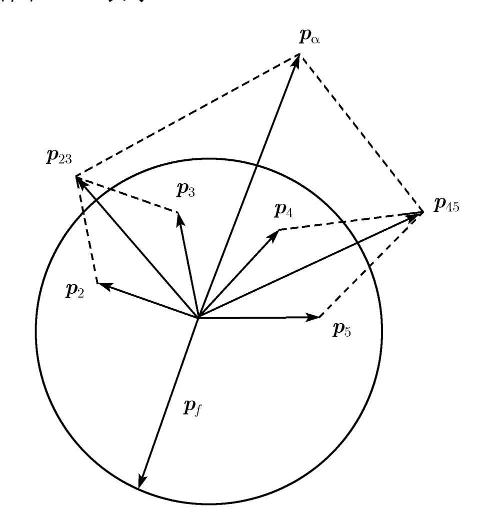


图 4.29 $\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4, \boldsymbol{p}_5$ 合成 $\boldsymbol{p}_\alpha$ 的矢量关系示意图

在这种相对动量的关系下, 两组动量积分间的 Jacobian 变换取值为 1, 于是有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\mathrm{d}\boldsymbol{p}_3\mathrm{d}\boldsymbol{p}_4\mathrm{d}\boldsymbol{p}_5=\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{23}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_r\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{45}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{r'} \tag{4.5.71}$$

因此, ^{5}He 预平衡发射的角度因子可以改写为

$$A(n,\varepsilon,\Omega)=\frac{1}{N}\int_{[lm]}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{23}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_r\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{45}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{r'}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_{23}-\boldsymbol{p}_{45})\tau(n,\Omega_1) \tag{4.5.72}$$

给定 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{p}_1$ 后, $\boldsymbol{p}_\alpha$ 也就被确定. 由于 $\boldsymbol{p}_\alpha=\boldsymbol{p}_{23}+\boldsymbol{p}_{45}$, 因此 $\boldsymbol{p}_{23}$ 与 $\boldsymbol{p}_{45}$ 的关系也被确定.

事实上, 从可以证明 ^{5}He 总动量 $\boldsymbol{p}$ 满足 $p>4p_\mathrm{F}$. 利用 (4.3.21) 式, 可将 $p^2>16p_\mathrm{F}^2$ 变为 $10E+18\varepsilon_\mathrm{F}>35\hbar\omega$. 在费米气体模型中, 一般取 $\varepsilon_\mathrm{F}\approx 25\sim 35\mathrm{MeV}$,

而由平均场理论计算出 $\hbar\omega_5 \approx 7.45\text{MeV}$, 因此, 在任何低激发能的情况下 $p > 4p_{\text{F}}$ 总成立.

另外, p_1 满足的条件为 $p_1^2/2m \leqslant E + \varepsilon_{\text{F}}$. 当 $E < \varepsilon_{\text{F}}$ 时, 可得 $p_1 < 2p_{\text{F}}$, 再利用动量合成关系 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_\alpha$, 可知

$$|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1| \equiv p_\alpha > 2p_{\text{F}} \tag{4.5.73}$$

由于 (4.5.72) 式中的 δ 函数中不显含 $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ 和 $\boldsymbol{p}_r$, 可以先考虑对 $\boldsymbol{p}_{23}$ 和 $\boldsymbol{p}_r$ 的积分. 对于给定的 $\boldsymbol{p}_{23}$, 由于组态 [1,4] 的全部被拾取核子都在费米海中, 即有 $p_2 \leqslant p_{\text{F}}, p_3 \leqslant p_{\text{F}}$, 由此条件可以确定 $\boldsymbol{p}_r$ 的积分范围. 如图 4.30 所示.

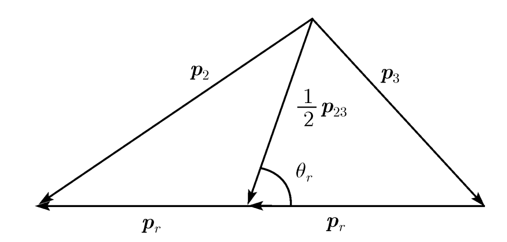


图 4.30　$\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 与 $\boldsymbol{p}_{23}, \boldsymbol{p}_r$ 的矢量关系示意图

用 θ_r 表示 $\boldsymbol{p}_{23}$ 与 $\boldsymbol{p}_r$ 的夹角. 由动量合成关系, 可得动量 p_2 和 p_3 满足的条件：

$$p_{2,3}^2 = \frac{1}{4}p_{23}^2 + p_r^2 \pm p_{23}p_r\cos\theta_r \leqslant p_{\text{F}}^2 \tag{4.5.74}$$

记

$$\beta = \frac{p_{\text{F}}^2 - \dfrac{1}{4}p_{23}^2 - p_r^2}{p_{23}p_r} \tag{4.5.75}$$

由 (4.5.74) 式可以得到 $\cos\theta_r$ 的积分区间

$$-\beta \leqslant \cos\theta_r \leqslant \beta \tag{4.5.76}$$

该积分区域存在的条件为 $\beta \geqslant 0$, 由此可得 p_r 必须满足条件：

$$p_r \leqslant \sqrt{p_{\text{F}}^2 - p_{23}^2/4} \tag{4.5.77}$$

另外由 $\beta \leqslant 1$ 的条件给出

$$p_r \geqslant p_{\text{F}} - p_{23}/2 \tag{4.5.78}$$

反之, 如果 $\beta > 1$ 时, 则 $p_r < p_{\text{F}} - p_{23}/2$, 这时 $\cos\theta_r$ 的积分区间为 $-1 \to 1$, 于是

对 $\boldsymbol{p}_r$ 积分可具体写为

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_r = \int_0^{p_{\mathrm{F}}-\frac{1}{2}p_{23}} p_r^2 \mathrm{d}p_r \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta_r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_r + \int_{p_{\mathrm{F}}-\frac{1}{2}p_{23}}^{\sqrt{p_{\mathrm{F}}^2-\frac{1}{4}p_{23}^2}} p_r^2 \mathrm{d}p_r \int_{-\beta}^{\beta} \mathrm{d}\cos\theta_r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_r \tag{4.5.79}$$

完成对 p_r 的积分后得到

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_r = \frac{\pi}{12}(16p_{\mathrm{F}}^3 - 12p_{\mathrm{F}}^2 p_{23} + p_{23}^3) \tag{4.5.80}$$

同样地, 由于 (4.5.72) 式中的 δ 函数中也不显含 $\boldsymbol{p}_4$, $\boldsymbol{p}_5$ 和 $\boldsymbol{p}_{r'}$, 可以先考虑对 $\boldsymbol{p}_{45}$ 和对 $\boldsymbol{p}_{r'}$ 的积分. 以相同的步骤完成对 $\boldsymbol{p}_{r'}$ 的积分, 得到

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{r'} = \frac{\pi}{12}(16p_{\mathrm{F}}^3 - 12p_{\mathrm{F}}^2 p_{45} + p_{45}^3) \tag{4.5.81}$$

这时 ^{5}He 预平衡发射的角度因子表示变为

$$\begin{aligned} A(n,\varepsilon,\Omega) = \frac{\pi^2}{144N} \iiint\limits_{[1,4]} & \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{23} \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{45} \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_{23} - \boldsymbol{p}_{45}) \\ & \times (16p_{\mathrm{F}}^3 - 12p_{\mathrm{F}}^2 p_{23} + p_{23}^3)(16p_{\mathrm{F}}^3 - 12p_{\mathrm{F}}^2 p_{45} + p_{45}^3)\tau(n,\Omega_1) \end{aligned} \tag{4.5.82}$$

下面讨论对 $\boldsymbol{p}_{23}$ 的积分. 因为 $\boldsymbol{p}_\alpha = \boldsymbol{p}_{23} + \boldsymbol{p}_{45}$, 如图 4.31 所示, 用 θ'' 表示 $\boldsymbol{p}_\alpha$ 与 $\boldsymbol{p}_{23}$ 的夹角. 由于被拾取的核子都在费米海下, 因此有 $p_{23} \leqslant 2p_{\mathrm{F}}$ 和 $p_{45} \leqslant 2p_{\mathrm{F}}$ 成立, 可以得到

$$p_{45} = \sqrt{p_\alpha^2 + p_{23}^2 - 2p_\alpha p_{23}\cos\theta''} \leqslant 2p_{\mathrm{F}} \tag{4.5.83}$$

于是 $\cos\theta''$ 的积分区间为

$$1 \geqslant \cos\theta'' \geqslant \frac{p_\alpha^2 + p_{23}^2 - 4p_{\mathrm{F}}^2}{2p_\alpha p_{23}} \equiv \gamma \tag{4.5.84}$$

可以证明 $\gamma \leqslant -1$ 是不可能的. 因为当 $\gamma \leqslant -1$ 时, 由 (4.5.84) 式得到 $p_\alpha + p_{23} \leqslant 2p_{\mathrm{F}}$, 已知 $p_\alpha > 2p_{\mathrm{F}}$ 永远成立. 所以 $\cos\theta''$ 的积分区域为

$$\gamma \leqslant \cos\theta'' \leqslant 1 \tag{4.5.85}$$

$\cos\theta''$ 有积分域的条件为 $\gamma < 1$, 由此得到 p_{23} 必须满足 $p_{23} > p_\alpha - 2p_{\mathrm{F}}$, 因此, 可以把对 $\boldsymbol{p}_{23}$ 的积分限具体写出为

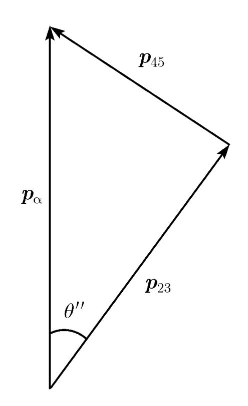


图 4.31　$\boldsymbol{p}_{23}$, $\boldsymbol{p}_{45}$ 合成 $\boldsymbol{p}_\alpha$ 的矢量关系示意图

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{23} = \int_{p_\alpha - 2p_{\mathrm{F}}}^{2p_{\mathrm{F}}} p_{23}^2 \mathrm{d}p_{23} \int_\gamma^1 \mathrm{d}\cos\theta'' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \tag{4.5.86}$$

为方便, 引入量纲为一表示 $\boldsymbol{x}_b=\boldsymbol{p}/p_{\mathrm{F}}$, $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{p}_1/p_{\mathrm{F}}$, $\boldsymbol{x}_{23}=\boldsymbol{p}_{23}/p_{\mathrm{F}}$, $\boldsymbol{x}_{45}=\boldsymbol{p}_{45}/p_{\mathrm{F}}$ 以及 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{p}_\alpha/p_{\mathrm{F}}$ 和 $t=\cos\theta''$. 由于归一化表示中可以忽略常数因子, 角度因子表示为

$$A(n,\varepsilon,\Omega)=\iiint\limits_{[1,4]}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1\mathrm{d}\boldsymbol{y}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{23}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{45}\delta(\boldsymbol{x}_b-\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y})\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_{23}-\boldsymbol{x}_{45})$$
$$\times(16-12x_{23}+x_{23}^3)(16-12x_{45}+x_{45}^3)\tau(n,\Omega) \tag{4.5.87}$$

在 (4.5.87) 式中引入一个值为 1 的因子 $\int\mathrm{d}\boldsymbol{y}\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_{23}-\boldsymbol{x}_{45})$. 利用 (4.5.87) 式中第二个 δ 函数, 可以把 $\boldsymbol{x}_{45}$ 由 $\boldsymbol{x}_{23}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 表示出来, 完成对 t 的积分后得到

$$\frac{1}{5x_{23}y}\{(x_{23}-2)^2(x_{23}+4)(2+x_{23}-y)^3[4+x_{23}^2+6y+y^2-2x_{23}(3+y)]\}$$

再完成 (4.5.87) 式中对 x_{23} 的积分, 角度因子可以表示为

$$A(n,\varepsilon,\Omega)=\iiint\limits_{[1,4]}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1\mathrm{d}\boldsymbol{y}\delta(\boldsymbol{x}_b-\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y})\frac{Z_b(y)}{6300}\tau(n,\Omega_1) \tag{4.5.88}$$

其中 $Z_b(y)=(y-4)^6(-144+224y+156y^2+24y^3+y^4)/y$, 再利用引入的 δ 函数, 可以消去对 $\boldsymbol{y}$ 的积分. 这时变量 y 需要用 $\boldsymbol{x}_b$ 和 $\boldsymbol{x}_1$ 表示出来. 用 Θ 表示 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 之间的夹角, 于是有

$$y=\sqrt{x_b^2+x_1^2-2x_bx_1\cos\Theta}\leqslant 4 \tag{4.5.89}$$

p_1 为费米面上的粒子, x_1 的积分区域为

$$\max\{x_{\mathrm{F}},x_b-4x_{\mathrm{F}}\}\leqslant x_1\leqslant x_{\mathrm{F}}\sqrt{1+E/\varepsilon_{\mathrm{F}}} \tag{4.5.90}$$

在得到 x_1 的积分区域之后, 由 (4.5.89) 式可以得到 $\cos\Theta$ 的积分区域:

$$\frac{x_b^2+x_1^2-16}{2x_bx_1}\leqslant\cos\Theta\leqslant 1 \tag{4.5.91}$$

θ_1 是 $\boldsymbol{p}_1$ 与中子入射方向 $\boldsymbol{k}$ 的夹角, (θ,φ) 是 $\boldsymbol{p}$ 在以 $\boldsymbol{k}$ 为 Z 轴的质心系中的立体角. 在以 $\boldsymbol{p}$ 为 Z 轴的新坐标系中, (Θ,Φ) 是 $\boldsymbol{p}_1$ 的立体角, (θ,ϕ) 是 $\boldsymbol{k}$ 的立体角 (ϕ 和 φ 是两个不同的方位角). 于是, 新坐标系中, 应用前面介绍的 Legendre 多项式的求和公式 (4.5.11), 在以 $\boldsymbol{p}$ 为 Z 轴的新坐标系中, 对 $\boldsymbol{p}_1$ 的积分可以代换为 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1=x_1^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}\cos\Theta\mathrm{d}\Phi$, 对 Φ 积分后, 得到 ^{5}He 发射的归一化角度因子 Legendre 展开的最终表示可以写成

$$A(n,\varepsilon,\Omega)=\frac{1}{4\pi}\sum_l(2l+1)\frac{\tau_l(n)}{\tau_0(n)}\frac{G_l(\varepsilon,n)}{G_0(\varepsilon,n)}P_l(\cos\theta) \tag{4.5.92}$$

利用 (4.5.89) 式, 将对 $\cos\varTheta$ 的积分变换为对 y 的积分, 即

$$\mathrm{d}\cos\varTheta=-\frac{y}{x_bx_1}\mathrm{d}y \tag{4.5.93}$$

由 (4.5.89) 和 (4.5.91) 式可以得到 y 的积分区间为 $x_b-x_1\leqslant y\leqslant 4$, 于是, ^{5}He 发射角度因子中的几何因子可以表示为

$$G_l(\varepsilon)=\frac{1}{x_b}\int_{\max\{1,x_b-4\}}^{\sqrt{1+E/\varepsilon_{\mathrm{F}}}}x_1\mathrm{d}x_1\int_{x_5-x_1}^{4}\mathrm{d}yZ_5(y)P_l\left(\frac{x_b^2+x_1^2-y^2}{2x_bx_1}\right) \tag{4.5.94}$$

4.5.6 复杂粒子发射双微分截面的综合讨论

上面得到了各种复杂粒子发射的双微分截面理论公式. 由此可以用下面统一的表示给出

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon\mathrm{d}\varOmega}=\sum_n\frac{\mathrm{d}\sigma(n)}{\mathrm{d}\varepsilon}A(n,\varepsilon,\varOmega) \tag{4.5.95}$$

其中角度因子统一表示为

$$A(n,\varepsilon,\varOmega)=\frac{1}{4\pi}\sum_l(2l+1)\frac{G_l(\varepsilon,n)}{G_0(\varepsilon,n)}\frac{\tau_l(n,\varepsilon)}{\tau_0(n,\varepsilon)}P_l(\cos\theta) \tag{4.5.96}$$

$\tau_l(n,\varepsilon)$ 是由激子模型计算得到的 n 激子态发射粒子能量为 ε 的 l 分波寿命, 而由出射单粒子拾取费米海中几个核子产生的几何因子一般可表示为

$$G_l^b(\varepsilon_b)=\frac{1}{x_b}\int_{\max\{1,x_b-A_b+1\}}^{\sqrt{1+E/\varepsilon_{\mathrm{F}}}}x_1\mathrm{d}x_1\int_{x_b-x_1}^{A_b-1}\mathrm{d}yZ_b(y)P_l(\cos\varTheta) \tag{4.5.97}$$

其中 $Z_b(y)$ 因子可统一表示为

$$Z_b(y)=\begin{cases}y, & b=\mathrm{d}\\ y(y-2)^2(y+4), & b=\mathrm{t},{}^3\mathrm{He}\\ (y-3)^4\left(y^3+12y^2+27y-6\right), & b=\alpha\\ (y-4)^6(y^4+24y^3+156y^2+224y-144), & b={}^5\mathrm{He}\end{cases} \tag{4.5.98}$$

由于单核子发射角度因子中的几何因子为 1, 由此可见几何因子 $G_l(\varepsilon)$ 是出射单核子拾取费米面下几个核子导至的复杂粒子发射角度变化的效应.

为了比较不同的复杂粒子在不同发射能量情况下几何因子的数值, 以 $\mathrm{n}+{}^{14}\mathrm{N}$ 为例, 计算了中子入射能量分别在 15MeV, 20MeV 情况下, 由复合核经组态 $[1,m]$ 发射五种复杂粒子 $\mathrm{d},\mathrm{t},{}^3\mathrm{He}$,α 和 ^{5}He 后剩余核处于基态时, 几何因子随分波数 $l=1,2,3,4$ 的变化情况.

由于发射粒子后剩余核处于分立能级, 因而复杂粒子的发射能量 ε_b 是一确定值. 这时双微分截面计算可以简化为角分布计算. 费米能量取为 $\varepsilon_{\rm F}=30{\rm MeV}$, 在 $\rm n+{}^{14}N$ 反应中的入射中子的结合能为 $B_{\rm n}=10.833{\rm MeV}$, 计算中所用参数由表 4.12 给出.

表 4.12 $\mathbf{n+{}^{14}N}$ 反应中各种复杂粒子的结合能和谐振子曲率参数/MeV

复杂粒子	d	^{3}He	t	α	^{5}He
B_b	16.160	28.199	14.849	10.991	23.339
$\hbar\omega_b$	8.1	11.7	14.4	18.2	7.47

注：表中结合能 B_b 和谐振子曲率参数 $\hbar\omega_b$.

应用 UNF 程序 (Zhang, 2002) 可以计算与分波寿命有关的因子 $\tau_l(n)/\tau_0(n)$, 用来表征核反应系统的预平衡发射特征. 对于 $n=3$ 激子态, 中子入射能量分别为 $E_{\rm n}=15{\rm MeV}$, 20MeV, 分波寿命比例因子 $\tau_l(n)/\tau_0(n)$ 的计算结果由表 4.13 给出. 由该表可以看出, 入射中子能量越高, $\tau_{l=1}(n)/\tau_0(n)$ 越大, 表明单粒子发射的朝前性越强.

表 4.13 $\mathbf{n+{}^{14}N}$ 反应的 $\tau_l(n=3)/\tau_0(n=3)$ 计算结果

$E_{\rm n}$/MeV	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$
15	0.5110	0.1266	0.0517	0.0583
20	0.5297	0.1338	0.0322	0.0374

由公式 (4.5.99) 可以计算各几何因子 $G_l(\varepsilon_b)/G_0(\varepsilon_b)$ 值结果由表 4.14 给出, 表中 p/A_b 表示复杂粒子中每个核子的平均动量值.

由于复杂粒子发射中包含了从费米海中拾取的核子, 而费米海中核子的运动是各向同性的, 由表 4.14 可以看出, 所有几何因子都小于 1, 这就使得复杂粒子发射的朝前性减弱. 同样表明, 出射的复杂粒子发射朝前性的强弱主要取决于复杂粒子集团中每个核子的平均动量 p/A_b 值的大小, p/A_b 值越大, 朝前性会越强, 当然还取决于复杂粒子角度因子中 $Z_b(y)$ 的形式. 表 4.14 给出的计算结果表明了这个事实, 氘核的 p/A_b 最大, 朝前性最强, α 粒子的 p/A_b 最小, 朝前性最弱. 由于 ^{5}He 发射的结合能比 α 粒子的结合能要大, 谐振子势阱的曲率明显比 α 集团的小, 因而 ^{5}He 发射的观测能量比较大, 使得 ^{5}He 核中每个核子动量要比 α 集团的大, 因而 ^{5}He 发射的朝前性要比发射 α 集团的大.

另一方面, 对于每种复杂粒子, 出射能量越低, 朝前性就越弱, 这是由于在预平衡发射过程中拾取费米海下的出射单粒子发射的朝前性小所致.

以上是复杂粒子出射的双微分截面的理论公式研究结果, 是建立在预平衡核反应的拾取机制之上, 由满足动量守恒这一物理因素的基础上得到的理论公式. 目前

表 4.14 $n + {}^{14}N$ 反应的 $G_l(\varepsilon_b)/G_0(\varepsilon_b)$ 计算结果

E_n/MeV	b	p/A_b	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$
15	d	1.137	0.9917	0.9753	0.9511	0.9194
	^{3}He	1.043	0.9796	0.9397	0.8825	0.8106
	t	1.007	0.9688	0.9089	0.8247	0.7225
	α	0.914	0.9432	0.8380	0.6994	0.5457
	^{5}He	0.992	0.9748	0.9261	0.8572	0.7724
20	d	1.167	0.9925	0.9775	0.9554	0.9266
	^{3}He	1.063	0.9810	0.9439	0.8904	0.8230
	t	1.027	0.9711	0.9155	0.8369	0.7409
	α	0.929	0.9471	0.8485	0.7175	0.5703
	^{5}He	1.002	0.9758	0.9291	0.8627	0.7809

在低能核反应中, 复杂粒子出射双微分截面的实验测量数据非常少, 这对进一步细致深入地进行理论研究也造成一定的局限性. 需要说明的是, 由于复杂粒子都是带电粒子, 从实用角度来看, 由于库仑相互作用, 对复杂粒子的双微分截面数据的需求远不如像对出射中子那样敏感.

参 考 文 献

丁大钊, 叶春堂, 赵志祥, 等. 2005. 中子物理学 —— 原理, 方法与应用. 北京: 原子能出版社.

朗道, 栗佛席兹. 统计物理学. 杨训恺, 等, 译. 北京: 人民教育出版社. 1964.

王竹溪, 郭敦仁. 1965. 特殊函数论. 北京: 科学出版社.

Baba M, et al. 1985. Scattering of 14.2 MeV neutron from B-10,B11, C,N,O F and Si. Conf. Nuclear Data for Basic and Applied Science, Santa Fe 1: 223.

Clendenning N K. 1983. Direct nuclear reactions. Academic Press: 45.

Duan J F, Yan L Y, Zhang J S. 2004. Pre-formation probability of ^{5}He cluster in pre-equilibrium mechanism. Commun. Theor. Phys., 42: 587-593.

Fu C Y. 1988. Approximation of pre-equilibrium effect in Hauser-Feshbach codes for calculating double-differential (n,xn) cross sections. Nucl. Sci. Eng., 100: 61-78.

Grimes S M. 1979. Measurements of double-differential cross sections of emitted charged particles in neutron induced reactions at 14.8 MeV. Phys. Rev. C, 19: 217.

Iwamoto A, Harada K. 1982. Mechanism of cluster emission in nucleon-induced pre-equilibrium reactions. Phys. Rev. C, 26: 1821.

Kalbach C. 1987. Systematics of continuum distributions: Extensions to higher energies. LA-UR-87-4139.

Newton J O, et al. 2004. Phys. Rev. C, 70: 024605.

Satchler G R. 1983. Direct nuclrar reaction. Clareendon Press-Oxford: 264.

Satchler G R. 1964. The distorted-waves theory of nuclrar reaction wit spin-orbit effets. Nucl. Phys., 55: 1.

Sato K, Iwamoto A, Harada K. 1983. Pre-equilibruim emission of light composite particle in framework of the exciton model. Phys. Rev. C, 28: 1527.

Turk M, Antolkovic B. 1984. Multiparticle break-up of ^{10}B induced by fast neutrons. Nucl. Phys., A431: 381-392.

Wang J M, Duan J F, Yang Y L, et al. 2006. ^{5}He emission in neutron–induced ^{10}B reactions. Commun. Theor. Phys., 46: 527-532.

Wolschin G. 1982. Equilibration in dissipative nuclear collision. Phys. Rev. Lett., 48: 1004.

Yan Y L, Duan J F, Zhang J S, et al. 2005. Double-differential cross section of ^{5}He emission. Commun. Theor. Phys., 43: 298-304.

Young P G, Arthur E D, Chadwick M B. 1996. Comprehensive nuclear model calculation: Theory and use of GNASH code. LA-UR-96-3739.

Zhang J S, Wolschin G. 1983. Occupation of the reduced occcupation-number equation for fermion system. Z. Phys. A, 311: 177.

Zhang J S, Wen Y Q, Wang S N, et al. 1988. Formation and emission of light particles in fast neutron induced reaction-a united compound pre-equilibrium model. Commun. Theor. Phys., 10: 33-44.

Zhang J S. 1990. The angular distribution of light particle projectile based on a semi-classical model. Commun. Theor. Phys., 14: 41-52.

Zhang J S, Yan S W, Wang C L. 1993a. The pick-up mechanism in composite particle emission processes. Z. Phys. A, 344: 251-258.

Zhang J S. 1993b. A unified hauser-feshbach and exciton model for calculating double-differential cross sections of neutron induced reactions below 20 MeV. Nucl. Sci. Eng., 114: 55-64.

Zhang J S. 1994a. A method for calculating double-differential cross sections of alpha-particle emissions. Nucl. Sci. Eng., 116: 35-41.

Zhang J S. 1994b. Improvement of computation on neutron induced helium gas production. Proc. Int. Conf. Nuclear Data for Science and Technology, Gatlinburg, Tennessee, May 9-13 1994, 2: 932.

Zhang J S, Zhou S J. 1996. E-dependent pre-formation probability of composite particles. Chin. J. of Nucl. Phys., 18: 28.

Zhang J S. 2002. UNF code for fast neutron reaction data calculations. Nucl. Sci. Eng., 142: 207.

Zhang J S. 2004. Possibility of ^{5}He emission in neutron induced reactions. Science in China G. 47: 137-145.

Zhang J S, Wang J M, Duan J F. 2007. Exciton dependent preformation probability of composite particles. Commun. Theor. Phys., 48: 33-44.

第 5 章　轻核反应的运动学

5.1　引　　言

在核反应理论中, 描述核反应过程的反应机制当然是最重要的物理内容之一. 另一方面, 由于在核反应过程中, 必须遵守能量、角动量和宇称守恒定律. 因此, 为描述好核反应过程, 核反应运动学也很重要. 以前已经推导出了从连续能级发射粒子后, 剩余核分别是处于连续能级及分立能级的运动学公式 (Zhang, 2002a, 2002b), 并应用到中子引发结构材料核和易裂变核素的全套数据的计算程序中 (Zhang, 2002a, 2005), 以严格保证双微分截面数据的能量平衡. 但在轻核反应中都是从复合核发射粒子到剩余核的分立能级, 以及分立能级之间的次级粒子发射过程, 因而轻核反应中不用考虑连续能级, 也不需要能级密度这一类物理量. 为此需要建立适用于轻核反应, 包括有序粒子发射和无序粒子发射, 具有独特特征的运动学公式.

由于轻核的质量轻, 在轻核反应中发射粒子时反冲效应很强, 需要严格考虑发射各种粒子状态下的运动学. 这不仅可以保证整个核反应过程在质心系和实验室系中的能量平衡, 还可以准确地给出发射粒子能谱的形状与位置.

正如第 1 章所介绍的那样, 轻核反应过程的形态非常复杂, 其中包括了分立能级之间多个粒子的有序发射过程, 发射多粒子后剩余核的两体崩裂过程、三体崩裂过程, 以及直接三体崩裂过程等, 以及不同粒子发射顺序产生的粒子能谱彼此之间差异很大, 发射粒子的总谱是由几十个甚至上百个出射粒子分谱组成. 这些分谱的位置和形状需要由保证能量守恒的核反应运动学给出. 因此, 为了能够准确地给出每一个出射粒子分谱的位置和形状, 不仅需要考虑轻核反应的动力学过程, 而且还需严格地考虑核反应的运动学. 再现双微分截面实验测量数据, 轻核反应的运动学起着至关重要的作用.

正确地描述出射粒子的双微分截面, 可以为分析核反应过程提供更详细的信息. 研究表明, 虽然各种形态的出射粒子运动状态彼此差异很大, 除了一次粒子发射和直接三体崩裂核反应是一次核反应过程外, 还有多次粒子发射的过程. 尽管看起来十分复杂, 但是, 对其进行分析和归纳后, 发现无论什么复杂形态的多粒子发射过程都可以归入下面四类:

(1) 从分立能级到分立能级的发射过程, 记为 ($D\ to\ D$),

(2) 从连续谱到分立能级的发射过程, 记为 ($C\ to\ D$),

(3) 从分立能级到连续谱的发射过程, 记为 ($D\ to$ C),

(4) 从连续谱到连续谱的发射过程, 记为 (C to C).

前两个发射过程多用于多粒子的有序发射过程, 而后两个发射过程主要用于剩余核的三体崩裂过程, 因为三体崩裂过程的末态粒子发射谱是连续的.

下面先对一次粒子发射和直接三体崩裂过程给出其运动学公式. 然后, 在保证能量平衡的条件下, 再对上述四种类型的核反应过程给出多粒子发射的运动学公式. 双微分截面都是来自于多粒子发射过程. 事实上, 对于各种类型的核反应过程, 由运动学推导双微分截面公式的思路都比较简明, 但是具体推导过程却是很繁杂的.

由统计物理学的方法得知, 任何可观测物理量都是对分布函数的平均值. 因此, 在下面所有的公式推导过程中, 有关能量等物理量都是对已知的角分布和双微分截面的平均值.

本章主要考虑中子入射能量小于 30MeV 时有关的运动学公式. 当中子入射能量更高时, 还可能出现更多粒子发射的核反应过程. 但是, 只要掌握了本章的方法和要领, 沿着下面给出的运动学公式的推导方法和思路, 对于任何轻核反应过程都能得到满足能量平衡的双微分截面公式.

首先, 我们要给出粒子发射双微分截面在不同坐标系之间的关系. 下面需要用到三种坐标系. 其一是发射粒子后随剩余核运动的坐标系, 这在质心系中处于运动状态, 称之为剩余核运动系. 由于次级粒子都是从剩余核发射出去的, 与剩余核运动系有关的物理量用上标 “r” 标明. 其二是质心系, 一般理论计算都在质心系中进行, 与质心系有关的物理量用上标 “c” 标明. 最后, 由于所有实验测量都是在实验室系中进行的, 为了将理论计算值与实验测量结果做比较并给出能量平衡关系, 还需要第三种坐标系, 即实验室坐标系. 与实验室系有关的能量、角度等物理量用上标 “l” 标明.

粒子发射双微分截面在三种坐标系中的表示之间有着确定的转换关系. 实际上, 对于同一个粒子发射过程, 它们在不同坐标系中双微分截面应该有下面的关系存在

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon^r\mathrm{d}\Omega^r}\mathrm{d}\varepsilon^r\mathrm{d}\Omega^r = \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon^c\mathrm{d}\Omega^c}\mathrm{d}\varepsilon^c\mathrm{d}\Omega^c = \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon^l\mathrm{d}\Omega^l}\mathrm{d}\varepsilon^l\mathrm{d}\Omega^l \tag{5.1.1}$$

公式 (5.1.1) 表示双微分截面在各个坐标系中对能量、角度积分后应该得到同一个反应概率. 在不同坐标系中, 角度与能量之间有确定的关系存在, 它被称之为雅科比 (Jacobian) 变换关系. 这个关系式可以通过两个坐标系中的能量、角度关系得到, 例如在质心系与实验室系之间用球坐标分别写出这些关系, 然后具体计算各种偏微分量. 实验室系速度 $\boldsymbol{v}_l$ 和质心系速度 $\boldsymbol{v}_c$ 与角度的关系如图 5.1 所示.

由余旋定理得知, 实验室系的能量 ε^l 与质心系的能量 ε^c 和角度 θ^c 有以下关系:

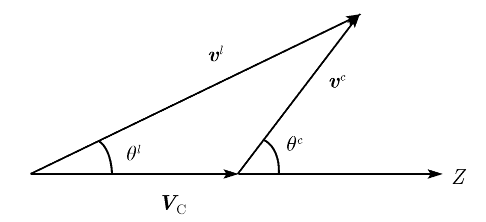


图 5.1　实验室系速度 $\boldsymbol{v}^l$ 和质心系速度 $\boldsymbol{v}^c$ 的关系示意图

$$\varepsilon^l=\varepsilon^c+2\beta\sqrt{\varepsilon^c}\cos\theta^c+\beta^2 \tag{5.1.2}$$

两种坐标系中速度在粒子入射方向投影的关系为

$$\boldsymbol{v}^l\cos\theta^l=V_\mathrm{C}+\boldsymbol{v}^c\cos\theta^c \tag{5.1.3}$$

进而得到实验室系与质心系中角度余弦之间的关系：

$$\cos\theta^l=\frac{\sqrt{\varepsilon^c}\cos\theta^c+\beta}{\sqrt{\varepsilon^c+2\beta\sqrt{\varepsilon^c}\cos\theta^c+\beta^2}} \tag{5.1.4}$$

这里

$$\beta\equiv\frac{\sqrt{m_\mathrm{n}m_bE_\mathrm{n}}}{M_\mathrm{C}} \tag{5.1.5}$$

m_n, m_b 和 M_C 分别为入射中子、出射粒子和复合核的质量, E_n 为实验室系中入射中子的能量. 通过 Jacobian 行列式可得到实验室系与质心系之间能量和立体角的关系, 利用 (5.1.2) 和 (5.1.4) 式可以得到 Jacobian 行列式中的导数值：

$$\mathrm{d}\varepsilon^l\mathrm{d}\Omega^l=\begin{vmatrix}\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon^l}{\mathrm{d}\varepsilon^c} & \dfrac{\mathrm{d}\varepsilon^l}{\mathrm{d}\cos\theta^c}\\ \dfrac{\mathrm{d}\cos\theta^l}{\mathrm{d}\varepsilon^c} & \dfrac{\mathrm{d}\cos\theta^l}{\mathrm{d}\cos\theta^c}\end{vmatrix}\mathrm{d}\varepsilon^c\mathrm{d}\Omega^c=\sqrt{\frac{\varepsilon^c}{\varepsilon^l}}\mathrm{d}\varepsilon^c\mathrm{d}\Omega^c \tag{5.1.6}$$

由此就可得到实验室系中与质心系中的双微分截面之间的关系：

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon^l\mathrm{d}\Omega^l}=\sqrt{\frac{\varepsilon^l}{\varepsilon^c}}\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon^c\mathrm{d}\Omega^c} \tag{5.1.7}$$

同样可以得到质心系与剩余核运动系之间的 Jacobian 变换关系：

$$\mathrm{d}\varepsilon^c\mathrm{d}\Omega^c=\sqrt{\frac{\varepsilon^r}{\varepsilon^c}}\mathrm{d}\varepsilon^r\mathrm{d}\Omega^r \tag{5.1.8}$$

从而也可以得到质心系中与剩余核运动系中的双微分截面之间的关系：

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon^c\mathrm{d}\Omega^c}=\sqrt{\frac{\varepsilon^c}{\varepsilon^r}}\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon^r\mathrm{d}\Omega^r} \tag{5.1.9}$$

在理论计算中, 双微分截面是通常用下面形式的 Legendre 多项式展开方式给出的

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{4\pi}\sum_l (2l+1)f_l(\varepsilon)P_l(\cos\theta) \tag{5.1.10}$$

其中 $f_l(\varepsilon)$ 是在质心系中的 Legendre 展开系数, $P_l(\cos\theta)$ 是 Legendre 多项式, $f_0(\varepsilon)$ 是归一化的能谱, 归一化条件要求：

$$\int_{\varepsilon_{\min}}^{\varepsilon_{\max}} f_0(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = 1 \tag{5.1.11}$$

下面给出本章中所用的物理量的含义：

M_{T} 表示靶核质量;

M_{C} 表示复合核质量;

E_{n} 表示在实验室系中的中子入射能量;

m_{n} 表示中子的质量;

B_{n} 表示中子在复合核中的结合能;

E^* 表示复合核激发能;

B_1 和 B_2 分别表示发射第一个粒子和第二个粒子的结合能;

m_1 和 M_1 分别表示发射第一个粒子的质量和剩余核的质量;

m_2 和 M_2 分别表示发射第二个粒子的质量和剩余核的质量;

ε_1 和 E_1 分别表示发射第一个粒子的能量和剩余核的能量;

ε_2 和 E_2 分别表示发射第二个粒子的能量和剩余核的能量.

$f_l^c(m_1), f_l^c(M_1)$ 分别表示在质心系中第一个发射粒子 l 分波的 Legendre 系数和其剩余核 l 分波的 Legendre 系数, 在质心系中它们之间有如下关系：

$$f_l^c(M_1) = (-1)^l f_l^c(m_1) \tag{5.1.12}$$

这表示, 在质心系中, 剩余核运动的方向与粒子发射的方向正好相反, 如果粒子在质心系中的发射角用 θ^c 表示, 对应的剩余反冲核的发射角就是 $\pi-\theta^c$, 因为 $\cos(\pi-\theta^c) = -\cos\theta^c$, 而 Legendre 多项式具有如下性质：

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x) \tag{5.1.13}$$

由 (1.1.1) 式已经给出复合核在实验室系中的运动速度. 下面各节中在得到质心系的双微分截面表示后, 在实验室系中的能量需要利用速度合成关系来计算, 即

$$E^l = \frac{m{v^l}^2}{2} = \frac{m}{2}(\boldsymbol{V}_{\mathrm{C}} + \boldsymbol{v}^c)^2 \tag{5.1.14}$$

(5.1.14) 式中不仅含有质心运动能量和质心系中发射粒子的能量, 还含有依赖 $\boldsymbol{v}^c$ 和 $\boldsymbol{V}_{\rm C}$ 夹角的相干项. 从下面的公式推导中可以看到, 这个相干项对能量平衡起到很重要的作用. 我们将在第二节和第三节给出核反应一次过程的运动学公式, 它包含一次粒子发射和直接三体崩裂过程, 后者属于非有序的粒子发射过程. 在后面的四节中将给出上述四类多次粒子发射过程的运动学公式. 核反应运动学与粒子发射是平衡态或预平衡态无关.

由于动物和人体组织中含有大量的碳、氧、氮, 它们都属于轻核, 所以轻核的核反应数据在核医学中也有重要应用价值. 在中子治癌的核医学应用中, 需要知道中子与这些轻核反应的截面及核反应过程中所释放的能量, 以保证治疗过程的剂量安全. 另外, 核反应堆中能量的沉积对燃料元件、结构材料的安全和寿命也都有重要影响. 因此, 在本章最后一节我们将对核反应中的与各类粒子能量释放有关的 Kerma 系数做了简介.

5.2 一次粒子发射过程

当中子轰击靶核形成复合核之后, 可以通过预平衡机制和平衡态机制发射各种粒子, 也包括发射 γ 光子的退激过程. 对于低能轻核反应, 复合核发射粒子后剩余核是处于分立能级, 因此一次粒子发射有简单的表示. 一次粒子发射的能量和剩余核能量在质心系中的关系如图 5.2 所示.

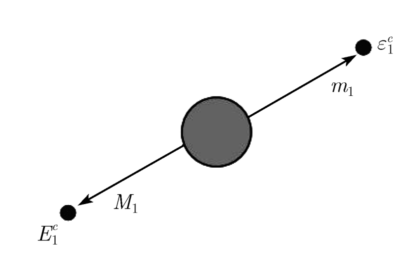


图 5.2 质心系中一次粒子发射能量 ε_1^c 和剩余核能量 E_1^c 的关系示意图

如果一次粒子发射后剩余核处在第 k_1 分立能级, 考虑到剩余核的反冲效应以及发射粒子在母核中的结合能, 以及在质心系中总动量为 0 等因素, 在质心系中一次粒子发射和剩余核的反冲动能具有确定的能量:

$$\varepsilon_1^c = \frac{M_1}{M_{\rm C}}(E^* - B_1 - E_{k_1}), \quad E_1^c = \frac{m_1}{M_{\rm C}}(E^* - B_1 - E_{k_1}) \tag{5.2.1}$$

一次发射粒子在质心系中的归一化角分布在标准形式下表示为

$$\frac{{\rm d}\sigma}{{\rm d}\Omega^c} = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} f_l^c(m_1) P_l(\cos\theta^c) \tag{5.2.2}$$

利用速度合成关系, 利用非相对论中能量与速度的关系, 可以得到从实验室系中一次粒子发射能量对出射角的平均结果为

$$\bar{\varepsilon}_1^l = \int \frac{1}{2} m_1 (\boldsymbol{V}_{\rm C} + \boldsymbol{v}_c)^2 \frac{{\rm d}\sigma}{{\rm d}\Omega^c} {\rm d}\Omega^c = \frac{m_1 m_{\rm n} E_{\rm n}}{M_{\rm C}^2} + \varepsilon_1^c + 2\frac{\sqrt{m_1 m_{\rm n} E_{\rm n} \varepsilon_1^c}}{M_{\rm C}} f_1^c(m_1) \tag{5.2.3}$$

实验室系中一次粒子发射后剩余核能量对出射角的平均结果为

$$\bar{E}_1^l = \frac{M_1 m_{\rm n} E_{\rm n}}{M_{\rm C}^2} + E_1^c - 2\frac{M_1}{M_{\rm C}}\sqrt{\frac{m_{\rm n} E_{\rm n} E_1^c}{M_1}} f_1^c(m_1) \tag{5.2.4}$$

再由质心系中的动量守恒可以得到反冲能量与粒子发射能量之间的关系：

$$E_1^c = \frac{m_1}{M_1}\varepsilon_1^c \tag{5.2.5}$$

得到

$$\bar{E}_1^l = \frac{M_1 m_{\rm n} E_{\rm n}}{M_{\rm C}^2} + \frac{m_1}{M_1}\varepsilon_1^c - 2\frac{\sqrt{m_1 m_{\rm n} E_{\rm n}\varepsilon_1^c}}{M_{\rm C}} f_1^c(m_1) \tag{5.2.6}$$

因此一次发射粒子的能量与剩余核能量之和是

$$\bar{\varepsilon}_1^l + \bar{E}_1^l = \frac{m_{\rm n} E_{\rm n}}{M_{\rm C}} + \varepsilon_1^c + E_1^c = \frac{m_{\rm n} E_{\rm n}}{M_{\rm C}} + E^* - B_1 - E_{k_1} \tag{5.2.7}$$

这里利用了核反应前后的质量关系 $m_1 + M_1 = M_{\rm C} = m_{\rm n} + M_{\rm T}$. 这里需要特别强调的是, 由爱因斯坦的质能关系得知, 在核反应的过程中质量是不守恒, 反应前后存在着质量亏损, 而质量亏损对于核的质量而言是一个很小的量, 但这决不意味着核反应中质量保持守恒, 而造成对爱因斯坦质能关系的误解. 在以下的运动学公式推导中都用质量数来代替核质量, 就不会出现上述问题, 下面不再一一阐明.

如果在一次粒子发射后, 剩余核的 k_1 分立能级是以 γ 退激过程来结束反应, 则 γ 射线带走的能量就是 E_{k_1}. 应用 (1.1.3) 式给出的激发能公式, 由 (5.2.7) 式, 就得到在实验室系中所有粒子发射能量的总和为

$$\bar{\varepsilon}_1^l + \bar{E}_1^l + E_{k_1} = E_{\rm n} + B_{\rm n} - B_1 = E_{\rm n} + Q_1 \tag{5.2.8}$$

其中

$$Q_1 \equiv B_{\rm n} - B_1 \tag{5.2.9}$$

是一次粒子发射核反应过程的 Q 值. 于是严格证明了在实验室系中的能量平衡.

上述公式适用于非弹性散射 $({\rm n,n'})$, 以及 $({\rm n,p})$, $({\rm n},\alpha)$, $({\rm n,d})$, $({\rm n,t})$ 等核反应核反应一次粒子发射过程, 它们都是发射一个粒子后, 剩余核的分立能级是通过发射 γ 光子退激的方式来结束核反应过程.

这里需要指出的是, 在质心系中预平衡阶段发射的粒子具有朝前性. 例如, 对于 $^6{\rm Li(n,t)}\alpha$ 反应, 其中 t 的质量较轻, 但结合得松散, 均方根半径比 α 粒子的大, 而 α 粒子质量较重, 但结合得紧密, 那么在质心系中, 究竟谁是发射粒子, 谁是剩余核, 在理论上难以判断清楚. 但是, 实验测量表明, 在质心系中仍然是 t 发射具有朝前性. 因此, 在以后所有的反应道中, 总是将质量轻的粒子作为发射粒子, 而质量重的核作为剩余核. 除非两个核质量完全相同.

5.3 直接三体崩裂

在第 1 章中已经指出, 一些轻核在中子诱导的核反应中存在直接三体崩裂过程, 例如,

$$\mathrm{n} + {}^{9}\mathrm{Be} \to {}^{10}\mathrm{Be} \to \mathrm{n} + \mathrm{n} + {}^{8}\mathrm{Be}, \quad Q_3 = E^* + Q, \quad Q = -8.477\,\mathrm{MeV} \tag{5.3.1}$$

和

$$\mathrm{n} + {}^{6}\mathrm{Li} \to {}^{7}\mathrm{Li} \to \mathrm{n} + \mathrm{d} + \alpha, \quad Q_3 = E^* + Q, \quad Q = -8.725\,\mathrm{MeV} \tag{5.3.2}$$

这里 Q 是三体崩裂过程需要克服的结合能, 也就是三体崩裂的反应 Q 值. 由于 $Q < 0$, 这就意味着上述直接三体崩裂过程必须要有足够高的激发能, 即必须 $E^* + Q > 0$ 时才能发生, 这是有阈的核反应过程. 而 Q_3 是三体崩裂反应过程中释放的能量. 由 $Q_3 = 0$ 可以得到上述直接三体崩裂反应的阈能. 对 $\mathrm{n} + {}^{6}\mathrm{Li} \to \mathrm{n} + \mathrm{d} + \alpha$ 三体崩裂反应的阈能是 $E_{\mathrm{th}} = 1.722\mathrm{MeV}$, 对 $\mathrm{n} + {}^{9}\mathrm{Be} \to \mathrm{n} + \mathrm{n} + \mathrm{Be}^{8}$ 三体崩裂反应的阈能是 $E_{\mathrm{th}} = 1.851\mathrm{MeV}$. 轻核反应中存在的三体崩裂过程是典型的粒子非有序发射行为, 是轻核反应与中重核反应的重要区别之一.

Ohlson 在 1965 年首先对三体崩裂过程的运动学进行了理论研究 (Ohlson, 1965). 如果记三个崩裂粒子的质量分别为 m_a, m_b, m_c, 它们满足的质量关系为

$$m_a + m_b + m_c = M_{\mathrm{C}} \tag{5.3.3}$$

1982 年 Fuchs 通过对不可观测变量的积分解释了 Ohlson 的推导 (Fuchs, 1982), 后来 Meijer 和 Kamermens 又用 He 作为入射粒子, 研究了三体崩裂过程 (Meijer et al., 1985). 对于三体运动而言, 有 9 个自由度. 但是, 由于动量守恒和能量守恒, 加入了 4 个限制条件, 使得独立的自由度减少到 5 个. 三体崩裂的能量守恒关系式为

$$\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c = Q_3 \tag{5.3.4}$$

在质心系中, 动量守恒条件为

$$\boldsymbol{p}_a + \boldsymbol{p}_b + \boldsymbol{p}_c = 0 \tag{5.3.5}$$

这个动量关系式由图 5.3 给出. 因此, 在三微分谱的理论公式中, 仅有 5 个独立的自由度, 而其他 4 个自由度可以由这 5 个独立的自由度确定. 在我们的研究中选 a 粒子的 3 个自由度 $(\theta_a, \varphi_a, \varepsilon_a)$, 和 b 粒子的两个自由度 (θ_b, φ_b) 为独立变量.

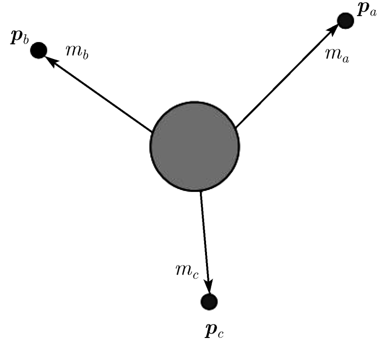


图 5.3 三体崩裂过程中动量 $\boldsymbol{p}_a$, $\boldsymbol{p}_b$, $\boldsymbol{p}_c$ 的示意图

从动量守恒条件得到

$$\boldsymbol{p}_c = -\boldsymbol{p}_a - \boldsymbol{p}_b \tag{5.3.6}$$

因此 c 粒子的能量可以由 a 和 b 粒子的能量来表示, 如果 a 和 b 粒子之间夹角为 θ_{ab}, 则有下面等式成立:

$$\varepsilon_c = \frac{p_c^2}{2m_c} = \frac{(\boldsymbol{p}_a + \boldsymbol{p}_b)^2}{2m_c} = \frac{p_a^2 + p_b^2 + 2p_a p_b \cos\theta_{ab}}{2m_c} \tag{5.3.7}$$

用能量替换动量, (5.3.7) 式被改写为

$$\varepsilon_c = \frac{m_a \varepsilon_a}{m_c} + \frac{m_b \varepsilon_b}{m_c} + \frac{2}{m_c}\sqrt{m_a m_b \varepsilon_a \varepsilon_b}\cos\theta_{ab} \tag{5.3.8}$$

另外, 由能量守恒关系式可以得到

$$\varepsilon_c = Q_3 - \varepsilon_a - \varepsilon_b \tag{5.3.9}$$

由此可以得到如下的所谓 “Q 方程”:

$$\frac{1}{m_c}\left[\varepsilon_a(m_a + m_c) + \varepsilon_b(m_b + m_c) + 2\sqrt{m_a m_b \varepsilon_a \varepsilon_b}\cos\theta_{ab}\right] = Q_3 \tag{5.3.10}$$

它给出了能量 ε_b 与 ε_a 的关系. a 粒子和 b 粒子的夹角与它们各自的角度之间有如下关系:

$$\cos\theta_{ab} = \cos\theta_a \cos\theta_b + \sin\theta_a \sin\theta_b \cos(\varphi_a - \varphi_b) \tag{5.3.11}$$

在直接三体崩裂过程中, 三个出射粒子都是连续能谱. 因为三个粒子中总可能有一个粒子在质心系处于静止状态, 而其他两个粒子分别向相反方向飞行, 并满足动量和能量守恒. 所以直接三体崩裂的出射粒子能量的最小值一定为 0. 而一个出射粒子能量的最大值应该出现在该粒子向一定方向飞行, 而另外两个粒子同时向相反方向飞行的情况下. 以 a 粒子为例, 这时动量守恒要求:

$$p_a = p_b + p_c \tag{5.3.12}$$

这意味着在 Q 方程中 $\theta_{ab} = \pi$, 这时 Q 方程变为

$$\left[\varepsilon_a(m_a + m_c) + \varepsilon_b(m_b + m_c) - 2\sqrt{m_a m_b \varepsilon_a \varepsilon_b}\right] = m_c Q_3 \tag{5.3.13}$$

对 ε_b 求一次导数得到 $m_b + m_c - \sqrt{m_a m_b \varepsilon_a/\varepsilon_b} = 0$, 解出

$$\varepsilon_b = \frac{m_a m_b}{(m_b + m_c)^2}\varepsilon_a \tag{5.3.14}$$

再将 (5.3.14) 式对 ε_b 求导, 可以得到 (5.3.14) 式中给出的 ε_b 是最小值, 因而 ε_a 为最大值. 而将上面 (5.3.14) 式给出的极值 ε_b 代入 (5.3.13) 式, 从而求得 a 粒子出射能量 ε_a 的最大值为

$$\varepsilon_{a,\max} = \frac{m_b + m_c}{M_{\mathrm{C}}} Q_3 \tag{5.3.15}$$

同理得到 b 粒子和 c 粒子出射能量的最大值分别为

$$\varepsilon_{b,\max} = \frac{m_a + m_c}{M_{\mathrm{C}}} Q_3, \quad \varepsilon_{c,\max} = \frac{m_a + m_b}{M_{\mathrm{C}}} Q_3 \tag{5.3.16}$$

在直接三体崩裂过程中, 粒子出射的三微分截面谱可用理论公式表示为 (Ohlson, 1965)

$$\frac{\mathrm{d}^3\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_a \mathrm{d}\Omega_a \mathrm{d}\Omega_b} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{\mu_{\mathrm{in}}}{P_{\mathrm{in}}} |T_{ij}|^2 \rho_a(\varepsilon_a) \tag{5.3.17}$$

这里

$$\rho_a(\varepsilon_a) = \frac{m_a m_b m_c p_a p_b}{(2\pi\hbar)^6 \left[(m_b + m_c) + \dfrac{m_b (\boldsymbol{p}_a - \boldsymbol{P}) \cdot \boldsymbol{p}_b}{p_b^2} \right]} \tag{5.3.18}$$

其中, μ_{in} 是入射道的约化质量, P_{in} 是入射道的动量, $\boldsymbol{P}$ 是系统总动量, 在质心系中为 0. 三体过程的跃迁矩阵元 $|T_{ij}|$ 是与入射能有关的物理量, 如果将 $|T_{ij}|$ 在三体崩裂过程中当作常数, 上述三微分谱就是以 a 粒子的能量 ε_a、角度 Ω_a 以及 b 粒子角度 Ω_b 的纯粹统计谱.

由于在我们的研究中只关心三体崩裂过程中每个出射粒子的双微分谱, 不关心粒子发射的关联, 因此将上述三微分谱对 b 粒子的角度积分, 得到 a 粒子的双微分谱

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_a \mathrm{d}\Omega_a} = \int \frac{\mathrm{d}^3\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_a \mathrm{d}\Omega_a \mathrm{d}\Omega_b} \mathrm{d}\Omega_b \tag{5.3.19}$$

由 a 粒子和 b 粒子的能量关系可以得到 b 粒子的双微分谱:

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_b \mathrm{d}\Omega_b} = \int \frac{\mathrm{d}^3\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_a \mathrm{d}\Omega_a \mathrm{d}\Omega_b} \left| \frac{\mathrm{d}\varepsilon_a}{\mathrm{d}\varepsilon_b} \right| \mathrm{d}\Omega_a \tag{5.3.20}$$

把 (5.3.18) 式中的动量改用能量表示, 在质心系中得到

$$\rho_a(\varepsilon_a) = \frac{2 m_a m_b m_c \sqrt{\varepsilon_a \varepsilon_b}}{(2\pi\hbar)^6 \left[\dfrac{(m_b + m_c)}{\sqrt{m_a m_b}} + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b}} \cos\theta_{ab} \right]} \tag{5.3.21}$$

由 Q 方程得到

$$\cos\theta_{ab} = \frac{m_c Q_3 - \varepsilon_a (m_a + m_c) - \varepsilon_b (m_b + m_c)}{2\sqrt{m_a m_b \varepsilon_a \varepsilon_b}} \tag{5.3.22}$$

且有

$$-1 \leqslant \cos\theta_{ab} \leqslant 1 \tag{5.3.23}$$

将 (5.3.22) 式给出的 $\cos\theta_{ab}$ 代入 (5.3.21) 式, 得到

$$\rho_a(\varepsilon_a) = \frac{4m_a m_b m_c \sqrt{m_a m_b \varepsilon_a \varepsilon_b}\varepsilon_b}{(2\pi\hbar)^6 \left[m_c Q_3 + (m_b + m_c)\varepsilon_b - (m_a + m_c)\varepsilon_a\right]} \tag{5.3.24}$$

通过 (5.3.22) 式, 能够把对 b 粒子的角度微分转换为对它的能量微分, 即有如下关系:

$$\mathrm{d}\Omega_b = -2\pi d\cos\theta_{ab} = -2\pi \frac{\varepsilon_a(m_a + m_c) - \varepsilon_b(m_b + m_c) - m_c Q_3}{4\sqrt{m_a m_b \varepsilon_a \varepsilon_b}\varepsilon_b} \mathrm{d}\varepsilon_b \tag{5.3.25}$$

于是, 可将 (5.3.20) 对角度 Ω_b 的积分变为对能量 ε_b 的积分, 由 (5.3.24) 式可得

$$\int \rho_a(\varepsilon_a)\mathrm{d}\cos\theta_{ab} = \int \frac{4m_a m_b m_c \sqrt{m_a m_b \varepsilon_a \varepsilon_b}\varepsilon_b}{(2\pi\hbar)^6 \left[m_c Q_3 + (m_b + m_c)\varepsilon_b - (m_a + m_c)\varepsilon_a\right]} \mathrm{d}\cos\theta_{ab} \tag{5.3.26}$$

将 (5.3.25) 式代入 (5.3.26) 式, 可以简化为

$$\int \rho_a(\varepsilon_a)\mathrm{d}\cos\theta_{ab} = -\int \frac{m_a m_b m_c}{(2\pi\hbar)^6} \mathrm{d}\varepsilon_b \tag{5.3.27}$$

被积分函数与 ε_b 无关. 由于需要的是归一化能谱, 因此可以不关心公式 (5.3.27) 中的这些常数值. 由于我们仅需给出对 ε_b 积分的上下限, 它是由条件 $-1 \leqslant \cos\theta_{ab} \leqslant 1$ 来确定的.

首先, 当 $\cos\theta_{ab} = -1$ 时, Q 方程变为

$$\varepsilon_b(m_b + m_c) - 2\sqrt{m_a m_b \varepsilon_a \varepsilon_b} + \varepsilon_a(m_a + m_c) - m_c Q_3 = 0 \tag{5.3.28}$$

这个方程可以看成是 $\sqrt{\varepsilon_b}$ 的一元二次方程, 如果定义

$$A \equiv \sqrt{\frac{m_a m_b \varepsilon_a}{M_{\mathrm{C}}}}, \quad B \equiv \sqrt{m_c(\varepsilon_{a,\max} - \varepsilon_a)} \tag{5.3.29}$$

就可把 $\sqrt{\varepsilon_b}$ 的一元二次方程 (5.3.28) 的两个根写为

$$\sqrt{\varepsilon_b} = \sqrt{M_{\mathrm{C}}}(A \pm B)\Big/(m_b + m_c) \tag{5.3.30}$$

再定义

$$\xi \equiv \frac{m_c}{m_a + m_c} Q_3 \tag{5.3.31}$$

容易验证, 当 $\varepsilon_a = \xi$ 时, 有 $A = B$. 当 $\varepsilon_a > \xi$ 时, $A > B$; 而当 $\varepsilon_a < \xi$ 时, $A < B$. 由于需要 $\sqrt{\varepsilon_b} > 0$, 方程 (5.3.28) 的根 (5.3.30) 只可用于 $\varepsilon_a > \xi(A > B)$ 的情况.

再看当 $\cos\theta_{ab} = 1$ 时, Q 方程变为

$$\varepsilon_b(m_b + m_c) + 2\sqrt{m_a m_b \varepsilon_a \varepsilon_b} + \varepsilon_a(m_a + m_c) - m_c Q_3 = 0 \tag{5.3.32}$$

对于这个一元二次方程, $\sqrt{\varepsilon_b}$ 的两个根为

$$\sqrt{\varepsilon_b} = \frac{-\sqrt{m_a m_b \varepsilon_a} \pm \sqrt{M_{\mathrm{C}} m_c(\varepsilon_{a,\max} - \varepsilon_a)}}{m_b + m_c} \tag{5.3.33}$$

利用定义 (5.3.29) 可把一元二次方程 (5.3.32) 的两个根改写为

$$\sqrt{\varepsilon_b} = \sqrt{M_{\mathrm{C}}}(-A \pm B)\Big/(m_b + m_c) \tag{5.3.34}$$

由于需要 $\sqrt{\varepsilon_b} > 0$, 方程 (5.3.32) 的根只用于 $\varepsilon_a < \xi(A < B)$ 的情况. 这样一来, 对任意 $\cos\theta_{ab}$ 值, ε_b 取值范围应满足下面不等式:

$$\sqrt{M_{\mathrm{C}}}(A + B)\Big/(m_b + m_c) \geqslant \varepsilon_b \geqslant \sqrt{M_{\mathrm{C}}}(A - B)\Big/(m_b + m_c) \tag{5.3.35}$$

由这个不等式可以得到 ε_b 的积分上下限为

$$\sqrt{\varepsilon_{b,\min}} = \begin{cases} \sqrt{M_{\mathrm{C}}}(B - A)/(m_b + m_c), & \text{当 } 0 \leqslant \varepsilon_a \leqslant \xi \\ \sqrt{M_{\mathrm{C}}}(A - B)/(m_b + m_c), & \text{当 } \varepsilon_a \geqslant \xi \end{cases} \tag{5.3.36}$$

和

$$\sqrt{\varepsilon_{b,\max}} = \sqrt{M_{\mathrm{C}}}(A + B)\Big/(m_b + m_c) \tag{5.3.37}$$

因此, (5.3.27) 式对 ε_b 积分后得到三体崩裂中 a 粒子的能谱形式为

$$\frac{1}{2}\int_{\varepsilon_{b,\min}}^{\varepsilon_{b,\max}} d\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_{b,\max} - \varepsilon_{b,\min}}{2} = \frac{2ABM_{\mathrm{C}}}{(m_a + m_c)^2} = 2\frac{\sqrt{m_a m_b m_c M_{\mathrm{C}}}}{(m_a + m_c)^2}\sqrt{\varepsilon_a(\varepsilon_{a,\max} - \varepsilon_a)} \tag{5.3.38}$$

在不考虑粒子发射关联时, 仅对一个出射粒子而言, 直接三体崩裂的粒子谱在质心系中是各向同性的, 于是粒子 a 的归一化双微分截面可以简单地表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_a \mathrm{d}\Omega_a} = \frac{S(\varepsilon_a)}{4\pi} \tag{5.3.39}$$

其归一化能谱的表示为 (Ohlson, 1965)

$$S(\varepsilon_a) = \frac{8}{\pi\varepsilon_{a,\max}^2}\sqrt{\varepsilon_a(\varepsilon_{a,\max} - \varepsilon_a)} \tag{5.3.40}$$

对其他两个粒子 b 和 c, 其双微分截面可用同样的形式给出:

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_b \mathrm{d}\Omega_b} = \frac{S(\varepsilon_b)}{4\pi}, \quad \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_c \mathrm{d}\Omega_c} = \frac{S(\varepsilon_c)}{4\pi} \tag{5.3.41}$$

它们的归一化能谱分别表示为

$$S(\varepsilon_b)=\frac{8}{\pi\varepsilon_{b,\max}^2}\sqrt{\varepsilon_b(\varepsilon_{b,\max}-\varepsilon_b)},\quad S(\varepsilon_c)=\frac{8}{\pi\varepsilon_{c,\max}^2}\sqrt{\varepsilon_c(\varepsilon_{c,\max}-\varepsilon_c)} \tag{5.3.42}$$

图 5.4 给出了直接三体崩裂的能谱曲线.

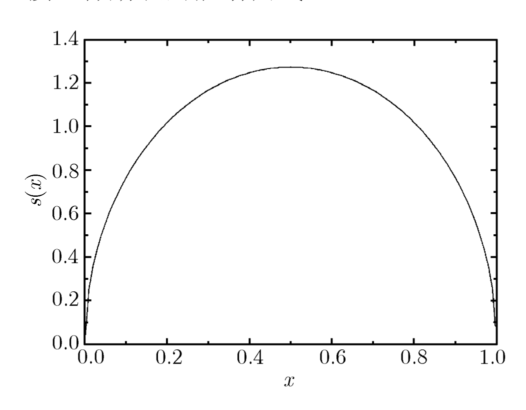


图 5.4 直接三体崩裂的能谱图

图 5.4 中 $x=\varepsilon_a/\varepsilon_{a,\max}$. 下面对这个谱的归一性进行验证. 将对 ε_a 的积分变为对 x 的积分, 于是对能谱 $S(\varepsilon_a)$ 的积分便可表示为 B 函数 (王竹溪等, 1965), 因此对能谱 (5.3.39) 的积分结果为

$$\int_0^{\varepsilon_{a,\max}}S(\varepsilon_a)\mathrm{d}\varepsilon_a=\frac{8}{\pi}\int_0^1\sqrt{x(1-x)}\mathrm{d}x=\frac{8}{\pi}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=1 \tag{5.3.43}$$

验证了 (5.3.39) 式的归一性. 这时 a 粒子在质心系中携带的能量为

$$\bar{\varepsilon}_a^c=\int_0^{\varepsilon_{a,\max}}\varepsilon_a S(\varepsilon_a)\mathrm{d}\varepsilon_a=\frac{1}{2}\varepsilon_{a,\max} \tag{5.3.44}$$

同样地可得到, b 粒子和 c 粒子在质心系中携带的能量分别为

$$\bar{\varepsilon}_b^c=\int_0^{\varepsilon_{b,\max}}\varepsilon_b S(\varepsilon_b)\mathrm{d}\varepsilon_b=\frac{1}{2}\varepsilon_{b,\max},\quad \bar{\varepsilon}_c^c=\int_0^{\varepsilon_{c,\max}}\varepsilon_c S(\varepsilon_c)\mathrm{d}\varepsilon_c=\frac{1}{2}\varepsilon_{c,\max} \tag{5.3.45}$$

因此, 三个崩裂粒子在质心系中携带的总能量为

$$\bar{\varepsilon}_a^c+\bar{\varepsilon}_b^c+\bar{\varepsilon}_c^c=\frac{1}{2}(\varepsilon_{a,\max}+\varepsilon_{b,\max}+\varepsilon_{c,\max})=Q_3 \tag{5.3.46}$$

满足质心系中的能量平衡条件.

下面还需要证明在实验室系中能量平衡条件也要成立. 实验室系中每个出射粒子的速度应该是它在质心系中的速度与质心运动速度的矢量合. 于是, 在实验室系中得到直接三体崩裂过程中第 i 个出射粒子的能量为

$$\bar{\varepsilon}_i^l=\frac{1}{2}m_i\int(\boldsymbol{v}_i^c+\boldsymbol{V}_\mathrm{C})^2\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_i\mathrm{d}\Omega_i}\mathrm{d}\varepsilon_i\mathrm{d}\Omega_i,\quad i=1,2,3 \tag{5.3.47}$$

由于直接三体崩裂的粒子能谱在质心系中是各向同性的, 因此对角度部分积分后约化为

$$\bar{\varepsilon}_i^l = \int_0^{\varepsilon_{a,\max}^c} \left(\varepsilon_i + \frac{m_i m_\mathrm{n} E_\mathrm{n}}{M_\mathrm{C}^2}\right) S(\varepsilon_i)\mathrm{d}\varepsilon_i = \bar{\varepsilon}_i^c + \frac{m_i m_\mathrm{n} E_\mathrm{n}}{M_\mathrm{C}^2} \tag{5.3.48}$$

在实验室系中三个崩裂粒子的能量之和为

$$\sum_{i=a,b,c} \bar{\varepsilon}_i^l = Q_3 + \frac{m_\mathrm{n} E_\mathrm{n}}{M_\mathrm{C}} = E^* + Q + \frac{m_\mathrm{n} E_\mathrm{n}}{M_\mathrm{C}} = E_\mathrm{n} + B_\mathrm{n} + Q \tag{5.3.49}$$

至此, 实验室系中的能量平衡也得到了严格证明.

由于在质心系中直接三体崩裂的崩裂粒子谱全是各向同性的, 因此可以简单地给出在实验室系的崩裂粒子谱. 这时在实验室系中, 直接三体崩裂出射粒子的双微分截面可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon^l \mathrm{d}\Omega^l} = \sqrt{\frac{\varepsilon^l}{\varepsilon^c}} \frac{S(\varepsilon^c)}{4\pi} = \frac{2}{\pi^2(\varepsilon_{\max}^c)^2}\sqrt{\varepsilon^l(\varepsilon_{\max}^c - \varepsilon^c)} \tag{5.3.50}$$

由能量关系式 (见第 6 章 (6.4.3) 式):

$$\varepsilon^c = \varepsilon^l - 2\beta\sqrt{\varepsilon^l}\cos\theta^l + \beta^2 \tag{5.3.51}$$

其中 β 由 (5.1.5) 式给出.

直接三体崩裂粒子的能谱在质心系中都是各向同性的. 以 $^{10}\mathrm{Be}^* \to \mathrm{n}+\mathrm{n}+{}^8\mathrm{Be}$ 为例, 在 $E_\mathrm{n} = 15\mathrm{MeV}$ 时, 激发能为 $E^* = 20.311\mathrm{MeV}$, 因此 $^{10}\mathrm{Be}^*$ 的直接三体崩裂的三个粒子的动能之和为 $Q_3 = 11.834\mathrm{MeV}$, 得到崩裂中子的能量区域为 $\varepsilon_\mathrm{n} = 0 \sim 10.65\mathrm{MeV}$, 它在总中子出射谱中贡献了一个能量区域最大的各向同性谱, 是一个不可忽视的反应道. 而 $^8\mathrm{Be}$ 的最大能量是 $\varepsilon_{\max}^c = 2.367\mathrm{MeV}$.

在 $\mathrm{n} + {}^6\mathrm{Li} \to {}^7\mathrm{Li}^* \to \mathrm{n} + \mathrm{d} + \alpha$ 直接三体崩裂过程中, 当中子入射能量为 $E_\mathrm{n} = 15\mathrm{MeV}$ 时, 这时激发能为 $E^* = 20.106\mathrm{MeV}$, 由于 $Q = -8.725\mathrm{MeV}$, 因此 $^7\mathrm{Li}^* \to \mathrm{n}+\mathrm{d}+\alpha$ 的直接三体崩裂的 Q_3 值为 $Q_3 = 11.381\mathrm{MeV}$, 因此得到崩裂中子在质心系中的能量区域为 $\varepsilon_\mathrm{n} = 0 \sim 9.755\mathrm{MeV}$, 它也贡献了在质心系中一个能量区域分布最大的各向同性谱. 而 d 核的最大能量是 8.129MeV, 而崩裂 α 核的最大能量是 4.8771MeV.

将 (5.3.51) 式代入到 (5.3.50) 式后得到以实验室系的能量 ε^l 和角度 θ^l 为自变量的双微分截面表示:

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon^l \mathrm{d}\Omega^l} = \frac{2}{\pi^2(\varepsilon_{\max}^c)^2}\sqrt{\varepsilon^l(\varepsilon_{\max}^c - \varepsilon^l + 2\beta\sqrt{\varepsilon^l}\cos\theta^l - \beta^2)} \tag{5.3.52}$$

很显然, 在 (5.3.52) 式中的根号内数值必须大于等于 0, 这样, 在实验室系中确定的角度 θ^l 给出对出射粒子能量 ε^l 的限制, 以保证根号内的值大于 0. 这个值满足的方程可以改写为

$$\varepsilon^l - 2\beta\sqrt{\varepsilon^l}\cos\theta^l - \varepsilon^c_{\max} + \beta^2 \leqslant 0 \tag{5.3.53}$$

解出 $\sqrt{\varepsilon^l}$ 对应的一元二次方程的根：

$$\sqrt{\varepsilon^l_0} = \beta\cos\theta^l \pm \sqrt{\varepsilon^c_{\max} - \beta^2\sin^2\theta^l} \tag{5.3.54}$$

得到在 $\varepsilon^c_{\max} \geqslant \beta^2$ 的情况下, 实验室系的出射能量范围满足：

$$0 \leqslant \sqrt{\varepsilon^l} \leqslant \beta\cos\theta^l + \sqrt{\varepsilon^c_{\max} - \beta^2\sin^2\theta^l} \tag{5.3.55}$$

这时对 θ^l 没有角度限制, 即 $-1 \leqslant \cos\theta^l \leqslant 1$. 对一定角度 θ^l 出射能量 ε^l 最大值为

$$\varepsilon^l_{\max} = \varepsilon^c_{\max} + \beta^2\cos 2\theta^l + 2\beta\cos\theta^l\sqrt{\varepsilon^c_{\max} - \beta^2\sin^2\theta^l} \tag{5.3.56}$$

因此, 公式 (5.3.56) 中右边的后两项之和的正负值确定了在实验室系中出射粒子的能量大于或小于质心系中的能量最大值. 显然, 在 $\theta^l = 0$ 时

$$\varepsilon^l_{\max} = (\sqrt{\varepsilon^c_{\max}} + \beta)^2 > \varepsilon^c_{\max} \tag{5.3.57}$$

而 $\theta^l = \pi$ 时

$$\varepsilon^l_{\max} = (\sqrt{\varepsilon^c_{\max}} - \beta)^2 < \varepsilon^c_{\max} \tag{5.3.58}$$

这在物理上是合理的.

5.4 二次粒子发射过程——从分立能级到分立能级

轻核的能级纲图中给出的能级许多是不稳定的, 能级宽度可以达到几十千电子伏特到几个兆电子伏特数量级. 能级宽度为 100keV 的能级寿命大约为 6×10^{-21}s, 对应于预平衡发射过程的时间尺度. 从不稳定的分立能级继续发射粒子是轻核反应的一个特征. 对于比较重的核素, 所有的分立能级都通过发射 γ 光子完成退激而结束核反应. 而对于轻核反应, 从剩余核的分立能级继续发射粒子则是最普遍的一种多粒子发射的反应方式. 下面讨论一次粒子发射后剩余核到达其 k_1 分立能级并继续发射粒子的情况; 这属于有序的两次粒子发射过程, 也就是从分立能级到分立能级的发射过程 (*D to D*), 例如 (n, 2n), (n, np), (n, nα) 等核反应过程. 这种二次粒子发射过程如图 5.5 所示.

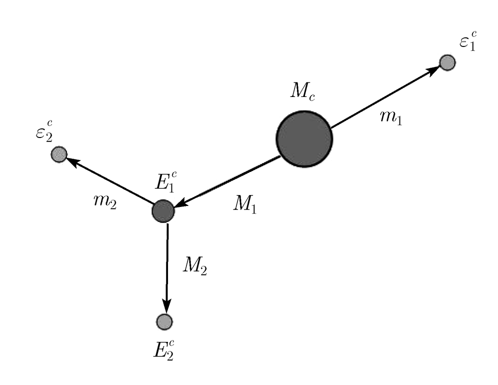


图 5.5　从剩余核分立能级发射二次粒子的示意图

在 5.1 节中已经指出, 发射一次粒子后的剩余核是以能量 E_1^c 在质心系中运动, 考虑从它的 k_1 分立能级继续发射粒子就需要应用剩余核运动系. 该剩余核在剩余核运动系中是静止的, 而在质心系中则是在作反冲运动. 如果从 k_1 分立能级继续发射能量为 ε_2^r 的二次粒子, 二次剩余核到达它的 k_2 分立能级, 在剩余核运动系中 ε_2^r 是一个确定的值：

$$\varepsilon_2^r = \frac{M_2}{M_1}(E_{k_1} - B_2 - E_{k_2}) \tag{5.4.1}$$

二次剩余核在一次粒子发射后的剩余核运动系中的能量为

$$E_2^r = \frac{m_2}{M_1}(E_{k_1} - B_2 - E_{k_2}) \tag{5.4.2}$$

另外, 还有一类轻核反应, 它们在发射一次粒子后, 剩余核是不稳定核, 自发崩裂为两个核. 例如, 在 $^6\mathrm{Li(n,d)}^5\mathrm{He}$, $^7\mathrm{Li(n,t)}^5\mathrm{He}$ 等反应中, $^5\mathrm{He}$ 是不稳定核, 会自发崩裂, 并释放确定的能量, 这种核反应过程也属于 $(D\ to\ D)$ 的情况. 例如

$$\begin{aligned}
^5\mathrm{He} &\to \mathrm{n} + \alpha, \quad Q_2 = 0.894\mathrm{MeV} \\
^5\mathrm{Li} &\to \mathrm{p} + \alpha, \quad Q_2 = 1.966\mathrm{MeV} \\
^8\mathrm{Be} &\to \alpha + \alpha, \quad Q_2 = 0.092\mathrm{MeV}
\end{aligned} \tag{5.4.3}$$

对于发射一次粒子后进行两体崩裂的核反应过程, 在剩余核运动系中, 两体崩裂的粒子也具有确定的单能值, 类似于二次粒子发射. 两个崩裂粒子质量分别为 m_2 和 M_2, 它们在一次粒子发射后的剩余核运动系中的能量分别为

$$\varepsilon_2^r = \frac{M_2}{M_1}(E_{k_1} + Q_2), \quad E_2^r = \frac{m_2}{M_1}(E_{k_1} + Q_2) \tag{5.4.4}$$

一次剩余核在质心系中的角分布为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_{M_1}^c} = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} f_l^c(M_1) P_l(\cos\theta_{M_1}^c) \tag{5.4.5}$$

由速度合成关系 $\boldsymbol{v}_{m_2}^c = \boldsymbol{v}_{M_1}^c + \boldsymbol{v}_{m_2}^r$, $\boldsymbol{v}_{m_2}^r$ 与 $\boldsymbol{v}_{M_1}^c$ 的夹角记为 Θ, 将 $\boldsymbol{v}_{m_2}^c$ 和 $\boldsymbol{v}_{M_1}^c$ 构成的平面为 z-x 平面, $\boldsymbol{v}_{m_2}^c$ 和 $\boldsymbol{v}_{M_1}^c$ 与 z 轴夹角分别为 θ_2^c 和 $\theta_{M_1}^c$, 而 $\boldsymbol{v}_{m_2}^c$ 和 $\boldsymbol{v}_{M_1}^c$ 之间夹角记为 θ. 这种速度关系由图 5.6 所示.

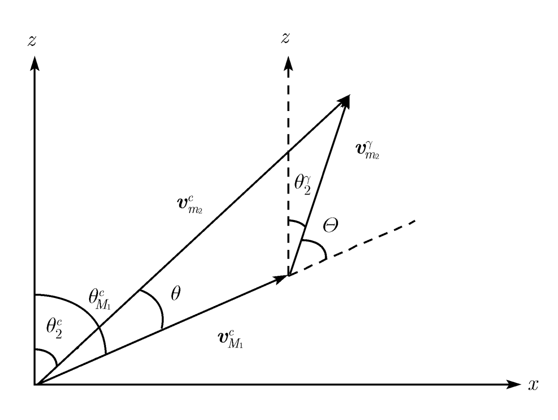


图 5.6　$\boldsymbol{v}_{m_2}^c$ 与 $\boldsymbol{v}_{M_1}^c$ 和 $\boldsymbol{v}_{m_2}^r$ 的关系示意图

由图 5.6 中给出的速度合成关系, 因而可以得到在质心系中发射二次粒子的能量为

$$\varepsilon_2^c = \frac{m_2}{2}(v_{M_1}^c)^2 + \varepsilon_2^r + m_2 v_{M_1}^c v_{m_2}^r \cos\Theta \tag{5.4.6}$$

并将速度转换成能量得到

$$\varepsilon_2^c = \frac{m_2 E_1^c}{M_1} + \varepsilon_2^r + 2\sqrt{\frac{m_2 E_1^c \varepsilon_2^r}{M_1}}\cos\Theta \tag{5.4.7}$$

若定义

$$\gamma \equiv \sqrt{\frac{m_2 E_1^c}{M_1 \varepsilon_2^r}} \tag{5.4.8}$$

(5.4.7) 式被改写为

$$\varepsilon_2^c = \varepsilon_2^r\left(1 + 2\gamma\cos\Theta + \gamma^2\right) \tag{5.4.9}$$

得到角度余旋 $\cos\Theta$ 与能量之间的关系为

$$\cos\Theta = \frac{\varepsilon_2^c/\varepsilon_2^r - 1 - \gamma^2}{2\gamma} \tag{5.4.10}$$

由动量守恒可以得到二次发射粒子在质心系中的角度与它在剩余核运动系中的角度之间的关系. 在质心运动系中速度的 x 和 z 分量就分别为

$$v_{m_2}^c \sin\theta_2^c = v_{m_2}^r \sin\theta_2^r + v_{M_1}^c \sin\theta_{M_1}^c \tag{5.4.11}$$

$$v_{m_2}^c \cos\theta_2^c = v_{m_2}^r \cos\theta_2^r + v_{M_1}^c \cos\theta_{M_1}^c \tag{5.4.12}$$

因此有

$$\tan\theta_2^c = \frac{v_{m_2}^r \sin\theta_2^r + v_{M_1}^c \sin\theta_{M_1}^c}{v_{m_2}^r \cos\theta_2^r + v_{M_1}^c \cos\theta_{M_1}^c} \tag{5.4.13}$$

利用三角公式：

$$\cos\theta_2^c = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta_2^c}} \tag{5.4.14}$$

得到

$$\cos\theta_2^c = \frac{v_{m_2}^r \cos\theta_2^r + v_{M_1}^c \cos\theta_{M_1}^c}{\sqrt{(v_{m_2}^r)^2 + (v_{M_1}^c)^2 + 2v_{m_2}^r v_{M_1}^c (\sin\theta_2^r \sin\theta_{M_1}^c + \cos\theta_2^r \cos\theta_{M_1}^c)}} \tag{5.4.15}$$

注意下面的到角度的合成关系：

$$\sin\theta_2^r \sin\theta_{M_1}^c + \cos\theta_2^r \cos\theta_{M_1}^c = \cos(\theta_2^r - \theta_{M_1}^c) = \cos\Theta \tag{5.4.16}$$

并对 (5.4.16) 式中分子分母同时除以 $v_{m_2}^r$, 利用 $v_{M_1}^c/v_{m_2}^r = \gamma$, 得到

$$\cos\theta_2^c = \frac{\cos\theta_2^r + \gamma\cos\theta_{M_1}^c}{\sqrt{1+2\gamma\cos\Theta+\gamma^2}} \tag{5.4.17}$$

θ 是 $\boldsymbol{v}_{M_1}^c$ 与 $\boldsymbol{v}_{m_2}^c$ 的夹角, 它的余旋可以用这两个矢量在球坐标中角度的函数表示, 这就是角度合成公式, 其表达式为

$$\cos\theta = \cos\theta_2^c \cos\theta_{M_1}^c + \sin\theta_2^c \sin\theta_{M_1}^c \cos(\varphi_2^c - \varphi_{M_1}^c) \tag{5.4.18}$$

从图 5.5 可以清楚看出速度合成关系 $\boldsymbol{v}_{m_2}^r = \boldsymbol{v}_{m_2}^c - \boldsymbol{v}_{M_1}^c$, 由它可以得到以下能量关系：

$$\varepsilon_2^r = \varepsilon_2^c + \frac{m_2}{M_1}E_1^c - 2\sqrt{\frac{m_2\varepsilon_2^c E_1^c}{M_1}}\cos\theta \tag{5.4.19}$$

将 (5.4.19) 式除以 ε_2^r, 并利用 (5.4.9) 式得到

$$\cos\Theta = \sqrt{\frac{\varepsilon_2^c}{\varepsilon_2^r}}\cos\theta - \gamma \tag{5.4.20}$$

将 (5.4.18) 式的 $\cos\theta$ 之值代入 (5.4.20) 式, 得到

$$\cos\Theta = \sqrt{\frac{\varepsilon_2^c}{\varepsilon_2^r}}\left[\cos\theta_2^c \cos\theta_{M_1}^c + \sin\theta_2^c \sin\theta_{M_1}^c \cos(\varphi_2^c - \varphi_{M_1}^c)\right] - \gamma \tag{5.4.21}$$

这说明 $\boldsymbol{v}_{m_2}^r$ 与 $\boldsymbol{v}_{M_1}^c$ 的夹角 Θ 可以用 m_2 粒子的球坐标 $(\theta_2^c, \varphi_2^2)$ 和一次射剩余核 M_1 的球坐标 $(\theta_{M_1}^c, \varphi_{M_1}^2)$ 来表示. 另外, 利用剩余核运动系与质心运动系的速度合

成关系 $\boldsymbol{v}_{m_2}^c = \boldsymbol{v}_{M_1}^c + \boldsymbol{v}_{m_2}^r$ 还可以得到二次发射粒子在质心系中的能量范围, 由速度的最大和最小值, 以及 (5.4.9) 式, 得到能量的最大和最小值分别为

$$\varepsilon_{2,\max}^c = \varepsilon_2^r(1+\gamma)^2 \quad 和 \quad \varepsilon_{2,\min}^c = \varepsilon_2^r(1-\gamma)^2 \tag{5.4.22}$$

由此可见, 二次发射粒子在剩余核运动系中虽然是单能的, 但在考虑了发射粒子的反冲效应之后, 在质心系中就不再是单能的了, 而是变成为一个环形的连续能谱, 能量范围满足关系 $\varepsilon_{2,\min}^c \leqslant \varepsilon_2^c \leqslant \varepsilon_{2,\max}^c$, 而对轻核反应这个能量范围可以达到几个兆电子伏特. 图 5.7 示意性地给出了二次粒子发射在质心系中的环型连续能谱的直观图像.

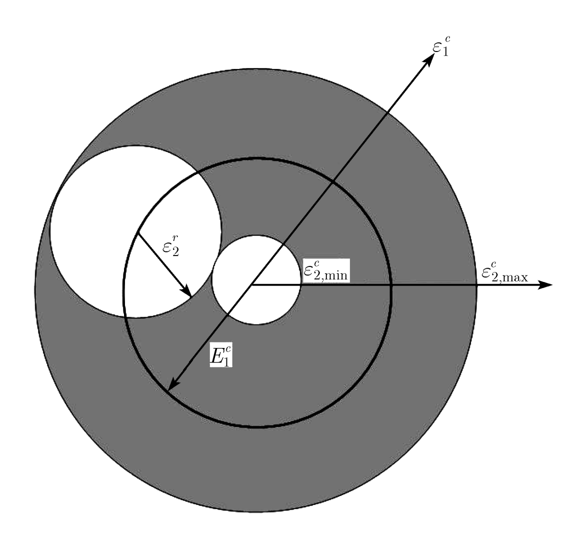


图 5.7　从分立能级发射二次粒子的环型能谱示意图

严格考虑反冲效应是轻核反应中至关重要的物理内容, 因此也是轻核反应的特性之一. 这种结果表明, 在轻核反应中, 在严格考虑反冲效应后, 多次粒子发射过程是需要用双微分截面来描述的. 以 $\mathrm{n}+{}^7\mathrm{Li}$ 核反应为例, 在 $E_\mathrm{n} = 14.1\mathrm{MeV}$ 时, 从复合核发射中子到 ${}^7\mathrm{Li}$ 的 k_1 能级所开放的二次粒子发射 $(\mathrm{n,2n})$, $(\mathrm{n,np})$, $(\mathrm{n,nt})$, $(\mathrm{n,pn})$ 反应道, 以及二次粒子发射到剩余核不同能级 k_2 在质心系中的环型连续谱的能量范围由表 5.1 给出.

表 5.1　中子入射能量为 $E_\mathrm{n} = 14\mathrm{MeV}$, 在 $\mathrm{n}+{}^7\mathrm{Li}$ 反应中, 通过一次粒子发射到达一次剩余核分立能级 k_1, 再发射二次粒子到达二次剩余核分立能级 k_2 的开放道以及二次粒子发射环型谱的能量范围. 其中 gs 表示基态

反应道	k_1	k_2	$E(k_1)$①/MeV	$\varepsilon_{2,\min} \to \varepsilon_{2,\max}$②/MeV
(n,2n)	4	gs	4.337	0.307~0.812
(n,2n)	5	gs	2.404	0.002~1.277

续表

反应道	k_1	k_2	$E(k_1)$①/MeV	$\varepsilon_{2,\min} \to \varepsilon_{2,\max}$②/MeV
(n,2n)	5	1	2.404	0.129~0.526
(n,2n)	6	gs	2.246	0.007~1.285
(n,2n)	6	1	2.246	0.079~0.589
(n,2n)	7	gs	1.031	0.160~1.232
(n,2n)	7	1	1.031	0.023~0.744
(n,2n)	7	2	1.031	0.012~0.363
(n,np)	7	gs	1.031	0.005~0.609
(n,nd)	6	gs	2.246	0.049~0.540
(n,nd)	7	gs	1.031	0.127~1.009
(n,nt)	2	gs	6.811	0.048~2.916
(n,nt)	3	gs	5.019	0.496~3.932
(n,nt)	4	gs	4.337	0.754~4.232
(n,nt)	5	gs	2.404	1.728~4.838
(n,nt)	6	gs	2.246	1.825~4.869
(n,nt)	7	gs	1.031	2.720~4.967
(n,pn)	gs	gs	1.747	0.044~0.511

注：① $E(k_1)$ 是质心系中一次粒子发射能量, ② $\varepsilon_{2,\min} \to \varepsilon_{2,\max}$ 是二次粒子发射在质心系中环型谱的能量范围.

从表 5.1 可以看出, 轻核的反冲效应十分强烈, 像 ^{7}Li 这样轻的核, 发射的二次粒子谱的能量范围可以达到 2~3MeV, 这种现象是在中重核的核反应中所看不到的. 以 n+^{56}Fe 这样比较轻的中等核素的核反应为例, 在 $E_n = 14.1$MeV 时, 只有发射第一中子到 ^{56}Fe 的激发能级 ($E_k = 11.918$MeV, $\Gamma = 11$keV) 时, 才开始可以发射第二中子, 属于 (n, 2n) 反应道. 如果继续发射第二中子到 ^{55}Fe 的基态, 这时第二中子在 ^{56}Fe 中的结合能是 11.179MeV, 因此得到 $\varepsilon_2^r = 0.7258$MeV, 而第一中子发射后反冲核的能量为 $E_1^c = 0.0322$MeV, 由此得到 $\gamma = 0.0284$. 这样一来, 在质心系中从剩余核 ^{56}Fe 发射的第二中子的环型连续谱的能量范围是从 $\varepsilon_{2,\min} = 0.685$MeV 到 $\varepsilon_{2,\max} = 0.768$MeV, 环型连续谱的宽度仅为 $\Delta\varepsilon = 82.4$keV. 而在核数据库中, 如果采用置方图 (histogram) 的方式记录能谱时, 一般采用 $\Delta E = 0.1$MeV 作为能量间隔. 因此 ^{56}Fe 发射的第二中子的环型连续谱仅记录到一个能量区间, 可视为单能谱. 换句话说, 来自分立能级的多次粒子发射的反冲效应不能给出像轻核反应那样的连续谱状态. 显然, 对于更重的核素, 次级粒子发射的环型连续谱的宽度还会更小, 更可视为单能谱. 相反, 对轻核反应而言, 这个次级粒子发射的反冲效应是相当强烈的, 次级粒子谱必须被视为连续谱. 这正是在轻核反应中次级粒子发射谱在质心系中是连续谱, 而不是单能谱原因之所在.

同样, 二次粒子发射后的剩余核也是在质心系中呈连续谱状态. 如果需要考虑从二次粒子发射的剩余核再发射第三次粒子时, 对于发射到剩余核的分立能级的情

况下, 三次粒子发射的剩余核也是处于分立能级态, 这就变成为从连续谱到分立谱的情况, 即 ($C\ to\ D$), 这是因为发射二次粒子后的二次剩余核是处于连续谱的状态.

下面研究这种二次粒子发射的环型连续能谱的公式表示. 在剩余核运动系中采用了各向同性发射的近似, 并且粒子发射能量是确定的, 这时粒子发射的双微分截面表示为 (Zhang, 2003a)

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_2^r\mathrm{d}\Omega_2^r}=\frac{1}{4\pi}\delta\left(\varepsilon_2^c-\varepsilon_2^r(1+2\gamma\cos\Theta+\gamma^2)\right) \tag{5.4.23}$$

又知, 质心系与剩余核运动系的双微分截面关系为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon^c\mathrm{d}\Omega^c}=\sqrt{\frac{\varepsilon^c}{\varepsilon^r}}\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon^r\mathrm{d}\Omega^r} \tag{5.4.24}$$

在统计理论中, 任何可观测的物理量都是来自对分布函数的平均值. 由于一次粒子发射后剩余核的角分布为 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega_{M_1}^c$, 因此上式对一次粒子发射后剩余核的角分布平均后, 就会得到二次发射粒子在质心系中的双微分截面表示：

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_2^c\mathrm{d}\Omega_2^c}=\int\mathrm{d}\Omega_{M_1}^c\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_{M_1}^c}\sqrt{\frac{\varepsilon_2^c}{\varepsilon_2^r}}\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_2^r\mathrm{d}\Omega_2^r} \tag{5.4.25}$$

由于二次发射粒子在剩余核系中是单能的, 把剩余核运动系中的双微分截面表示代入之后, 二次发射粒子在质心系的双微分截面表示变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_2^c\mathrm{d}\Omega_2^c}=\frac{1}{4\pi}\int\mathrm{d}\Omega_{M_1}^c\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_{M_1}^c}\sqrt{\frac{\varepsilon_2^c}{\varepsilon_2^r}}\delta\left(\varepsilon_2^c-\varepsilon_2^r(1+2\gamma\cos\Theta+\gamma^2)\right) \tag{5.4.26}$$

下面应用 δ 函数的性质来完成 (5.4.26) 式的积分. 数学上, 如果在一个积分中出现 δ 函数, 而 δ 函数中的表示又是一个函数形式, 则有如下性质：

$$\int F(x)\delta(g(x))\mathrm{d}x=\sum_i\frac{F(x_{0_i})}{|\mathrm{d}g(x)/\mathrm{d}x|_{x=x_{0_i}}} \tag{5.4.27}$$

其中 x_{0_i} 为函数 $g(x)$ 的零点, 即 $g(x_{0_i})=0,\ i=1,2,\cdots$. 由于

$$\mathrm{d}\Omega_{M_1}^c=\sin\theta_{M_1}^c\mathrm{d}\theta_{M_1}^c\mathrm{d}\varphi_{M_1}^c=-\mathrm{d}\cos\theta_{M_1}^c\mathrm{d}\varphi_{M_1}^c \tag{5.4.28}$$

首先选择在公式 (5.4.26) 的积分变量为 $\varphi_{M_1}^c$, 由上面介绍的 δ 函数的性质. 这时就需要寻找被积函数中对 $\varphi_{M_1}^c$ 导数在 δ 函数中的 0 点. 这时 (5.4.27) 式的分母变为

$$\left|\frac{\mathrm{d}(\varepsilon_2^c-\varepsilon_2^r(1+2\gamma\cos\Theta+\gamma^2))}{\mathrm{d}\varphi_{M_1}^c}\right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left|2\gamma\varepsilon_2^r \frac{\mathrm{d}\cos\Theta}{\mathrm{d}\varphi_{M_1}^c}\right| = \left|2\gamma\sqrt{\varepsilon_2^c\varepsilon_2^r}\sin\theta_2^c\sin\theta_{M_1}^c\sin(\varphi_2^c-\varphi_{M_1}^c)\right| \\
&= \left|2\gamma\sqrt{\varepsilon_2^c\varepsilon_2^r}\sin\theta_2^c\sin\theta_{M_1}^c\sqrt{1-\cos^2(\varphi_2^c-\varphi_{M_1}^c)}\right| \\
&= \left|2\gamma\sqrt{\varepsilon_2^c\varepsilon_2^r}\sqrt{\sin^2\theta_2^c\sin^2\theta_{M_1}^c-\sin^2\theta_2^c\sin^2\theta_{M_1}^c\cos^2(\varphi_2^c-\varphi_{M_1}^c)}\right|
\end{aligned} \tag{5.4.29}$$

其中对于根号中第二项. 由于有

$$\sin\theta_2^c\sin\theta_{M_1}^c\cos(\varphi_2^c-\varphi_{M_1}^c) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2^r}{\varepsilon_2^c}}(\cos\Theta+\gamma) - \cos\theta_2^c\cos\theta_{M_1}^c \tag{5.4.30}$$

代入 $\cos\Theta$ 的表示 (5.4.10) 式后, (5.4.30) 式被约化为

$$\sin\theta_2^c\sin\theta_{M_1}^c\cos(\varphi_2^c-\varphi_{M_1}^c) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2^r}{\varepsilon_2^c}}\frac{\varepsilon_2^c/\varepsilon_2^r-1+\gamma^2}{2\gamma} - \cos\theta_2^c\cos\theta_{M_1}^c \tag{5.4.31}$$

再定义参数 η:

$$\eta \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon_2^r}{\varepsilon_2^c}}\frac{\varepsilon_2^c/\varepsilon_2^r-1+\gamma^2}{2\gamma} \tag{5.4.32}$$

得到

$$\sin\theta_2^c\sin\theta_{M_1}^c\cos(\varphi_2^c-\varphi_{M_1}^c) = \eta - \cos\theta_2^c\cos\theta_{M_1}^c \tag{5.4.33}$$

将 $\varepsilon_{2,\min}^c \leqslant \varepsilon_2^c \leqslant \varepsilon_{2,\max}^c$ 所有可能的值代入 η 的表示式作计算, 可以发现不等式 $-1 \leqslant \eta \leqslant 1$ 总是成立的. 仅在环形谱的能量边沿值的情况下才会有 $\eta = \pm 1$ 的情况出现. 事实上, 将最小能量值 $\varepsilon_2^c = \varepsilon_{2,\min}^c$ 代入到 (5.4.32) 式, 得到的是 $\eta = (\gamma-1)/|1-\gamma|$, 而将最大能量值 $\varepsilon_2^c = \varepsilon_{2,\max}^c$ 代入 (5.4.32) 式, 得到的是 $\eta = 1$.

这样一来, 在寻找被积分函数中 δ 函数 0 点的公式中的表示可以化简为

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\mathrm{d}(\varepsilon_2^c-\varepsilon_2^r(1+2\gamma\cos\Theta+\gamma^2))}{\mathrm{d}\varphi_{M_1}^c}\right| \\
&= \left|2\gamma\sqrt{\varepsilon_2^c\varepsilon_2^r}\sqrt{1-\cos^2\theta_2^c-\cos^2\theta_{M_1}^c+2\eta\cos\theta_2^c\cos\theta_{M_1}^c-\eta^2}\right|
\end{aligned} \tag{5.4.34}$$

为了方便, 下面记

$$x = \cos\theta_{M_1}^c, \quad c = 1-\cos^2\theta_2^c-\eta^2 \tag{5.4.35}$$

因此有

$$\left|\frac{\mathrm{d}(\varepsilon_2^c-\varepsilon_2^r(1+2\gamma\cos\Theta+\gamma^2))}{\mathrm{d}\varphi_{M_1}^c}\right| = \left|2\gamma\sqrt{\varepsilon_2^c\varepsilon_2^r}\sqrt{c+2\eta\cos\theta_2^c x-x^2}\right| \tag{5.4.36}$$

如果 $\delta\left(\varepsilon_2^c-\varepsilon_2^r(1+2\gamma\cos\Theta+\gamma^2)\right)$ 函数的宗量在一个 $\sin\varphi_{M_1}^c$ 值时存在 0 点, 那么一定还存在另一个 0 点, 即在 $\sin(\pi-\varphi_{M_1}^c)$ 处, 因此积分结果一定产生一个 2 的因子. 这时, 在质心系中二次发射粒子的双微分截面表示就演变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_2^c\mathrm{d}\Omega_2^c}=\frac{1}{8\pi^2\gamma\varepsilon_2^r}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{c+2\eta\cos\theta_2^c x-x^2}} \tag{5.4.37}$$

其中, 剩余核的归一化角分布是由 (5.4.5) 式给出. 由于在二次发射粒子的双微分截面表示中不允许有 0 点存在, 这也是在 δ 函数中存在 $\sin\varphi_{M_1}^c$ 使 δ 函数存在 0 点的条件. 因此要求

$$x^2-2\eta\cos\theta_2^c x-c\leqslant 0 \tag{5.4.38}$$

这个不等式给出对 x 积分的区间, (5.4.38) 式的一元二次方程的根为

$$x_1=\eta\cos\theta_2^c-\sqrt{(1-\eta^2)\sin^2\theta_2^c} \tag{5.4.39}$$

和

$$x_2=\eta\cos\theta_2^c+\sqrt{(1-\eta^2)\sin^2\theta_2^c} \tag{5.4.40}$$

在给出积分上下限 x_1 和 x_2 后. 下面将积分变量由 x 变为 t, 它们之间的关系是

$$x=\sqrt{(1-\eta^2)\sin^2\theta_2^c}\cos t+\eta\cos\theta_2^c \tag{5.4.41}$$

因此有

$$-\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{c+2\eta x\cos\theta_2^c-x^2}}=\mathrm{d}t \tag{5.4.42}$$

这时对 t 积分的上下限变为 $0\leqslant t\leqslant\pi$. 将 (5.4.41) 和 (5.4.42) 式代入 (5.4.37) 式, 在质心系中二次发射粒子的双微分截面公式变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_2^c\mathrm{d}\Omega_2^c}=\frac{1}{16\pi^2\gamma\varepsilon_2^r}\sum_l(2l+1)f_l^c(M_1)\int_0^\pi\mathrm{d}tP_l(\sqrt{(1-\eta^2)\sin^2\theta_2^c}\cos t+\eta\cos\theta_2^c) \tag{5.4.43}$$

这个定积分是可用解析方式做出的. 具体做法是应用了 Legendre 多项式的合成公式 (王竹溪等, 1965):

$$P_l(\cos\Theta)=P_l(\cos\theta)P_l(\cos\theta')+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\times P_l^m(\cos\theta)P_l^m(\cos\theta')\cos m(\phi-\phi') \tag{5.4.44}$$

这里 Θ 是两个立体角 Ω 和 Ω' 之间的夹角, 由角度合成公式:

$$\cos\Theta=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi') \tag{5.4.45}$$

利用这个关系式, 取 $t=\phi-\phi'$, $\cos\theta=\cos\theta_2^c$, $\eta=\cos\theta'$, 因而有

$$\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')+\cos\theta\cos\theta'=\sqrt{(1-\eta^2)\sin^2\theta_2^c}\cos t+\eta\cos\theta_2^c \tag{5.4.46}$$

对 t 进行积分, (5.4.44) 式中第二项中含 $\cos m(\phi-\phi')$ 项消失, 第一项积分得到因子 π, 于是得到了如下的一个定积分公式:

$$\int_0^{\pi}\mathrm{d}tP_l(\sqrt{(1-\eta^2)\sin^2\theta_2^c}\cos t+\eta\cos\theta_2^c)=\pi P_l(\eta)P_l(\cos\theta_2^c) \tag{5.4.47}$$

这个定积分的解析结果为后面所有类型的运动学公式表示的简化起到了十分关键的作用.

利用 (5.4.47) 和 (5.1.12) 式, 在质心系中二次粒子发射双微分截面有如下的解析表达式 (Zhang et al., 1999; Zhang, 2003a):

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_2^c\mathrm{d}\Omega_2^c}=\sum_l\frac{(-1)^l}{16\pi\gamma\varepsilon_2^r}(2l+1)f_l^c(m_1)P_l(\eta)P_l(\cos\theta_2^c) \tag{5.4.48}$$

将 (5.4.48) 式与归一化双微分截面的标准形式 (5.1.10) 式比较, 即可得到在质心系中发射二次粒子双微分截面的 Legendre 展开系数是

$$f_l^c(\varepsilon_2^c)=\frac{(-1)^l}{4\gamma\varepsilon_2^r}f_l^c(m_1)P_l(\eta) \tag{5.4.49}$$

显然, 这是一个很有意思的结果, 在 Legendre 多项式的展开系数中仍然包括 Legendre 多项式. 由于前面已经证明了 $|\eta|\leqslant 1$, 因此它满足 Legendre 多项式对自变量取值范围的要求. 可以看出, 在质心系中的二次发射粒子双微分截面谱 $f_0^c(\varepsilon_2^c)$ 是一个常数谱, 与出射能量 ε_2^c 无关. 另外, 很容易验证质心系中二次发射粒子能谱的归一性. 事实上

$$\int_{\varepsilon_{2,\min}^c}^{\varepsilon_{2,\max}^c}f_0^c(\varepsilon_2^c)\mathrm{d}\varepsilon_2^c=\frac{1}{4\gamma\varepsilon_2^r}\left(\varepsilon_2^r(1+\gamma)^2-\varepsilon_2^r(1-\gamma)^2\right)=1 \tag{5.4.50}$$

为了明确给出环型谱的物理图像, 作为数值计算的示例, 在表 5.2 中给出了中子入射能量在 $E_\mathrm{n}=14\mathrm{MeV}$ 时, 在 $^7\mathrm{Li(n,2n)}$ 反应中第二个出射中子在质心系中 Legendre 多项式展开系数的计算结果 (Zhang et al., 2002b). 其中, 第一中子是从复合核发射到 $^7\mathrm{Li}$ 的第 5 激发能级, 而第二个中子是从这个能级再发射第二中子到 $^6\mathrm{Li}$ 的基态. 当然, 从其他能级途径的二次中子发射的计算也会得到类似结果, 仅在数值上有所不同而已.

表 5.2 ^{7}Li(n, 2n) 第二个出射中子的 Legendre 多项式展开系数

ε/MeV	$f_0(\varepsilon)$	$f_1(\varepsilon)$	$f_2(\varepsilon)$	$f_3(\varepsilon)$	$f_4(\varepsilon)$
0.785	8.888×10^{-1}	7.545×10^{-2}	1.762×10^{-2}	-7.837×10^{-3}	5.297×10^{-3}
0.800	8.888×10^{-1}	7.226×10^{-2}	1.543×10^{-2}	5.952×10^{-3}	3.262×10^{-3}
0.861	8.888×10^{-1}	5.961×10^{-2}	7.686×10^{-3}	3.733×10^{-4}	-1.384×10^{-3}
0.966	8.888×10^{-1}	4.013×10^{-2}	-1.335×10^{-3}	-3.305×10^{-3}	-1.778×10^{-3}
1.104	8.888×10^{-1}	1.749×10^{-2}	-7.390×10^{-3}	-2.481×10^{-3}	9.859×10^{-4}
1.264	8.888×10^{-1}	-5.310×10^{-3}	-8.680×10^{-3}	8.205×10^{-4}	1.889×10^{-3}
1.432	8.888×10^{-1}	-2.629×10^{-2}	-5.603×10^{-3}	3.267×10^{-3}	-8.302×10^{-5}
1.592	8.888×10^{-1}	-4.423×10^{-2}	2.715×10^{-4}	2.945×10^{-3}	-2.103×10^{-3}
1.730	8.888×10^{-1}	-5.843×10^{-2}	7.040×10^{-3}	5.026×10^{-6}	-1.592×10^{-3}
1.835	8.888×10^{-1}	-6.847×10^{-2}	1.296×10^{-2}	-3.974×10^{-3}	1.345×10^{-3}
1.896	8.888×10^{-1}	-7.412×10^{-2}	1.670×10^{-2}	-7.026×10^{-3}	4.400×10^{-3}
1.911	8.888×10^{-1}	-7.545×10^{-2}	1.762×10^{-2}	-7.837×10^{-3}	5.297×10^{-3}

正如表 5.2 中所示, 在质心系中第二中子发射谱是个环型谱, 能谱范围是从 0.785∼ 1.911MeV, 能谱宽度约为 1.126MeV, 确实是一个连续谱. 正如公式 (5.4.49) 所示, 由于 γ 与 ε_2^c 无关, 而 ε_2^r 为常数, 因此归一化能谱 $f_0(\varepsilon)$ 是个常数谱, 而 $l=1$ 分波的展开系数 $f_1(\varepsilon)$ 的值在能谱高能区域为负值, 反映了剩余核在质心系的反冲效应, 而在低能区域 $f_1(\varepsilon)$ 为正值, 这是由于在 (5.4.49) 式中 $\eta<0$ 所导致的. 至于高阶 Legendre 多项式的展开系数则变得很复杂, 有正有负. 这是由公式 (5.4.49) 计算的结果.

以上给出了从一次剩余核的分立能级发射次级粒子到二次剩余核分立能级, 在质心系中发射二次粒子的双微分截面计算公式, 用类似的办法容易推导出二次剩余核的双微分截面公式, 只要在上面的推导过程中将 m_2, M_2 换为 M_2, m_2 即可. 但是为了后面要用到的运动学公式的推导, 需要将它们的表示明显地写出来. 按照惯例, 对于剩余核, 有关物理量用大写英文字母和希腊字母表示.

对于剩余核, 同上推导过程, 定义

$$\varGamma\equiv\sqrt{\frac{M_2E_1^c}{M_1E_2^r}} \tag{5.4.51}$$

二次剩余核在质心系中的最大和最小能量分别为

$$E_{2,\max}^c=E_2^r(1+\varGamma)^2 \quad 和 \quad E_{2,\min}^c=E_2^r(1-\varGamma)^2 \tag{5.4.52}$$

因此, 在质心系中, 二次剩余核能量的取值范围是 $E_{2,\min}^c\leqslant E_2^c\leqslant E_{2,\max}^c$, 其归一化双微分截面可写成如下标准形式:

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}E_2^c\mathrm{d}\varOmega_{M_2}^c}=\sum_l\frac{2l+1}{4\pi}f_l^c(E_2^c)P_l(\cos\theta_{M_2}^c) \tag{5.4.53}$$

二次剩余核双微分截面的 Legendre 展开系数 $f_l^c(E_2^c)$ 为

$$f_l^c(E_2^c)=\frac{(-1)^l}{4\Gamma E_2^r}f_l^c(m_1)P_l(H) \tag{5.4.54}$$

其中

$$H=\sqrt{\frac{E_2^r}{E_2^c}}\frac{E_2^c/E_2^r-1+\Gamma^2}{2\Gamma} \tag{5.4.55}$$

同样可以证明质心系中二次剩余核能谱 $f_0^c(E_2^c)$ 的归一性, 即

$$\int_{E_{2,\min}^c}^{E_{2,\max}^c}f_0^c(E_2^c)\mathrm{d}E_2^c=\frac{1}{4\Gamma E_2^r}\left(E_2^r(1+\Gamma)^2-E_2^r(1-\Gamma)^2\right)=1 \tag{5.4.56}$$

这时, 从分立能级到分立能级的二次粒子发射过程中, 质心系中二次剩余核能谱也是环型的, 二次剩余核的环型能谱宽度为

$$\Delta E_2^c=E_{2,\max}^c-E_{2,\min}^c=4E_2^r\Gamma=4\sqrt{\frac{M_2E_1^cE_2^r}{M_1}} \tag{5.4.57}$$

由动量守恒得到的能量关系, 得到在剩余核运动系中次级粒子发射能量与反冲核能量之间的关系为

$$E_2^r=\frac{m_2}{M_2}\varepsilon_2^r \tag{5.4.58}$$

表明该环型谱的宽度与二次发射粒子的环型能谱的宽度是相同的. 即

$$\Delta E_2^c=4\sqrt{m_2E_1^c\varepsilon_2^r/M_1}=4\varepsilon_2^r\gamma=\Delta\varepsilon_2^r \tag{5.4.59}$$

但是, 由于一般有 $M_2>m_2$, 两个同样宽度的环型能谱的半径却可以不相同, 事实上

$$\sqrt{E_{2,\max}^c}=\sqrt{E_2^r}(1+\Gamma)=\sqrt{E_2^r}+\sqrt{\frac{M_2E_1^c}{M_1}}=\sqrt{\frac{m_2}{M_2}\varepsilon_2^r}+\sqrt{\frac{M_2E_1^c}{M_1}} \tag{5.4.60}$$

而

$$\sqrt{\varepsilon_{2,\max}^c}=\sqrt{\varepsilon_2^r}(1+\gamma)=\sqrt{\varepsilon_2^r}+\sqrt{\frac{m_2E_1^c}{M_1}} \tag{5.4.61}$$

因此

$$\varepsilon_{2,\max}^c-E_{2,\max}^c=\frac{(M_2-m_2)}{M_2}(\varepsilon_2^r-E_1^c) \tag{5.4.62}$$

由此可见, 当 $\varepsilon_2^r>E_1^c$ 时, 二次发射粒子环型谱的半径比二次剩余核环型谱的半径要大, 而 $\varepsilon_2^r<E_1^c$ 时, 二次发射粒子环型谱的半径则比二次剩余核环型谱的半径还要小. 由 (5.2.1) 和 (5.4.1) 式可以看出, E_1^c 主要取决于复合核发射第一次粒子过程

中, 激发能与剩余核分立能级的能量差, 而 ε_2^r 主要取决于一次粒子发射后剩余核分立能级与第二次粒子发射的剩余核分立能级之间的能量差. 对于较高能量的中子入射, 发射一次粒子后剩余核处于较低分立能级的核反应过程而言, 往往二次剩余核环型能谱的半径要比二次发射粒子环型谱的半径大, 即 $E_{2,\max}^c > \varepsilon_{2,\max}^c$, 而在低能中子入射情况下, 如果发射一次粒子后的剩余核处于能量较高分立能级, 发射二次粒子后二次剩余核又处于较低分立能级, 那么二次发射粒子环型谱的半径就要比二次剩余核环型谱半径大, 即 $\varepsilon_{2,\max}^c > E_{2,\max}^c$. 当然, 这还与二次粒子发射的结合能值有关. 在低能中子诱导的轻核反应中, 出现 $\varepsilon_{2,\max}^c > E_{2,\max}^c$ 的情况比较多.

下面我们将证明, 无论在质心系还是在实验室系中, 上面给出的二次发射粒子和其剩余核的双微分截面公式都满足能量平衡条件.

首先考虑两次有序发射粒子的核反应过程. 如前所述, 对于核反应过程是从复合核发射一次粒子后到达其剩余核的 E_{k_1} 分立能级, 再从 E_{k_1} 分立能级发射二次粒子后到达二次剩余核的 E_{k_2} 分立能级, 发射完两个粒子后, 二次剩余核的 E_{k_2} 分立能级则通过发射 γ 光子退激来结束核反应过程, 因而 γ 光子带走的能量就是 E_{k_2}.

在质心系中, 一次发射粒子的能量和其剩余核的能量已经由 (5.2.1) 式给出. 在实验室系中, 一次发射粒子平均能量已由 (5.2.3) 式给出. 在质心系中, 二次发射粒子能量对二次粒子发射的双微分截面做平均的结果为

$$\bar{\varepsilon}_2^c = \int_{\varepsilon_{2,\min}^c}^{\varepsilon_{2,\max}^c} \varepsilon_2^c \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_2^c \mathrm{d}\Omega_2^c} \mathrm{d}\varepsilon_2^c \mathrm{d}\Omega_2^c = \int_{\varepsilon_{2,\min}^c}^{\varepsilon_{2,\max}^c} \varepsilon_2^c \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} f_l^c(\varepsilon_2^c) P_l(\cos\theta_2^c) \mathrm{d}\varepsilon_2^c \mathrm{d}\Omega_2^c \tag{5.4.63}$$

(5.4.63) 式积分的能量上下限由 (5.4.22) 式给出. 对角度 Ω_2^c 的积分后仅剩下 $l=0$ 分波, 再完成对 ε_2^c 的积分后便得到

$$\bar{\varepsilon}_2^c = \int_{\varepsilon_{2,\min}^c}^{\varepsilon_{2,\max}^c} \varepsilon_2^c f_0^c(\varepsilon_2^c) \mathrm{d}\varepsilon_2^c = \int_{\varepsilon_{2,\min}^c}^{\varepsilon_{2,\max}^c} \frac{\varepsilon_2^c}{4\gamma\varepsilon_2^r} \mathrm{d}\varepsilon_2^c = \varepsilon_2^r(1+\gamma^2) \tag{5.4.64}$$

代入上面对 γ 的定义和给出的 ε_2^r 之值, 得到质心系中二次发射粒子的平均能量为

$$\bar{\varepsilon}_2^c = \frac{M_2}{M_1}(E_{k_1} - B_2 - E_{k_2}) + \frac{m_2}{M_1} E_1^c \tag{5.4.65}$$

用同样的推导过程可以得到质心系中二次剩余核的平均能量:

$$\bar{E}_2^c = \frac{m_2}{M_1}(E_{k_1} - B_2 - E_{k_2}) + \frac{M_2}{M_1} E_1^c \tag{5.4.66}$$

至于实验室系中二次发射粒子的平均能量, 可以将其动能对质心系中二次发射粒子的双微分截面的平均后得到, 其中 V_{C} 是质心运动速度,

$$\bar{\varepsilon}_2^l = \frac{m_2}{2} \int (\boldsymbol{v}_2^c + \boldsymbol{V}_{\mathrm{C}})^2 \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_2^c \mathrm{d}\Omega_2^c} \mathrm{d}\varepsilon_2^c \mathrm{d}\Omega_2^c \tag{5.4.67}$$

注意到在质心系中, 二次发射粒子的出射方向与中子入射方向 (即质心运动 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{C}}$ 方向) 之夹角为 θ_2^c. 由速度合成关系将其在实验室系中的动能用在质心系中的能量表示出来, 得到

$$\bar{\varepsilon}_2^l = \int \left(\varepsilon_2^c + \frac{m_{\mathrm{n}} m_2 E_{\mathrm{n}}}{M_{\mathrm{C}}^2} + 2 \frac{\sqrt{m_{\mathrm{n}} m_2 E_{\mathrm{n}} \varepsilon_2^c}}{M_{\mathrm{C}}} \cos\theta_2^c \right) \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_2^c \mathrm{d}\Omega_2^c} \mathrm{d}\varepsilon_2^c \mathrm{d}\Omega_2^c \tag{5.4.68}$$

再将双微分截面的 Legendre 展开式 (5.4.48) 代入后, 并注意到 $P_1(\cos\theta_2^c) = \cos\theta_2^c$, 利用 Legendre 多项式的正交归一性, 在 (5.4.68) 式中的第三项对角度积分后仅剩下 $l = 1$ 的分波, 这时 (5.4.68) 式被简化为

$$\bar{\varepsilon}_2^l = \frac{m_{\mathrm{n}} m_2 E_{\mathrm{n}}}{M_{\mathrm{C}}^2} + \bar{\varepsilon}_2^c + 2 \int_{\varepsilon_{2,\min}^c}^{\varepsilon_{2,\max}^c} \frac{\sqrt{m_{\mathrm{n}} m_2 E_{\mathrm{n}} \varepsilon_2^c}}{M_{\mathrm{C}}} f_1^c(\varepsilon_2^c) \mathrm{d}\varepsilon_2^c \tag{5.4.69}$$

在 (5.4.69) 式给出的 Legendre 展开系数 $l = 1$ 分波中, 代入 (5.4.32) 式对 η 的表示, 得到

$$f_1^c(\varepsilon_2^c) = -\frac{\eta}{4\gamma\varepsilon_2^r} f_1^c(m_1) = -\sqrt{\frac{\varepsilon_2^r}{\varepsilon_2^c}} \frac{(\varepsilon_2^c/\varepsilon_2^r - 1 + \gamma^2)}{8\gamma^2\varepsilon_2^r} f_1^c(m_1) \tag{5.4.70}$$

将 (5.4.70) 式代入 (5.4.69) 式, 其中第三项积分变为

$$2 \int_{\varepsilon_{2,\min}^c}^{\varepsilon_{2,\max}^c} \frac{\sqrt{m_{\mathrm{n}} m_2 E_{\mathrm{n}} \varepsilon_2^c}}{M_{\mathrm{C}}} f_1^c(\varepsilon_2^c) \mathrm{d}\varepsilon_2^c = -\frac{\sqrt{m_{\mathrm{n}} m_2 E_{\mathrm{n}}}}{4M_{\mathrm{C}}\gamma^2\sqrt{\varepsilon_2^r}} f_1^c(m_1) \int_{\varepsilon_{2,\min}^c}^{\varepsilon_{2,\max}^c} \left(\frac{\varepsilon_2^c}{\varepsilon_2^r} - 1 + \gamma^2 \right) \mathrm{d}\varepsilon_2^c \tag{5.4.71}$$

完成对 ε_2^c 的积分后, 并将积分上下限代入后得到

$$\int_{\varepsilon_{2,\min}^c}^{\varepsilon_{2,\max}^c} \left(\frac{\varepsilon_2^c}{\varepsilon_2^r} - 1 + \gamma^2 \right) \mathrm{d}\varepsilon_2^c = \left[\frac{(\varepsilon_2^c)^2}{2\varepsilon_2^r} - (1-\gamma^2)\varepsilon_2^c \right]_{\varepsilon_{2,\min}^c}^{\varepsilon_{2,\max}^c} = 8\gamma^3\varepsilon_2^r \tag{5.4.72}$$

由此得到第三项的积分结果是

$$2 \int_{\varepsilon_{2,\min}^c}^{\varepsilon_{2,\max}^c} \frac{\sqrt{m_{\mathrm{n}} m_2 E_{\mathrm{n}} \varepsilon_2^c}}{M_{\mathrm{C}}} f_1^c(\varepsilon_2^c) \mathrm{d}\varepsilon_2^c = -2 \frac{m_2}{M_{\mathrm{C}}} \sqrt{\frac{m_{\mathrm{n}} E_{\mathrm{n}}}{M_1}} \sqrt{E_1^c} f_1^c(m_1) \tag{5.4.73}$$

将这个结果代入到 (5.4.69) 式, 得到在实验室系中二次发射粒子的平均能量为

$$\bar{\varepsilon}_2^l = \frac{m_{\mathrm{n}} m_2 E_{\mathrm{n}}}{M_{\mathrm{C}}^2} + \bar{\varepsilon}_2^c - 2 \frac{m_2}{M_{\mathrm{C}}} \sqrt{\frac{m_{\mathrm{n}} E_{\mathrm{n}}}{M_1}} \sqrt{E_1^c} f_1^c(m_1) \tag{5.4.74}$$

用同样的推导过程可以得到实验室系中二次剩余核的平均能量为

$$\bar{E}_2^l = \frac{m_{\mathrm{n}} M_2 E_{\mathrm{n}}}{M_{\mathrm{C}}^2} + \bar{E}_2^c - 2 \frac{M_2}{M_{\mathrm{C}}} \sqrt{\frac{m_{\mathrm{n}} E_{\mathrm{n}}}{M_1}} \sqrt{E_1^c} f_1^c(m_1) \tag{5.4.75}$$

在实验室系中粒子和剩余核的能量之和是

$$\bar{\varepsilon}_2^l + \bar{E}_2^l = \frac{m_\mathrm{n} M_1 E_\mathrm{n}}{M_\mathrm{C}^2} + \bar{\varepsilon}_1^c + \bar{E}_2^c - \frac{2\sqrt{m_1 m_\mathrm{n} E_\mathrm{n} \varepsilon_1^c}}{M_\mathrm{C}} f_1^c(m_1) \tag{5.4.76}$$

在发射第二次粒子后的核系统的能量是由四个部分组成, 它们分别是一次粒子发射能量、二次粒子发射和其剩余核的能量, 以及二次粒子发射后的剩余激发能, 各种能量之和为

$$E_{\mathrm{total}}^l = \bar{\varepsilon}_1^l + \bar{\varepsilon}_2^l + \bar{E}_2^l + E_{k_2} \tag{5.4.77}$$

可以看出, (5.4.76) 式中与 $f_1^c(m_1)$ 有关的项恰好与由 (5.2.3) 式给出的一次发射粒子能量 $\bar{\varepsilon}_1^l$ 中的 $f_1^c(m_1)$ 项相消. 由此得到

$$E_{\mathrm{total}}^l = \frac{m_\mathrm{n} E_\mathrm{n}}{M_\mathrm{C}} + \varepsilon_1^c + \bar{\varepsilon}_2^c + \bar{E}_2^c + E_{k_2} \tag{5.4.78}$$

由 (5.2.1) 式、(5.4.65) 和 (5.4.66) 式得到

$$\varepsilon_1^c + \bar{\varepsilon}_2^c + \bar{E}_2^c = E^* - B_1 - B_2 - E_{k_2} \tag{5.4.79}$$

利用激发能公式 (1.1.3) 式, 得到在实验室系中的总释放能量为

$$E_{\mathrm{total}}^l = E_\mathrm{n} + B_\mathrm{n} - B_1 - B_2 = E_\mathrm{n} + Q \tag{5.4.80}$$

其中有序二次粒子发射核反应过程的 Q 值为

$$Q = B_\mathrm{n} - B_1 - B_2 \tag{5.4.81}$$

由此证明了, 在上述两次粒子有序发射的核反应过程中, 由 (5.4.49) 式给出的二次粒子发射的 Legendre 多项式展开系数的表示的归一化双微分截面公式 (5.4.48) 式是能够严格保证能量平衡 (Zhang et al., 1999).

下面再考虑一次粒子发射后剩余核发生两体崩裂的核反应过程, 与上述两次粒子有序发射相比, 只是二次粒子的环型能谱表示改变了, 其他能量表示完全一样. 这时, 在质心系中, 一次粒子发射后剩余核两体崩裂过程中 m_2 粒子的平均能量为

$$\bar{\varepsilon}_2^c = \frac{M_2}{M_1}(E_{k_1} + Q_2) + \frac{m_2}{M_1} E_1^c \tag{5.4.82}$$

其中 Q_2 是剩余核两体崩裂的 Q 值. 因而 M_2 粒子两体崩裂的平均能量为

$$\bar{E}_2^c = \frac{m_2}{M_1}(E_{k_1} + Q_2) + \frac{M_2}{M_1} E_1^c \tag{5.4.83}$$

于是得到剩余核两体崩裂在质心系中的动能之和为

$$\bar{\varepsilon}_2^c + \bar{E}_2^c = E_{k_1} + Q_2 + E_1^c \tag{5.4.84}$$

因此, 加上第一粒子的动能 (5.2.1) 式, 在实验室系中的总释放能量为

$$E_{\text{total}}^{l}=\frac{m_{\mathrm{n}}E_{\mathrm{n}}}{M_{\mathrm{C}}}+\varepsilon_{1}^{c}+\bar{\varepsilon}_{2}^{c}+\bar{E}_{2}^{c}=E_{\mathrm{n}}+B_{\mathrm{n}}-B_{1}+Q_{2}=E_{\mathrm{n}}+Q \tag{5.4.85}$$

对于发射一次粒子后发生两体崩裂的核反应过程, 它的 Q 值为

$$Q=B_{\mathrm{n}}-B_{1}+Q_{2} \tag{5.4.86}$$

因此, 对于发射一次粒子后再发生两体崩裂的核反应过程, 也能够严格保证能量平衡条件.

以上我们考虑的都是中子入射的情况, 上述公式与结论很容易推广到其他粒子入射的情况. 在实验室系中能量的统计平均值 (5.4.74) 和 (5.4.75) 式给出的实验室系中二次发射粒子的能量表示都包含了 $f_1^c(m_1)$ 分波, 这是预平衡反应特征.

回忆在最早的蒸发模型中, 都假定各向同性分布, 对每个 $l>1$ 的分波都为 0; 而在考虑了角动量和宇称守恒的 Hauser-Feshbach 理论中, 平衡态复合核的发射只有 $l=0,2,4,\cdots$ 偶数分波, 在质心系中, 发射粒子的角分布都是关于 90° 对称的, 不包含 $l=1$ 的分波. $l=1$ 的分波只是出现在粒子的预平衡发射中, 这是预平衡核反应的特征之一. 与角动量有关的激子模型则既能保证角动量宇称守恒又能给出预平衡反应的粒子发射特征, 这正是这一新轻核反应理论模型的特色. 分波系数 $f_1^c(m_1)$ 的值越大, 表明一次发射粒子的超前性越强; 同时, 更强的一次粒子发射, 一定造成剩余核在质心系中更强的反冲. 因此在质心系中, 无论是二次发射粒子还是二次剩余核都有向后反冲的行为. 这可以由 (5.4.82) 式和 (5.4.83) 式给出的二次发射粒子和二次剩余核的能量 $\bar{\varepsilon}_2^l$ 和 $\bar{E}_2^l$ 公式中看出, 在包含 $f_1^c(m_1)$ 的项前面都有一个负号, 表明二次粒子发射在质心系中是朝后性的.

当然, 要描述好双微分截面行为, 就需要考虑所有的 Legendre 展开系数的贡献. 但是, 由统计平均得到的结果中看出, 对保持能量平衡而言, 仅 $l=1$ 的 Legendre 展开系数起着关键作用. 这种结果会在后面有关能量平衡的问题中屡屡出现.

需要特别指出的是, 在轻核反应中还会出现双两体崩裂的核反应过程 (Zhang et al., 1999), 例如, $^{9}\mathrm{Be}(\mathrm{n},{}^{5}\mathrm{He}){}^{5}\mathrm{He}$ 核反应过程, 其中每个 $^{5}\mathrm{He}$ 都会自发分裂为一个中子和一个 α 粒子, 由于 $^{5}\mathrm{He}$ 是费米子, 在考虑全同粒子的交换反对称性之后, 就会消去奇数分波, 仅有偶数分波存在. 又如 $^{12}\mathrm{C}(\mathrm{n},{}^{8}\mathrm{Be}){}^{5}\mathrm{He}$ 核反应过程, 出射的 $^{5}\mathrm{He}$ 会自发分裂为一个中子和一个 α 粒子, 而剩余核 $^{8}\mathrm{Be}$ 也会自发分裂为两个 α 粒子. 这时 $^{8}\mathrm{Be}$ 与 $^{5}\mathrm{He}$ 不是全同粒子, 可以存在奇数分波. 这种非有序粒子发射过程又是轻核反应的一个特征. 对于发射一个粒子后剩余核发生双两体崩裂的核反应过程, 上面的结果可以适用. 这种核反应给出由图 5.8 给出示意图.

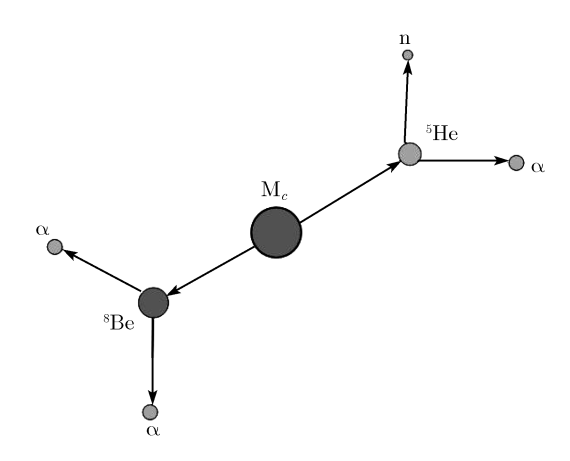


图 5.8　发射一次粒子后剩余核发生双两体崩裂的核反应过程示意图

下面讨论这种特殊情况, 即双两体崩裂的核反应过程. 例如, 在 ^{12}C(n, ^{8}Be)^{5}He 核反应过程中, 剩余核 ^{8}Be 自发分裂为两个 α 粒子, 这时在两体崩裂过程中, 相当于发射二次粒子的质量与其剩余核的质量相同, 即 $m_2 = M_2$. 在质心系中双微分截面中的每个 α 粒子的 Legendre 多项式展开系数由 (5.4.54) 式给出, 每个 α 粒子在质心系中携带的能量为

$$\varepsilon_2^c = \frac{m_2}{M_1}(Q_2 + E_{k_1}) + \frac{m_2}{M_1}E_1^c \tag{5.4.87}$$

每个 α 粒子在实验室系中携带的能量为

$$\varepsilon_2^l = \bar{E}_2^l = \frac{m_{\rm n} m_2 E_{\rm n}}{M_{\rm C}^2} + \varepsilon_2^c - 2\frac{m_2}{M_{\rm C}}\sqrt{\frac{m_{\rm n}E_{\rm n}}{M_1}}\sqrt{E_1^c}f_1^c(m_1) \tag{5.4.88}$$

在质心系中两个 α 粒子携带的能量为

$$\varepsilon_2^c + \bar{E}_2^c = Q_2 + E_1^c + E_{k_1} \tag{5.4.89}$$

当出现 ^{5}He 粒子发射时, ^{5}He 会自发崩裂为一个中子和一个 α 粒子, 已经在理论上研究了 ^{5}He 发射过程的双微分截面谱的理论表示形式 (Zhang, 2003a, 2004). 本节以下部分专门研究一次发射粒子是 ^{5}He 的情况, 从 ^{5}He 崩裂出的中子质量记为 $m_{\rm n}$, α 粒子的质量记为 m_α, 下面分别用下标 n 和 α 标记与崩裂中子和 α 粒子有关的物理量. 这时一次发射粒子质量 m_1 就是 ^{5}He 的质量, 且有 $m_{\rm n} + m_\alpha = m_1$. 已知 ^{5}He 崩裂的 Q 值为 $Q_5 = 0.894$MeV, 在剩余核运动系中, 崩裂中子和 α 粒子的能量是确定的, 分别为

$$\varepsilon_{\rm n}^r = \frac{m_\alpha}{m_1}Q_5, \quad \varepsilon_\alpha^r = \frac{m_{\rm n}}{m_1}Q_5 \tag{5.4.90}$$

在质心系中, ^{5}He 的整体发射能量和剩余核的能量由 (5.2.1) 给出. 从 ^{5}He 崩裂出的中子的能量范围是 $\varepsilon^c_{\mathrm{n,min}} \leqslant \varepsilon^c_{\mathrm{n}} \leqslant \varepsilon^c_{\mathrm{n,max}}$, 能量边界值分别为

$$\varepsilon^c_{\mathrm{n,min}} = \varepsilon^r_{\mathrm{n}}(1-\gamma_{\mathrm{n}})^2, \quad \varepsilon^c_{\mathrm{n,max}} = \varepsilon^r_{\mathrm{n}}(1+\gamma_{\mathrm{n}})^2 \tag{5.4.91}$$

其中

$$\gamma_{\mathrm{n}} = \sqrt{\frac{m_{\mathrm{n}}\varepsilon^c_1}{m_1\varepsilon^r_{\mathrm{n}}}} \tag{5.4.92}$$

在质心系中, 从 ^{5}He 崩裂中子的归一化双微分截面表示由 (5.4.48) 式给出, 其中 Legendre 展开系数为 (参见 (5.4.49) 式)

$$f^c_l(\varepsilon^c_{\mathrm{n}}) = \frac{1}{4\gamma_{\mathrm{n}}\varepsilon^r_{\mathrm{n}}} f^c_l(m_1)P_l(\eta_{\mathrm{n}}) \tag{5.4.93}$$

其中

$$\eta_{\mathrm{n}} = \sqrt{\frac{\varepsilon^r_{\mathrm{n}}}{\varepsilon^c_{\mathrm{n}}}}\frac{\varepsilon^c_{\mathrm{n}}/\varepsilon^r_{\mathrm{n}} - 1 + \gamma^2_{\mathrm{n}}}{2\gamma_{\mathrm{n}}} \tag{5.4.94}$$

需要特别注意的是, 在 Legendre 展开系数中, 不像从反冲剩余核发射粒子那样, 存在 $(-1)^l$ 因子. 对于发射 ^{5}He, 其崩裂的中子和 α 粒子在质心系中都是朝前的. 在质心系中, 从 ^{5}He 崩裂出的 α 粒子的能量范围是 $\varepsilon^c_{\alpha,\mathrm{min}} \leqslant \varepsilon^c_{\alpha} \leqslant \varepsilon^c_{\alpha,\mathrm{max}}$, 能量边界值分别为

$$\varepsilon^c_{\alpha,\mathrm{min}} = \varepsilon^r_{\alpha}(1-\gamma_{\alpha})^2, \quad \varepsilon^c_{\alpha,\mathrm{max}} = \varepsilon^r_{\alpha}(1+\gamma_{\alpha})^2 \tag{5.4.95}$$

其中

$$\gamma_{\alpha} = \sqrt{\frac{m_{\alpha}\varepsilon^c_1}{m_1\varepsilon^r_{\alpha}}} \tag{5.4.96}$$

在质心系中, 崩裂 α 粒子的归一化双微分截面表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon^c_{\alpha}\mathrm{d}\Omega^c_{\alpha}} = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} f^c_l(\varepsilon^c_{\alpha})P_l(\cos\theta^c_{\alpha}) \tag{5.4.97}$$

同样得到 Legendre 展开系数为

$$f^c_l(\varepsilon^c_{\alpha}) = \frac{1}{4\gamma_{\alpha}\varepsilon^r_{\alpha}} f^c_l(m_1)P_l(\eta_{\alpha}) \tag{5.4.98}$$

这里

$$\eta_{\alpha} = \sqrt{\frac{\varepsilon^r_{\alpha}}{\varepsilon^c_{\alpha}}}\frac{\varepsilon^c_{\alpha}/\varepsilon^r_{\alpha} - 1 + \gamma^2_{\alpha}}{2\gamma_{\alpha}} \tag{5.4.99}$$

在质心系中, 它们携带的平均能量分别表示为 $\bar{\varepsilon}^c_{\mathrm{n}}$ 和 $\bar{\varepsilon}^c_{\alpha}$, 对于崩裂中子有

$$\bar{\varepsilon}^c_{\mathrm{n}} = \frac{m_{\alpha}}{m_1}Q_5 + \frac{m_{\mathrm{n}}}{m_1}E^c_1 \tag{5.4.100}$$

而对于崩裂 α 粒子, 平均能量为

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha}^{c}=\frac{m_{\mathrm{n}}}{m_1}Q_5+\frac{m_{\alpha}}{m_1}E_1^c \tag{5.4.101}$$

这时在质心系中崩裂的中子和 α 粒子携带能量总和为

$$\bar{\varepsilon}_{\mathrm{n}}^{c}+\bar{\varepsilon}_{\alpha}^{c}=Q_5+E_1^c \tag{5.4.102}$$

在实验室系中, 发射粒子的平均能量是对其双微分截面的平均值给出, 注意到 ^{5}He 为一次发射粒子, 在质心系的发射角为 θ_1^c, 将速度转换为能量后得到

$$\bar{\varepsilon}_{\mathrm{n}}^{l}=\int\left(\varepsilon_{\mathrm{n}}^{c}+\frac{m_{\mathrm{n}}m_{\mathrm{n}}E_{\mathrm{n}}}{M_{\mathrm{C}}^2}+2\frac{\sqrt{m_{\mathrm{n}}m_{\mathrm{n}}E_{\mathrm{n}}\varepsilon_{\mathrm{n}}^{c}}}{M_{\mathrm{C}}}\cos\theta_{\mathrm{n}}^{c}\right)\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{n}}^{c}\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{n}}^{c}}\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{n}}^{c}\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{n}}^{c} \tag{5.4.103}$$

将崩裂中子的归一化双微分截面代入 (5.4.103) 式, 得到

$$\bar{\varepsilon}_{\mathrm{n}}^{l}=\frac{m_{\mathrm{n}}m_{\mathrm{n}}E_{\mathrm{n}}}{M_{\mathrm{C}}^2}+\bar{\varepsilon}_{\mathrm{n}}^{c}+2\int_{\varepsilon_{\mathrm{n,min}}^{c}}^{\varepsilon_{\mathrm{n,max}}^{c}}\frac{\sqrt{m_{\mathrm{n}}m_{\mathrm{n}}E_{\mathrm{n}}\varepsilon_{\mathrm{n}}^{c}}}{M_{\mathrm{C}}}f_1^c(\varepsilon_{\mathrm{n}}^{c})\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{n}}^{c} \tag{5.4.104}$$

将由 (5.4.93) 式中 $l=1$ 分波的 Legendre 展开系数和 η_{n} 代入 (5.4.104) 式后, 完成对 $\varepsilon_{\mathrm{n}}^{c}$ 的积分, 就会得到 (5.4.104) 式中第三项的积分结果为

$$2\int_{\varepsilon_{\mathrm{n,min}}^{c}}^{\varepsilon_{\mathrm{n,max}}^{c}}\frac{\sqrt{m_{\mathrm{n}}m_{\mathrm{n}}E_{\mathrm{n}}\varepsilon_{\mathrm{n}}^{c}}}{M_{\mathrm{C}}}f_1^c(\varepsilon_{\mathrm{n}}^{c})\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{n}}^{c}=\frac{2}{M_{\mathrm{C}}}\sqrt{m_{\mathrm{n}}m_{\mathrm{n}}E_{\mathrm{n}}\varepsilon_{\mathrm{n}}^{r}}\gamma_{\mathrm{n}} \tag{5.4.105}$$

再将 (5.4.92) 式的 γ_{n} 之值代入, 就得到了实验室系中 ^{5}He 崩裂中子的平均能量为

$$\bar{\varepsilon}_{\mathrm{n}}^{l}=\frac{m_{\mathrm{n}}m_{\mathrm{n}}E_{\mathrm{n}}}{M_{\mathrm{C}}^2}+\bar{\varepsilon}_{\mathrm{n}}^{c}+2\frac{m_{\mathrm{n}}}{M_{\mathrm{C}}m_1}\sqrt{m_1m_{\mathrm{n}}E_{\mathrm{n}}}\sqrt{\varepsilon_1^c}f_1^c(m_1) \tag{5.4.106}$$

用同样的推导过程, 得到实验室系中从 ^{5}He 崩裂出的 α 粒子的平均能量为

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha}^{l}=\frac{m_{\mathrm{n}}m_{\alpha}E_{\mathrm{n}}}{M_{\mathrm{C}}^2}+\bar{\varepsilon}_{\alpha}^{c}+2\frac{m_{\alpha}}{M_{\mathrm{C}}m_1}\sqrt{m_1m_{\mathrm{n}}E_{\mathrm{n}}}\sqrt{\varepsilon_1^c}f_1^c(m_1) \tag{5.4.107}$$

因此, 发射 ^{5}He 后, 在实验室系中, 它崩裂的中子和 α 粒子的平均能量之和为

$$\bar{\varepsilon}_{\mathrm{n}}^{l}+\bar{\varepsilon}_{\alpha}^{l}=\frac{m_{\mathrm{n}}m_1E_{\mathrm{n}}}{M_{\mathrm{C}}^2}+\bar{\varepsilon}_{\mathrm{n}}^{c}+\bar{\varepsilon}_{\alpha}^{c}+\frac{2}{M_{\mathrm{C}}}\sqrt{m_1m_{\mathrm{n}}E_{\mathrm{n}}}\sqrt{\varepsilon_1^c}f_1^c(m_1) \tag{5.4.108}$$

由 (5.4.102) 式得到

$$\bar{\varepsilon}_{\mathrm{n}}^{c}+\bar{\varepsilon}_{\alpha}^{c}=Q_5+\varepsilon_1^c=Q_5+\frac{m_1}{M_1}E_1^c \tag{5.4.109}$$

对于双两体崩裂的核反应 ^{12}C(n, ^{8}Be)^{5}He 过程, 发射粒子 ^{5}He 后, 剩余核 M_1 为 ^{8}Be, 它自发分裂为两个 α 粒子, 在实验室系中它们的平均能量之和为

$$\bar{\varepsilon}_2^{l}+\bar{E}_2^{l}=\frac{m_{\mathrm{n}}M_1E_{\mathrm{n}}}{M_{\mathrm{C}}^2}+Q_2+E_1^c+E_{k_1}-\frac{2}{M_{\mathrm{C}}}\sqrt{m_1m_{\mathrm{n}}E_{\mathrm{n}}}\sqrt{\varepsilon_1^c}f_1^c(m_1) \tag{5.4.110}$$

可以看出, 在实验室系中, (5.4.108) 式的最后一项, 即 ^{5}He 崩裂中包含 $f_1^c(m_1)$ 的朝前项, 恰好与剩余核 ^{8}Be 崩裂的反冲项, 即 (5.4.110) 式的最后一项相抵消. 因此, 双两体崩裂产生的四个粒子在实验室系中携带的平均能量之和为

$$E_{\text{total}}^l = \bar{\varepsilon}_2^l + \bar{E}_2^l + \bar{\varepsilon}_{\text{n}}^l + \bar{E}_{\alpha}^l = \frac{m_{\text{n}} E_{\text{n}}}{M_{\text{C}}} + Q_2 + E_1^c + Q_5 + \varepsilon_1^c + E_{k_1} \tag{5.4.111}$$

利用 (5.4.84) 式, 这里的 B_1 就是 ^{5}He 在复合核中的结合能, 于是 (5.4.111) 式可进一步简化为

$$E_{\text{total}}^l = E_{\text{n}} + B_{\text{n}} - B_1 + Q_2 + Q_5 = E_{\text{n}} + Q \tag{5.4.112}$$

这种双两体崩裂核反应过程的 Q 值为 $Q = B_{\text{n}} - B_1 + Q_2 + Q_5$, 因此, 在双两体崩裂核反应过程的能量平衡严格成立也被证明.

除此之外, 还存在全同的双两体崩裂的核反应过程. 这是 ^{9}Be(n, ^{5}He)^{5}He 的核反应过程, 其中每个 ^{5}He 都会自发崩裂为一个中子和一个 α 粒子, 如果只考虑两个崩裂的 ^{5}He 都处于基态的情况, 由于全同粒子效应, 双微分截面的 Legendre 展开中仅有 l 为偶数的分波存在. 在这种特殊情况下, 两个 ^{5}He 在质心系中分别朝相反方向出射, 在采用各向同性近似时, 由前面给出的结果, 得到的归一化的崩裂中子和 α 粒子能谱分别为

$$f_0^c(\varepsilon_{\text{n}}^c) = \frac{1}{4\gamma_{\text{n}}\varepsilon_{\text{n}}^r}, \quad f_0^c(\varepsilon_{\alpha}^c) = \frac{1}{4\gamma_{\alpha}\varepsilon_{\alpha}^r} \tag{5.4.113}$$

在总的出射中子和 α 粒子能谱中, 都要乘上因子 2. 这时在质心系中每个 ^{5}He 释放的能量为

$$\bar{\varepsilon}_{\text{n}}^c + \bar{\varepsilon}_{\alpha}^c = Q_5 + \varepsilon_1^c \tag{5.4.114}$$

而在实验室系中, 每个 ^{5}He 释放的平均能量为

$$\bar{\varepsilon}_{\text{n}}^l + \bar{\varepsilon}_{\alpha}^l = \frac{m_{\text{n}} m_1 E_{\text{n}}}{M_{\text{C}}^2} + Q_5 + \varepsilon_1^c \tag{5.4.115}$$

对于双 ^{5}He 崩裂过程:

$$\varepsilon_1^c = \frac{1}{2}(E^* - B_1) \tag{5.4.116}$$

因此两个 ^{5}He 在实验室系释放的总能量为

$$E_{\text{total}}^l = \frac{m_{\text{n}} E_{\text{n}}}{M_{\text{C}}} + 2Q_5 + E^* - B_1 = E_{\text{n}} + B_{\text{n}} - B_1 + 2Q_5 = E_{\text{n}} + Q \tag{5.4.117}$$

对 ^{9}Be(n, ^{5}He)^{5}He 核反应过程, 其反应 Q 值为 $Q = B_{\text{n}} - B_1 + 2Q_5$, 因此也严格保持了能量平衡.

上面给出了发射 ^{5}He 的反应过程中, ^{5}He 自发崩裂为一个中子和一个 α 粒子的双微分截面谱. 对于由 14MeV 中子诱发一些 1p 壳轻核发射 ^{5}He 的核反应, 只

考虑 ^{5}He 处于基态的情况下, 对从 ^{5}He 崩裂出的中子能量做了计算, 其结果列在表 5.3 中. 由表中的结果看出, ^{5}He 崩裂中子的能量都是在低能区域. 当剩余核处于激发态时, 这个崩裂中子的能量区域还会更低. 但是, 这个崩裂中子谱的能量宽度在质心系中是宽度为兆电子伏特数量级的连续谱.

表 5.3　$E_n = 14$MeV 中子的 (n, ^{5}He) 轻核反应中, ^{5}He 崩裂中子的能谱区域

	$(\varepsilon^c_{\mathrm{n,min}} - \varepsilon^c_{\mathrm{n,max}})$/MeV	$\Delta\varepsilon$/MeV
^{9}Be	0.013~3.265	3.25
^{10}B	0.016~2.785	2.77
^{11}B	0.009~1.777	1.77
^{12}C	0.008~2.034	2.03
^{14}N	0.105~0.759	0.65
^{16}O	0.092~1.949	1.86

下面继续讨论有关 ^{5}He 发射的核反应过程. 首先讨论发射 ^{5}He 之后, 剩余核处于激发态, 并且都以 γ 退激方式结束核反应的情况. 例如, ^{10}B(n, ^{5}He)^{6}Li* 到 ^{6}Li 的第 2 激发态, ^{11}B(n, ^{5}He)^{7}Li* 到 ^{7}Li 的第 1 激发态, ^{14}N(n, ^{5}He)^{10}B* 到 ^{10}B 的前五个激发态, ^{16}O(n, ^{5}He)^{12}C* 到 ^{12}C 的前两个激发态等. 由第 1 章得知, 这些剩余核处于上述能级都只能以 γ 退激方式结束核反应. 这时, 剩余核的能量 $\bar{E}^c_1$ 和 $\bar{E}^l_1$ 分别由 (5.2.1) 和 (5.2.6) 式给出. (5.4.115) 式已经给出 ^{5}He 崩裂为一个中子和一个 α 粒子在实验室系中的能量之和, 加上发射 ^{5}He 后的剩余核的退激 γ 射线能量 E_{k_1} 在内的总释放能量为

$$E^l_{\mathrm{total}} = \bar{E}^l_1 + \bar{\varepsilon}^l_{\mathrm{n}} + \bar{\varepsilon}^l_{\alpha} + E_{k_1} = \frac{m_{\mathrm{n}} E_{\mathrm{n}}}{M_{\mathrm{C}}} + E^c_1 + \varepsilon^c_1 + O_5 + E_{k_1} \tag{5.4.118}$$

由 (5.2.1) 式所表示的 ε^c_1 和 E^c_1 代入之后, 得到

$$E^l_{\mathrm{total}} = \frac{m_{\mathrm{n}} E_{\mathrm{n}}}{M_{\mathrm{C}}} + E^* - B_1 + O_5 = E_{\mathrm{n}} + B_{\mathrm{n}} - B_1 + O_5 = E_{\mathrm{n}} + Q \tag{5.4.119}$$

该核反应过程的 Q 值为 $Q = B_{\mathrm{n}} - B_1 + O_5$, 因此也严格保持了能量平衡.

另外, 若在发射 ^{5}He 之后, 剩余核处于较高激发态时, 可以继续发射次级粒子. 有的再发射一个粒子后以 γ 退激方式结束核反应, 有的按有序方式再发射两个粒子后以 γ 退激方式结束核反应, 或有序发射两个粒子后剩余核发生两体崩裂等反应过程. 关于剩余核的这些核反应过程的运动学公式前面已经给出, 因此这里不再一一写出, 只要将发射粒子 m_1 的双微分谱换成上述 ^{5}He 发射后崩裂为一个中子和一个 α 粒子的双微分谱就可以了. 以上就是对分立能级到分立能级粒子发射运动学 (D to D) 的讨论.

5.5　分立能级到连续谱的发射过程

下面讨论从分立能级到连续谱粒子发射过程的运动学 ($D\ to\ C$). 例如, 复合核发射第一个粒子后, 剩余核发生三体崩裂的情况, 因为三体崩裂过程中出射粒子的能谱总是处于连续状态的. 在轻核反应的这种类型的过程中, 剩余核会发生三体崩裂的总是 ^{6}He 的第 1 激发态, 它是不稳定核, 基态通过 β 衰变到 ^{6}Li, 而第 1 激发态处于中子发射阈之下, 不能发射任何粒子, 只能通过三体崩裂来结束反应过程, 在 ^{6}He 的第 2 激发态以上就允许发射中子. 例如, $^6\mathrm{Li(n,p)}^6\mathrm{He}^*$, $^7\mathrm{Li(n,d)}^6\mathrm{He}^*$, $^9\mathrm{Be(n,\alpha)}^6\mathrm{He}^*$ 等核反应过程, 当 ^{6}He 处于第 1 激发态时, 是通过三体崩裂过程 $^6\mathrm{He}^* \to \mathrm{n}+\mathrm{n}+\alpha$ 结束核反应过程, 这也是一种非有序的粒子发射过程. 由于在质心系中, 一次粒子发射后的剩余核处在一个确定的能级上, 所以这种核反应过程属于从分立能级到连续谱的粒子发射过程.

在质心系中, 一次发射粒子的能量为

$$\varepsilon_1^c = \frac{M_1}{M_\mathrm{C}}(E^* - B_1 - E_\mathrm{brk}) \tag{5.5.1}$$

一次粒子发射的剩余核的能量为

$$E_1^c = \frac{m_1}{M_\mathrm{C}}(E^* - B_1 - E_\mathrm{brk}) \tag{5.5.2}$$

其中, $E_\mathrm{brk} = 1.797\mathrm{MeV}$ 是 $^6\mathrm{He}^*$ 第 1 激发态能量, 也就是在三体崩裂过程中释放的总动能; B_1 是发射第一粒子在复合核中的结合能. 因此这是有阈反应, 要求 $E^* \geqslant B_1 + E_\mathrm{brk}$ 时才能开放这种反应.

由 5.3 节对三体崩裂核反应过程的讨论得知, 三体崩裂的归一化连续能谱形式为由 (5.3.39) 式给出, 这时崩裂粒子最大能量为

$$\varepsilon_{i,\max} = \frac{M_1 - m_i}{M_1}E_\mathrm{brk}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{5.5.3}$$

图 5.9 给出了这种发射第一个粒子后, 剩余核发生三体崩裂的示意图.

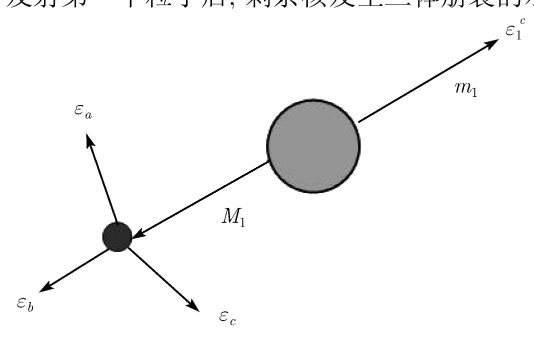


图 5.9　一次粒子发射后剩余核三体崩裂过程示意图

应该注意到, 这里与 5.3 节的内容有所不同, 现在发生三体崩裂的核是发射一次粒子后的剩余核 ^{6}He, 其质量为 M_1(相当于 5.3 节中的 M_{C}). 对于发射一次粒子后剩余核发生三体崩裂的核反应过程, 归一化双微分截面的标准形式为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_i^c\mathrm{d}\Omega_i^c}=\frac{1}{4\pi}\sum_l(2l+1)f_l(\varepsilon_i^c)P_l(\cos\theta_i^c),\quad i=1,2,3 \tag{5.5.4}$$

在剩余核运动系中, 三体崩裂出射的粒子是各向同性的, 其双微分截面表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_i^r\mathrm{d}\Omega_i^r}=\frac{S(\varepsilon_i^r)}{4\pi} \tag{5.5.5}$$

在质心系中, 对应的双微分截面为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_i^c\mathrm{d}\Omega_i^c}=\sqrt{\frac{\varepsilon_i^c}{\varepsilon_i^r}}\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_i^r\mathrm{d}\Omega_i^r}=\sqrt{\frac{\varepsilon_i^c}{\varepsilon_i^r}}\frac{S(\varepsilon_i^r)}{4\pi} \tag{5.5.6}$$

对一次粒子发射的剩余核 ^{6}He 的角分布平均后, 得到三体崩裂粒子的平均双微分截面表示

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_i^c\mathrm{d}\Omega_i^c}=\int\sqrt{\frac{\varepsilon_i^c}{\varepsilon_i^r}}\frac{S(\varepsilon_i^r)}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_{M_1}^c}\mathrm{d}\Omega_{M_1}^c \tag{5.5.7}$$

而一次粒子发射的剩余核的角分布由 (5.4.5) 式给出. 记 θ 表示 $\boldsymbol{v}_{M_1}^c$ 与 $\boldsymbol{v}_i^c$ 之间的夹角, 这时可以利用 Legendre 多项式的合成公式 (王竹溪等, 1965):

$$\begin{aligned}P_l(\cos\theta_{M_1}^c)=&P_l(\cos\theta)P_l(\cos\theta_i^c)+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\\&\times P_l^m(\cos\theta)P_l^m(\cos\theta_i^c)\cos m(\varphi-\varphi_i^c)\end{aligned} \tag{5.5.8}$$

在 (5.5.7) 式中对 $\Omega_{M_1}^c$ 的积分可以用对 $\mathrm{d}\cos\theta\mathrm{d}\varphi$ 代替. 对 φ 的积分使得 (5.5.8) 式中的带 m 的项消失, 第一项仅出现因子 2π. 这时 (5.5.7) 式变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_i^c\mathrm{d}\Omega_i^c}=\int\sqrt{\frac{\varepsilon_i^c}{\varepsilon_i^r}}\frac{S(\varepsilon_i^r)}{8\pi}\sum_l(2l+1)(-1)^lf_l^c(m_1)P_l(\cos\theta_i^c)P_l(\cos\theta)\mathrm{d}\cos\theta \tag{5.5.9}$$

在 (5.5.4) 式归一化双微分截面的标准形式下, 展开系数可以表示为

$$f_l(\varepsilon_i^c)=2\pi\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_i^c\mathrm{d}\Omega_i^c}P_l(\cos\theta_i^c)\mathrm{d}\cos\theta_i^c \tag{5.5.10}$$

将其代入到 (5.5.9) 式, 利用 Legendre 多项式的正交性, 对 $\cos\theta_i^c$ 积分后得到

$$f_l(\varepsilon_i^c)=\frac{(-1)^l}{2}f_l^c(m_1)\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{\varepsilon_i^c}{\varepsilon_i^r}}S(\varepsilon_i^r)P_l(\cos\theta)\mathrm{d}\cos\theta \tag{5.5.11}$$

定义

$$\beta \equiv \sqrt{\frac{m_i}{M_1}E_1^c} \tag{5.5.12}$$

可推导出剩余核运动系中的能量与质心系中能量之间的关系为

$$\varepsilon_i^r = \frac{m_i}{M_1}E_1^c + \varepsilon_i^c - 2\sqrt{\beta\varepsilon_i^c}\cos\theta \tag{5.5.13}$$

因此, 对 $\cos\theta$ 的积分可转换为对 $\varepsilon_i^r \equiv \varepsilon$ 的积分, 两者之间的微分关系为

$$\mathrm{d}\cos\theta = -\frac{1}{2\beta\sqrt{\varepsilon_i^c}}\mathrm{d}\varepsilon \tag{5.5.14}$$

这时, (5.5.11) 式可以改写为

$$f_l(\varepsilon_i^c) = \frac{(-1)^l}{4\beta}f_l^c(m_1)\int_a^b \frac{S(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}P_l\left(\frac{\varepsilon_i^c+\beta^2-\varepsilon}{2\beta}\right)\mathrm{d}\varepsilon \tag{5.5.15}$$

由此得到了一次粒子发射后三体崩裂粒子的双微分截面的 Legendre 展开系数 (Zhang, 2001b), 其中 $f_l^c(m_1)$ 是质心系中一次发射粒子角分布的 Legendre 展开系数. 在质心系中, 三体崩裂过程中发射粒子的最大速度是 $v_{M_1}^c + v_{i,\max}^r$, 对应的最大能量为

$$\varepsilon_{i,\max}^c = \left(\sqrt{\varepsilon_{i,\max}^r} + \beta\right)^2 \tag{5.5.16}$$

三体崩裂过程中发射粒子的最小能量则有两种情况,

(1) 当 $v_{M_1}^c > v_{i,\max}^r$ 时, 三体崩裂粒子可向 4π 空间的任何方向出射:

$$\varepsilon_{i,\min}^c = (\beta - \sqrt{\varepsilon_{i,\max}^r})^2 \tag{5.5.17}$$

(2) 当 $v_{M_1}^c < v_{i,\max}^r$ 时, 三体崩裂粒子的出射速度可能与一次剩余核的速度相抵消, 因此有

$$\varepsilon_{i,\min}^c = 0 \tag{5.5.18}$$

将 (5.5.17) 和 (5.5.18) 式可合并为

$$\varepsilon_{i,\min}^c = \begin{cases} 0 & \text{当 } \varepsilon_{i,\max}^r > \beta^2 \\ (\beta - \sqrt{\varepsilon_{i,\max}^r})^2, & \text{当 } \varepsilon_{i,\max}^r \leqslant \beta^2 \end{cases} \tag{5.5.19}$$

下面来确定 (5.5.15) 式中的积分限. 对于给定的 i 粒子在质心系中的能量 ε_i^c 值, 反冲核坐标系中的能量 $\varepsilon_i^r \equiv \varepsilon$ 的值不能超过 $\varepsilon_{i,\max}^r$, 同时, 由速度合成关系 $\boldsymbol{v}_i^r = \boldsymbol{v}_i^c - \boldsymbol{v}_{M_1}^c$, 它也不能超过 $(\beta + \sqrt{\varepsilon_i^c})^2$, 由此可得到积分上限值. 同样由此速度合成关系可得到, 积分下限必须大于 $(\beta - \sqrt{\varepsilon_i^c})^2$. 因此, (5.5.15) 式中的积分下限和上限分别为

$$a = (\sqrt{\varepsilon_i^c} - \beta)^2, \quad b = \min\{\varepsilon_{i,\max}^r, (\sqrt{\varepsilon_i^c} + \beta)^2\} \tag{5.5.20}$$

下面讨论三体崩裂双微分谱 (5.5.15) 式的归一化问题. 在质心系中, 双微分谱归一化要求：

$$\int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c} f_{i0}^c(\varepsilon_i^c)\mathrm{d}\varepsilon_i^c = \frac{1}{4\beta} f_0^c(m_1) \int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c} \mathrm{d}\varepsilon_i^c \int_a^b \frac{S(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}\mathrm{d}\varepsilon = 1 \tag{5.5.21}$$

其中 $f_0^c(m_1) = 1$. 注意到 (5.5.21) 式对 ε 的积分上下限是 ε_i^c 的函数, 而被积函数与 ε_i^c 无关, 于是利用交换积分顺序的数学技巧. 由速度合成关系 $\boldsymbol{v}_i^c = \boldsymbol{v}_{M_1}^c + \boldsymbol{v}_i^r$ 得到能量 ε_i^c 与 ε_i^r 的关系为

$$\varepsilon_i^c = \frac{m_i}{M_1}E_1^c + \varepsilon_i^r + 2\sqrt{\frac{m_i}{M_1}E_1^c\varepsilon_i^r}\cos\theta \tag{5.5.22}$$

交换积分顺序后, 对 ε 的积分限三体崩裂在 i 粒子的能量范围, 因此 (5.5.21) 式的积分变为

$$\int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c} f_0^c(\varepsilon_i^c)\mathrm{d}\varepsilon_i^c = \frac{1}{4\beta}\int_0^{\varepsilon_{i,\max}^r} \frac{S(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}\mathrm{d}\varepsilon \int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c} \mathrm{d}\varepsilon_i^c \tag{5.5.23}$$

对于给定的 ε 值, 由速度合成关系得到, 在 (5.5.23) 式中 ε_i^c 的积分限分别是

$$\varepsilon_{i,\max}^c = (\beta + \sqrt{\varepsilon})^2, \quad \varepsilon_{i,\min}^c = (\beta - \sqrt{\varepsilon})^2 \tag{5.5.24}$$

利用 (5.5.22) 式, 可以把对 ε_i^c 的积分换为对角度 $\cos\theta$ 的积分, 两种微分关系是

$$\mathrm{d}\varepsilon_i^c = 2\sqrt{\frac{m_i}{M_1}E_1^c\varepsilon}\mathrm{d}\cos\theta = 2\beta\sqrt{\varepsilon}\mathrm{d}\cos\theta \tag{5.5.25}$$

且有 $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$, 因此对 $\cos\theta$ 的积分得到因子 2. 对 ε_i^c 的积分结果得到的 $4\beta\sqrt{\varepsilon}$ 因子恰与 (5.5.23) 式中其他因子相消, 由于在剩余核运动系中 ^{6}He 三体崩裂的能谱是归一化的, 因此最后得到

$$\int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c} f_0^c(\varepsilon_i^c)\mathrm{d}\varepsilon_i^c = \int_0^{\varepsilon_{i,\max}^r} S(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = 1 \tag{5.5.26}$$

于是证明了在质心系中三体崩裂发射粒子的能谱确实是归一化的.

下面再来研究能量平衡的问题. 首先计算质心系中 ^{6}He 三体崩裂粒子的平均能量, 对三体崩裂中第 i 粒子有

$$\bar{\varepsilon}_i^c = \int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c} f_0^c(\varepsilon_i^c)\varepsilon_i^c\mathrm{d}\varepsilon_i^c = \frac{1}{4\beta}f_0^c(m_1)\int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c} \varepsilon_i^c\mathrm{d}\varepsilon_i^c \int_a^b \frac{S(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}\mathrm{d}\varepsilon \tag{5.5.27}$$

利用同上的数学技巧, 交换积分顺序后 (5.5.27) 式的积分变为

$$\bar{\varepsilon}_i^c = \frac{1}{4\beta}\int_0^{\varepsilon_{i,\max}^r} \frac{S(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}\mathrm{d}\varepsilon \int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c} \varepsilon_i^c\mathrm{d}\varepsilon_i^c \tag{5.5.28}$$

应用 (5.5.25) 式将对 ε_i^c 的积分换为对 $\cos\theta$ 的积分, (5.5.28) 式被改写为

$$\bar{\varepsilon}_i^c = \frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon_{i,\max}^r} S(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon \int_{-1}^{1}\left(\frac{m_i}{M_1}E_1^c + \varepsilon + 2\sqrt{\frac{m_i}{M_1}E_1^c\varepsilon}\cos\theta\right)\mathrm{d}\cos\theta \tag{5.5.29}$$

对 $\cos\theta$ 的积分后, (5.5.29) 式内层括号积分中的第三项消失, 利用 (5.5.3) 式, 完成对 $\cos\theta$ 积分, 得到在质心系中第 i 粒子携带的能量为

$$\bar{\varepsilon}_i^c = \frac{m_i}{M_1}E_1^c + \int_0^{\varepsilon_{i,\max}^r} S(\varepsilon)\varepsilon\mathrm{d}\varepsilon = \frac{m_i}{M_1}E_1^c + \frac{M_1 - m_i}{2M_1}E_{\mathrm{brk}} \tag{5.5.30}$$

因此在质心系中, 三个崩裂粒子的平均能量之和为

$$\sum_{i=a,b,c}\bar{\varepsilon}_i^c = E_1^c + E_{\mathrm{brk}} \tag{5.5.31}$$

在实验室系中, 将速度换成能量后得到三体崩裂的第 i 粒子能量:

$$\bar{\varepsilon}_i^l = \frac{m_i m_{\mathrm{n}} E_{\mathrm{n}}}{M_{\mathrm{C}}^2} + \bar{\varepsilon}_i^c + 2\frac{\sqrt{m_i m_{\mathrm{n}} E_{\mathrm{n}}}}{M_{\mathrm{C}}}\int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c}\sqrt{\varepsilon_i^c}\cos\theta_i^c\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_i^c\mathrm{d}\Omega_i^c}\mathrm{d}\varepsilon_i^c\mathrm{d}\Omega_i^c \tag{5.5.32}$$

代入三体崩裂 i 粒子的归一化双微分截面 (5.5.6) 式, 由于 $\cos\theta_i^c = P_1(\cos\theta_i^c)$, 对角度积分后仅留下 $l=1$ 的项, 于是 (5.5.32) 式被简化为

$$\bar{\varepsilon}_i^l = \frac{m_i m_{\mathrm{n}} E_{\mathrm{n}}}{M_{\mathrm{C}}^2} + \bar{\varepsilon}_i^c + 2\frac{\sqrt{m_i m_{\mathrm{n}} E_{\mathrm{n}}}}{M_{\mathrm{C}}}\int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c}\sqrt{\varepsilon_i^c}f_1^c(\varepsilon_i^c)\mathrm{d}\varepsilon_i^c \tag{5.5.33}$$

代入 $f_1^c(\varepsilon_i^c)$ 的表达式 (5.5.15) 后得到

$$\bar{\varepsilon}_i^l = \frac{m_i m_{\mathrm{n}} E_{\mathrm{n}}}{M_{\mathrm{C}}^2} + \bar{\varepsilon}_i^c - \frac{\sqrt{m_i m_{\mathrm{n}} E_{\mathrm{n}}}}{4\beta^2 M_{\mathrm{C}}}f_1^c(m_1)\int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c}\mathrm{d}\varepsilon_i^c\int_a^b\frac{S(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}(\varepsilon_i^c + \beta^2 - \varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon \tag{5.5.34}$$

利用交换积分顺序的途径, 并将对 ε_i^c 的积分换为对 $\cos\theta$ 的积分, (5.5.34) 式变为

$$\bar{\varepsilon}_i^l = \frac{m_i m_{\mathrm{n}} E_{\mathrm{n}}}{M_{\mathrm{C}}^2} + \bar{\varepsilon}_i^c - \frac{\sqrt{m_i m_{\mathrm{n}} E_{\mathrm{n}}}}{2\beta M_{\mathrm{C}}}f_1^c(m_1)\int_0^{\varepsilon_{i,\max}^r}S(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon\int_{-1}^{1}(\varepsilon_i^c + \beta^2 - \varepsilon)\mathrm{d}\cos\theta \tag{5.5.35}$$

利用 (5.5.30) 式给出的 ε_i^c 的表示, 完成对 $\cos\theta$ 的积分后得到第 i 粒子携带的能量为

$$\bar{\varepsilon}_i^l = \frac{m_i m_{\mathrm{n}} E_{\mathrm{n}}}{M_{\mathrm{C}}^2} + \bar{\varepsilon}_i^c - 2\frac{m_i}{M_{\mathrm{C}}M_1}\sqrt{m_1 m_{\mathrm{n}} E_{\mathrm{n}}\varepsilon_1^c}f_1^c(m_1) \tag{5.5.36}$$

最后得到在实验室系中, ^{6}He 三体崩裂三个发射粒子的能量之和为

$$\sum_{i=a,b,c}\bar{\varepsilon}_i^l = \frac{M_1 m_{\mathrm{n}} E_{\mathrm{n}}}{M_{\mathrm{C}}^2} + E_1^c + E_{\mathrm{brk}} - 2\frac{\sqrt{m_1 m_{\mathrm{n}} E_{\mathrm{n}}\varepsilon_1^c}}{M_{\mathrm{C}}}f_1^c(m_1) \tag{5.5.37}$$

在 (5.2.3) 式给出 $\bar{\varepsilon}_1^l$ 的表示中, 与在 (5.5.37) 式中的与 $f_1^c(m_1)$ 有关的项彼此相消. 因此, 在一次粒子发射后, 余核 ^{6}He 再发生三体崩裂的过程中, 总共有四个出射粒子, 它们在实验室系中的平均能量之和为

$$E_{\text{total}}^l = \bar{\varepsilon}_1^l + \sum_{i=a,b,c} \bar{\varepsilon}_i^l = \frac{m_{\text{n}} E_{\text{n}}}{M_{\text{C}}} + \varepsilon_1^c + E_1^c + E_{\text{brk}} \tag{5.5.38}$$

应用 (5.2.1) 式, 得到在实验室系中的平均能量之和为

$$E_{\text{total}}^l = \frac{m_{\text{n}} E_{\text{n}}}{M_{\text{C}}} + \frac{M_{\text{T}} E_{\text{n}}}{M_{\text{C}}} + B_{\text{n}} - B_1 = E_{\text{n}} + Q \tag{5.5.39}$$

其中 $Q = B_{\text{n}} - B_1$ 是这种核反应的 Q 值. 由此可见, 在一次粒子发射后, 余核 ^{6}He 再发生三体崩裂的过程中, 实验室系中总能量是严格保持平衡的.

同样, 在实验室系的能量表示中, 都含有分波系数 $f_1^c(m_1)$, $f_1^c(m_1)$ 的值越大, 就表示一次发射粒子的朝前性越强, 相应地在质心系中, 剩余核的反冲也越强. 因此, 其后剩余核的三体崩裂粒子发射在实验室系中也都有明显向后反冲的行为, 这可从 $\bar{\varepsilon}_2^l$ 和 $\bar{E}_2^l$ 的公式中包含 $f_1^c(m_1)$ 分波项的负号看出.

虽然, 目前我们关注的 1p 壳轻核中, 只有发射一个粒子后余核 ^{6}He 发生三体崩裂的情形才属于从分立能级到连续谱的核反应过程, 应用范围虽然小. 但是毕竟存在这种核反应过程, 因此仍然需要给出这种核反应过程运动学的有关公式. 如果今后的研究发现在发射一个粒子后, 还有其他剩余核的三体崩裂过程, 上述公式可自然被推广应用. 只是崩裂的核素不同而已.

5.6　连续谱到分立能级的发射过程

这一节研究从连续谱到分立能级的核反应过程的运动学 (C *to* D). 在第四节中已看到, 从分立能级到分立能级的有序发射两个粒子之后, 二次粒子发射后的剩余核是处于环型能谱状态, 如果从二次剩余核的分立能级再发射粒子, 达到三次粒子发射后的剩余核的分立能级时, 就属于从连续谱到分立能级的核反应过程. 当然, 更多粒子在分立能级之间的有序发射也都属于这种核反应过程. 这都是由于轻核质量轻, 反冲效应很强, 剩余核能谱在质心系中往往是宽度达到兆电子伏特数量级的环型谱, 次级粒子发射必须被考虑为从连续谱的发射. 而中重核的反冲效应小, 中重核的分立能级一般是不能再发射粒子, 因此在目前通用的核反应数据计算的程序中没有考虑这种情况.

另外, 由第 1 章对轻核反应道开放的分析可以看到, 有些核反应道是从分立能级有序发射两个粒子之后, 二次剩余核发生两体崩裂. 例如, ^{6}Li(n, 2n)^{5}Li, ^{7}Li(n, nd)^{5}He, ^{9}Be(n, 2n)^{8}Be, ^{12}C(n, nα)^{8}Be 等核反应的剩余核 ^{5}Li, ^{5}He 和 ^{8}Be 都是不稳

定核, 正如 (5.4.3) 式所示, 它们都会自发崩裂为两个粒子, 并释放能量. 这种核反应过程也属于从连续谱到分立谱的核反应过程. 如上所述, 有序发射三个粒子的核反应过程, 如 $^{14}\mathrm{N(n,2np)}^{12}\mathrm{C}$, 也属于从连续谱到分立能级的核反应过程.

在本节用 m_3 和 M_3 表示从二次剩余核发射的三次粒子和三次剩余核的质量, 如果二次剩余核发生两体崩裂, 则用 m_3 和 M_3 表示这两个崩裂粒子的质量.

另外, 还有一种特殊情况, 比如 $n+{}^9\mathrm{Be}\to{}^{10}\mathrm{Be}^*\to\mathrm{n}+\mathrm{n}+{}^8\mathrm{Be}$ 的三体崩裂过程, 由于这两个崩裂中子和 $^8\mathrm{Be}$ 的能谱都是连续的, 而 $^8\mathrm{Be}$ 又会发生两体崩裂, 出射两个具有确定能量的 α 粒子, 因此也属于从连续谱到分立谱的核反应过程.

下面分两种情况分别进行讨论：

(1) 通过分立能级有序发射两个粒子后, 剩余核为不稳定核, 发生两体崩裂的过程. 或者通过分立能级有序发射两个粒子后, 二次剩余核发射三次粒子, 其剩余核处于 k_3 能级, 最后通过发射 γ 光子结束核反应的过程. 这种三次粒子发射过程可由图 5.10 示意地给出.

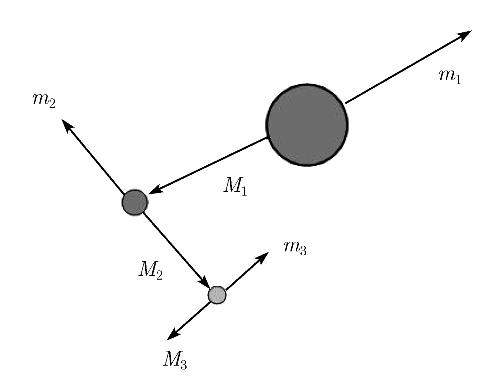


图 5.10 三次粒子发射过程的示意图

两体崩裂过程的反应 Q 值用 Q_{cluster} 表示, 并近似有 $m_3+M_3=M_2$ 关系存在. 如果从二次剩余核分立能级 k_2 发生两体崩裂, 在两次粒子发射后的剩余核运动系中, 两体崩裂的两个核的能量分别是

$$\varepsilon_3^r=\frac{M_3}{M_2}(Q_{\text{cluster}}+E_{k_2}),\quad E_3^r=\frac{m_3}{M_2}(Q_{\text{cluster}}+E_{k_2}) \tag{5.6.1}$$

对于从二次剩余核分立能级 k_2 发射三次粒子, 三次剩余核处于 k_3 能级的核反应过程, 三次发射粒子和三次剩余核的能量分别为

$$\varepsilon_3^r=\frac{M_3}{M_2}(E_{k_2}-B_3-E_{k_3}),\quad E_3^r=\frac{m_3}{M_2}(E_{k_2}-B_3-E_{k_3}) \tag{5.6.2}$$

仿照 5.4 节的推导过程, 定义与前面两个类似的物理量：

$$\gamma_3=\sqrt{\frac{E_2^c m_3}{\varepsilon_3^r M_2}} \tag{5.6.3}$$

和

$$\eta_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon_3^r}{\varepsilon_3^c}}\frac{\varepsilon_3^c/\varepsilon_3^r - 1 + \gamma_3^2}{2\gamma_3} \tag{5.6.4}$$

在质心系中, 我们用 ε_3^c 表示三次发射粒子或两体崩裂中较轻粒子的能量, 用 E_3^c 表示三次剩余核或两体崩裂中较重粒子的能量. 下面我们来讨论 ε_3^c 的能量范围. 这时需要下面两个量:

$$\gamma_{3,\min} = \sqrt{\frac{E_{2,\min}^c m_3}{\varepsilon_3^r M_2}}, \quad \gamma_{3,\max} = \sqrt{\frac{E_{2,\max}^c m_3}{\varepsilon_3^r M_2}} \tag{5.6.5}$$

其中 $E_{2,\min}^c$ 和 $E_{2,\max}^c$ 决定了质心系中二次剩余核环型谱的能量范围 $E_{2,\min}^c \leqslant E_2^c \leqslant E_{2,\max}^c$.

如果记质心系中二次剩余核的速度为 $\boldsymbol{v}_{M_2}^c$, 记 m_3 粒子在剩余核运动系中的速度为 $\boldsymbol{v}_3^r$, 在质心系中的速度为 $\boldsymbol{v}_3^c$. 由速度合成关系 $\boldsymbol{v}_3^c = \boldsymbol{v}_{M_2}^c + \boldsymbol{v}_3^r$ 可以看出, 当 $\boldsymbol{v}_3^r$ 恰好与 $\boldsymbol{v}_{M_2}^c$ 沿同一方向时, m_3 粒子在质心系中的能量将最大, 于是

$$\varepsilon_{3,\max}^c = \varepsilon_3^r(1+\gamma_{3,\max})^2 \tag{5.6.6}$$

在质心系中, 由于二次粒子发射的剩余核是具有环型谱形式, 因此 m_3 粒子的最小能量有几种可能. 当然, 最小能量一定发生在 $\boldsymbol{v}_3^r$ 与 $\boldsymbol{v}_{M_2}^c$ 沿相反方向的情况下. 当 $\boldsymbol{v}_{M_2,\min}^c$ 大于 $\boldsymbol{v}_3^r$ 时, 对应的 m_3 粒子最小能量是

$$\varepsilon_{3,\min}^c = \frac{1}{2}m_3(v_{M_{2,\min}}^c - v_3^r)^2 = \varepsilon_3^r(1-\gamma_{3,\min})^2 \tag{5.6.7}$$

而当 $\boldsymbol{v}_{M_2,\max}^c$ 小于 $\boldsymbol{v}_3^r$ 时, 对应的 m_3 粒子最小能量是

$$\varepsilon_{3,\min}^c = \frac{1}{2}m_3(v_{M_{2,\max}}^c - v_3^r)^2 = \varepsilon_3^r(1-\gamma_{3,\max})^2 \tag{5.6.8}$$

另外, 当 $\boldsymbol{v}_{M_2,\min}^c \leqslant v_3^r \leqslant \boldsymbol{v}_{M_2,\max}^c$ 时, 总可能存在一个 $\boldsymbol{v}_{M_2}^c$ 值, 它与 $\boldsymbol{v}_3^r$ 数值相同, 但方向相反, 这时 $\varepsilon_{3,\min}^c = 0$. 归纳上面三种情况, m_3 粒子在质心系中的最小能量可以表示为

$$\varepsilon_{3,\min}^c = \begin{cases} \varepsilon_3^r(1-\gamma_{3,\min})^2, & 1 \leqslant \gamma_{3,\min} \leqslant \gamma_{3,\max} \\ 0, & \gamma_{3,\min} \leqslant 1 \leqslant \gamma_{3,\max} \\ \varepsilon_3^r(1-\gamma_{3,\max})^2, & \gamma_{3,\min} \leqslant \gamma_{3,\max} \leqslant 1 \end{cases} \tag{5.6.9}$$

下面研究 m_3 粒子在质心系中双微分截面的表示, 它的标准形式为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_3^c \mathrm{d}\Omega_3^c} = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} f_l^c(\varepsilon_3^c) P_l(\cos\theta_3^c) \tag{5.6.10}$$

对于某个确定的二次剩余核能量 E_2^c, 仿照 5.4 节的推导过程, 得到

$$f_l^c(\varepsilon_3^c) = \frac{1}{4\gamma_3\varepsilon_3^r} f_l^c(E_2^c) P_l(\eta_3) \tag{5.6.11}$$

但这时 E_2^c 并不是一个确定的能量, 而是具有环型能谱的分布, 所以我们必须将 (5.6.11) 式对 E_2^c 进行积分, 由此得到分波系数 $f_l^c(\varepsilon_3^c)$:

$$f_l^c(\varepsilon_3^c) = \int_{a_3}^{b_3} \frac{1}{4\gamma_3\varepsilon_3^r} f_l^c(E_2^c) P_l(\eta_3) \mathrm{d}E_2^c \tag{5.6.12}$$

这里把对 E_2^c 积分的上下限分别记为 b_3 和 a_3.

同样也可以验证 $-1 \leqslant \eta_3 \leqslant 1$. 事实上, $-1 \leqslant \eta_3$ 对应于

$$1 \leqslant \left(\sqrt{\varepsilon_3^c/\varepsilon_3^r} + \gamma_3\right)^2 \quad 或 \quad \varepsilon_3^r \leqslant \left(\sqrt{\varepsilon_3^c} + \sqrt{m_3 E_2^c/M_2}\right)^2 \tag{5.6.13}$$

用速度表示则为 $v_3^r \leqslant v_3^c + v_{M_2}^c$, 上面已经指出, 最大的 v_3^r 值为 $v_3^c + v_{M_2}^c$, 因此该不等式永远成立. 而 $\eta_3 \leqslant 1$ 对应于

$$\left(\sqrt{\varepsilon_3^c/\varepsilon_3^r} - \gamma_3\right)^2 \leqslant 1 \quad 或 \quad \left(\sqrt{\varepsilon_3^c} - \sqrt{m_3 E_2^c/M_2}\right)^2 \leqslant \varepsilon_3^r \tag{5.6.14}$$

用速度表示则为 $|v_3^c - v_{M_2}^c| \leqslant v_3^r$, 上面已经指出, 最小的 v_3^r 值为 $|v_3^c - v_{M_2}^c|$, 因此该不等式也永远成立. 于是, $-1 \leqslant \eta_3 \leqslant 1$ 永远成立.

对于一个给定的 ε_3^c 值, 需要给出对 E_2^c 积分的上下限 b_3 和 a_3. 在各种可能的 ε_3^r 值下, 由速度合成关系 $\boldsymbol{v}_{M_2}^c = \boldsymbol{v}_3^c - \boldsymbol{v}_3^r$, 转换到能量表示, 得到最小能量:

$$E_2^c = M_2(\sqrt{\varepsilon_3^c} - \sqrt{\varepsilon_3^r})^2/m_3 \tag{5.6.15}$$

如果它比 $E_{2,\min}^c$ 还大时, 这时 E_2^c 的积分下限就应该是 $E_{M_2,\min}^c$, 因此有

$$a_3 = \max\left\{E_{M_2,\min}^c, \frac{M_2}{m_3}\varepsilon_3^r\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_3^c}{\varepsilon_3^r}} - 1\right)^2\right\} \tag{5.6.16}$$

同样由上面给出的速度合成关系, 也可得到 E_2^c 的最大能量为

$$E_2^c = M_2(\sqrt{\varepsilon_3^c} + \sqrt{\varepsilon_3^r})^2/m_3 \tag{5.6.17}$$

如果它比 $E_{2,\max}^c$ 还大时, 这时 E_2^c 的积分上限就应该是 $E_{2,\max}^c$, 因此得到

$$b_3 = \min\left\{E_{M_2,\max}^c, \frac{M_2}{m_3}\varepsilon_3^r\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_3^c}{\varepsilon_3^r}} + 1\right)^2\right\} \tag{5.6.18}$$

以上讨论了在有序发射两个粒子后, 剩余核发生两体崩裂的核反应过程中, 崩裂粒子 m_3 在质心系中用 Legendre 多项式展开的方式表示的双微分截面公式. 对于两体崩裂过程中较重的粒子 M_3, 其推导过程完全相同, 只要在上面的公式中将 m_3 和 M_3 的位置相互掉换即可.

下面证明, 在质心系中, (5.6.12) 式给出的两体崩裂粒子 m_3 的能谱是归一化的. 事实上

$$\int_{\varepsilon_{3,\min}^c}^{\varepsilon_{3,\max}^c} f_0^c(\varepsilon_3^c)\mathrm{d}\varepsilon_3^c = \int_{\varepsilon_{3,\min}^c}^{\varepsilon_{3,\max}^c} \mathrm{d}\varepsilon_3^c \int_{a_3}^{b_3} \frac{1}{4\gamma_3\varepsilon_3^r} f_0^c(E_2^c)\mathrm{d}E_2^c \tag{5.6.19}$$

在 (5.6.19) 式中交换积分顺序, 可以使计算可以简化. 注意到在给定 E_2^c 值后, 由于 ε_3^r 为确定值, 由速度合成关系 $\boldsymbol{v}_3^c = \boldsymbol{v}_{M_2}^c + \boldsymbol{v}_3^r$ 可得到

$$\varepsilon_3^c = \varepsilon_3^r + \frac{m_3}{M_2}E_2^c + 2\sqrt{\frac{m_3}{M_2}\varepsilon_3^r E_2^c}\cos\theta \tag{5.6.20}$$

因而有

$$\mathrm{d}\varepsilon_3^c = 2\sqrt{\frac{m_3}{M_2}\varepsilon_3^r E_2^c}\mathrm{d}\cos\theta \tag{5.6.21}$$

这里 θ 是 $\boldsymbol{v}_{M_2}^c$ 与 $\boldsymbol{v}_3^r$ 之间的夹角. 将对 ε_3^c 的积分变换为对 $\cos\theta$ 的积分, (5.6.19) 式就变为

$$\int_{\varepsilon_{3,\min}^c}^{\varepsilon_{3,\max}^c} f_0^c(\varepsilon_3^c)\mathrm{d}\varepsilon_3^c = \int_{E_{2,\min}^c}^{E_{2,\max}^c} f_0^c(E_2^c)\mathrm{d}E_2^c \int_{-1}^{1} \frac{1}{2\gamma_3\varepsilon_3^r}\sqrt{\frac{m_3}{M_2}\varepsilon_3^r E_2^c}\mathrm{d}\cos\theta \tag{5.6.22}$$

代入 (5.6.3) 式对 γ_3 的表示, 完成对 $\cos\theta$ 的积分后得到

$$\int_{\varepsilon_{3,\min}^c}^{\varepsilon_{3,\max}^c} f_0^c(\varepsilon_3^c)\mathrm{d}\varepsilon_3^c = \int_{E_{2,\min}^c}^{E_{2,\max}^c} f_0^c(E_2^c)\mathrm{d}E_2^c = 1 \tag{5.6.23}$$

至此, 证明了 (5.6.12) 式给出的能谱是归一化的. 用同样方式也可以证明较重的粒子或核 M_3 的能谱也是归一化的.

下面讨论核反应的能量平衡问题. 首先考虑在质心系中, m_3 粒子携带的平均能量:

$$\bar{\varepsilon}_3^c = \int_{\varepsilon_{3,\min}^c}^{\varepsilon_{3,\max}^c} f_0^c(\varepsilon_3^c)\varepsilon_3^c\mathrm{d}\varepsilon_3^c \tag{5.6.24}$$

仿照上面计算 (5.6.22) 式的积分方法, 交换积分顺序再变换积分变量后得到

$$\bar{\varepsilon}_3^c = \int_{E_{2,\min}^c}^{E_{2,\max}^c} f_0^c(E_2^c)\mathrm{d}E_2^c \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(\varepsilon_3^r + \frac{m_3}{M_2}E_2^c + 2\sqrt{\frac{m_3}{M_2}\varepsilon_3^r E_2^c}\cos\theta\right)\mathrm{d}\cos\theta \tag{5.6.25}$$

完成对 $\cos\theta$ 的积分后得到

$$\bar{\varepsilon}_3^c = \int_{E_{2,\min}^c}^{E_{2,\max}^c} f_0^c(E_2^c)\left(\varepsilon_3^r + \frac{m_3}{M_2}E_2^c\right)\mathrm{d}E_2^c = \varepsilon_3^r + \frac{m_3}{M_2}\bar{E}_2^c \tag{5.6.26}$$

用同样的方式也可算出质心系中 M_3 粒子携带的平均能量为

$$\bar{E}_3^c = E_3^r + \frac{M_3}{M_2}\bar{E}_2^c \tag{5.6.27}$$

因此有

$$\bar{\varepsilon}_3^c + \bar{E}_3^c = \varepsilon_3^r + E_3^r + \bar{E}_2^c \tag{5.6.28}$$

下面讨论在实验室系中 m_3 和 M_3 两个粒子在实验室系中携带的平均能量. 利用 (5.4.29) 式给出的质心系与实验室系的能量关系, 可得到 m_3 粒子的平均能量：

$$\bar{\varepsilon}_3^l = \frac{m_3 m_\mathrm{n} E_\mathrm{n}}{M_\mathrm{C}^2} + \bar{\varepsilon}_3^c + 2\frac{\sqrt{m_3 m_\mathrm{n} E_\mathrm{n}}}{M_\mathrm{C}}\int\sqrt{\varepsilon_3^c} f_1^c(\varepsilon_3^c)\mathrm{d}\varepsilon_3^c \tag{5.6.29}$$

其中

$$f_1^c(\varepsilon_3^c) = \int_{a_3}^{b_3}\frac{1}{4\gamma_3\varepsilon_3^r} f_1^c(E_2^c)P_1(\eta_3)\mathrm{d}E_2^c \tag{5.6.30}$$

将由 (5.6.3) 式给出的 γ_3 和 (5.6.4) 式给出的 η_3 表示代入到 (5.6.30) 式, 得到

$$f_1^c(\varepsilon_3^c) = \frac{M_2}{8m_3}\int_{a_3}^{b_3}\frac{1}{E_2^c}\sqrt{\frac{\varepsilon_3^r}{\varepsilon_3^c}}\left(\frac{\varepsilon_3^c}{\varepsilon_3^r} - 1 + \frac{E_2^c m_3}{\varepsilon_3^r M_2}\right) f_1^c(E_2^c)\mathrm{d}E_2^c \tag{5.6.31}$$

将其代入到 (5.6.26) 式中, 得到该式中第三项的积分的结果为

$$\int\sqrt{\varepsilon_3^c} f_1^c(\varepsilon_3^c)\mathrm{d}\varepsilon_3^c = \frac{M_2}{8m_3}\int_{\varepsilon_{3,\min}^c}^{\varepsilon_{3,\max}^c}\int_{a_3}^{b_3}\frac{\sqrt{\varepsilon_3^r}}{E_2^c}\left(\frac{\varepsilon_3^c}{\varepsilon_3^r} - 1 + \frac{E_2^c m_3}{\varepsilon_3^r M_2}\right) f_1^c(E_2^c)\mathrm{d}E_2^c\mathrm{d}\varepsilon_3^c \tag{5.6.32}$$

交换积分顺序, 并应用 (5.6.21) 式, 将对 ε_3^c 的积分变换为对 $\cos\theta$ 的积分, 完成对 $\cos\theta$ 的积分后, (5.6.32) 式变为

$$\int\sqrt{\varepsilon_3^c} f_1^c(\varepsilon_3^c)\mathrm{d}\varepsilon_3^c = \int_{E_{2,\min}^c}^{E_{2,\max}^2}\sqrt{\frac{m_3}{M_2}E_2^c} f_1^c(E_2^c)\mathrm{d}E_2^c \tag{5.6.33}$$

代入由 (5.4.54) 式给出的 $f_1^c(E_2^c)$ 表示式, 以及由 (5.4.55) 式给出的 H 和 (5.4.51) 式给出的 $\mathit{\Gamma}$ 的公式表示后, 可得

$$f_1^c(E_2^c) = -\frac{f_1^c(m_1)}{4\mathit{\Gamma} E_2^r}H = -\frac{M_1 f_1^c(m_1)}{8M_2 E_1^c}\sqrt{\frac{E_2^r}{E_2^c}}\left(\frac{E_2^c}{E_2^r} - 1 + \frac{M_2 E_1^c}{M_1 E_2^r}\right) \tag{5.6.34}$$

将其代入 (5.6.32) 式得到

$$\int \sqrt{\varepsilon_3^c} f_1^c(\varepsilon_3^c) \mathrm{d}\varepsilon_3^c = -\frac{M_1\sqrt{m_3 E_2^r}}{8M_2 E_1^c \sqrt{M_2}} f_1^c(m_1) \int_{E_{2,\min}^c}^{E_{2,\max}^2} \left(\frac{E_2^c}{E_2^r} - 1 + \Gamma^2\right) \mathrm{d}E_2^c \tag{5.6.35}$$

完成对 E_2^c 的积分, 注意到 $E_{2,\min}^c = E_2^r(1-\Gamma)^2$, $E_{2,\max}^c = E_2^r(1+\Gamma)^2$, 得到

$$\int \sqrt{\varepsilon_3^c} f_1^c(\varepsilon_3^c) \mathrm{d}\varepsilon_3^c = -f_1^c(m_1)\sqrt{\frac{m_3 E_1^c}{M_1}} \tag{5.6.36}$$

将其代入 (5.6.29) 式后, 于是得到在实验室系中 m_3 粒子的平均能量为

$$\bar{\varepsilon}_3^l = \frac{m_3 m_\mathrm{n} E_\mathrm{n}}{M_\mathrm{C}^2} + \bar{\varepsilon}_3^c - 2\frac{m_3}{M_\mathrm{C}}\sqrt{\frac{m_\mathrm{n} E_\mathrm{n} E_1^c}{M_1}} f_1^c(m_1) \tag{5.6.37}$$

以类似的步骤也可得到 M_3 粒子在实验室系的平均能量为

$$\bar{E}_3^l = \frac{M_3 m_\mathrm{n} E_\mathrm{n}}{M_\mathrm{C}^2} + \bar{E}_3^c - 2\frac{M_3}{M_\mathrm{C}}\sqrt{\frac{m_\mathrm{n} E_\mathrm{n} E_1^c}{M_1}} f_1^c(m_1) \tag{5.6.38}$$

因此, 在实验室系中 m_3 粒子和 M_3 粒子的平均能量之和为

$$\bar{\varepsilon}_3^l + \bar{E}_3^l = \frac{M_2 m_\mathrm{n} E_\mathrm{n}}{M_\mathrm{C}^2} + \varepsilon_3^r + E_3^r + \bar{E}_2^c - 2\frac{M_2}{M_\mathrm{C}}\sqrt{\frac{m_\mathrm{n} E_\mathrm{n} E_1^c}{M_1}} f_1^c(m_1) \tag{5.6.39}$$

由 (5.4.74) 式已经得到在实验室系中二次发射粒子的平均能量 $\bar{\varepsilon}_2^l$ 表示式, 于是, 在实验室系中, m_3 粒子和 M_3 粒子的平均能量之和加上二次发射粒子的平均能量为

$$\bar{\varepsilon}_3^l + \bar{E}_3^l + \bar{\varepsilon}_2^l = \frac{M_1 m_\mathrm{n} E_\mathrm{n}}{M_\mathrm{C}^2} + \varepsilon_3^r + E_3^r + \bar{\varepsilon}_2^c + \bar{E}_2^c - 2\frac{M_1}{M_\mathrm{C}}\sqrt{\frac{m_\mathrm{n} E_\mathrm{n} E_1^c}{M_1}} f_1^c(m_1) \tag{5.6.40}$$

由 (5.2.3) 式给出的一次发射粒子的能量 $\bar{\varepsilon}_1^l$ 公式表示可以看出, 恰好与 (5.6.40) 式中包含 $f_1^c(m_1)$ 的项彼此相消, 一次粒子发射是朝前的, 而从反冲剩余核发射的粒子在质心系中是向后的.

在实验室系中, 释放的总平均能量为

$$E_\mathrm{total}^l = \bar{\varepsilon}_3^l + \bar{E}_3^l + \bar{\varepsilon}_2^l + \bar{\varepsilon}_1^l = \frac{m_\mathrm{n} E_\mathrm{n}}{M_\mathrm{C}} + \varepsilon_3^r + E_3^r + \bar{\varepsilon}_2^c + \bar{E}_2^c + \varepsilon_1^c \tag{5.6.41}$$

利用前面给出有关质心系中第一粒子、第二粒子和其剩余核的能量公式, 于是可得到

$$E_\mathrm{total}^l = E_\mathrm{n} + B_\mathrm{n} - B_1 - B_2 - E_{k_2} + \varepsilon_3^r + E_3^r \tag{5.6.42}$$

对于有序发射三个粒子之后再通过 γ 退激而结束的核反应过程有

$$\varepsilon_3^r + E_3^r = E_{k_2} - B_3 - E_{k_3} \tag{5.6.43}$$

这时总能量中还需要加入从剩余核的 k_3 能级退激的 γ 光子能量 E_{k_3}, 因此, 在实验室系中总释放能量为

$$E_{\text{total}}^l = E_\text{n} + B_\text{n} - B_1 - B_2 - B_3 = E_\text{n} + Q \tag{5.6.44}$$

有序发射三个粒子核反应过程的 Q 值为 $Q = B_\text{n} - B_1 - B_2 - B_3$, 结果表明, 在实验室系中有序发射三个粒子的核反应过程严格满足能量平衡条件.

下面讨论关于有序发射两个粒子后二次发射的剩余核发生两体崩裂的核反应过程：

$$\varepsilon_3^r + E_3^r = Q_\text{cluster} + E_{k_2} \tag{5.6.45}$$

在实验室系中释放的总能量为

$$E_{\text{total}}^l = E_\text{n} + B_\text{n} - B_1 - B_2 + Q_\text{cluster} = E_\text{n} + Q \tag{5.6.46}$$

这种核反应过程的 Q 值为 $Q = B_\text{n} - B_1 - B_2 + Q_\text{cluster}$. (5.4.46) 式表明, 在实验室系中, 有序发射两个粒子后二次余核发生两体崩裂的核反应过程也严格满足能量平衡条件.

当中子入射能量足够高时, 可能出现三次以上的有序粒子发射过程, 或二次以上的有序粒子发射后剩余核发生两体崩裂的过程. 这些核反应过程仍然属于从连续谱到分立谱的运动学. 如果需要的话, 仿照上面的思路和推导过程, 总能给出相应的发射粒子的归一化双微分截面谱, 而且严格满足能量平衡. 在这里就不再逐一写出了.

(2) 在直接三体崩裂中的一个核再次发生两体崩裂的核反应过程.

下面研究的核反应过程在轻核反应中是很独特的. 目前, 只知道一个这样的核反应, 就是中子诱导 ^{9}Be 的核反应中复合核 ^{10}Be* 发生直接三体崩裂, 出射两个中子和一个 ^{8}Be 核, 而 ^{8}Be 是不稳定核, 它自发崩裂为两个 α 粒子：

$$\text{n} + {}^9\text{Be} \rightarrow {}^{10}\text{Be} \rightarrow \text{n} + \text{n} + {}^8\text{Be}, \quad {}^8\text{Be} \rightarrow \alpha + \alpha$$

这个核反应过程由图 5.11 示意性地给出. 由于直接三体崩裂的粒子谱是连续谱, 但不同于两次粒子发射后的环型谱, 因此上面的公式就不适用于这种情况. 必须给出这种情况下的再次发生两体崩裂的粒子谱.

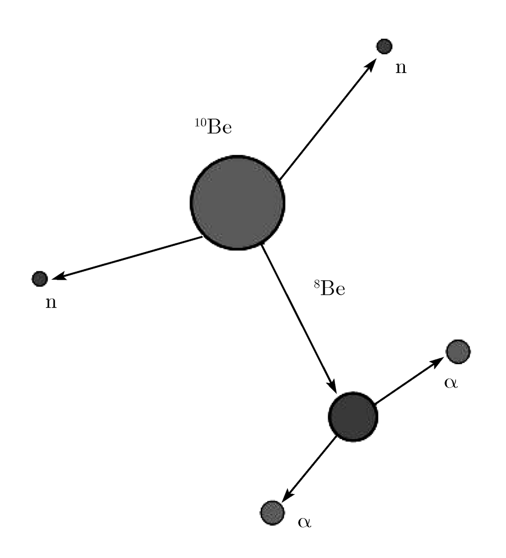


图 5.11　从 $^{10}\mathrm{Be} \to \mathrm{n} + \mathrm{n} + {}^{8}\mathrm{Be}$ 直接三体崩裂中的 ^{8}Be 再发生两体崩裂过程的示意图

在这种核反应过程中, 三体崩裂粒子的能谱是连续的, 而 ^{8}Be 两体崩裂的出射粒子是单能的. 因此, 该核反应过程也属于从连续谱到分立谱的核反应过程.

虽然目前这类核反应过程还只有如图 5.11 所示的一个例子, 但是, 对于核的散裂反应, 完全可以参考使用这里得到的运动学公式.

前面已经对直接三体崩裂核反应过程做过研究, 本章 5.3 节已经给出了三体崩裂粒子归一化双微分截面, 崩裂粒子能谱和崩裂粒子能量的最大值. 这时 Q 为 $^{10}\mathrm{Be}^{*}$ 三体崩裂的 Q 值, 且有 $Q = E^{*} - Q_3, Q_3 = 8.477\mathrm{MeV}$. 不失一般性, 在本小节中, 我们约定 b 和 c 粒子为中子, 而 a 粒子为 ^{8}Be, 其质量表示为 m_a. 由于 b 和 c 粒子的直接三体崩裂双微分截面谱已经给出, 不再做进一步讨论, 现在集中讨论 a 粒子即 ^{8}Be 继续发生两体崩裂的过程和两个出射 α 粒子的归一化双微分截面, 并证明能量平衡关系成立.

实际上, 这种核反应过程的运动学是比较简单的, 这是因为在质心系中, 直接三体崩裂粒子是各向同性出射的, 而在剩余核运动系中, ^{8}Be 的两体崩裂粒子也是各向同性出射的. 所以, 在质心系中, ^{8}Be 两体崩裂出射 α 粒子的双微分截面也是各向同性的. 于是, 在质心系中, α 粒子的归一化双微分截面可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_\alpha^c \mathrm{d}\Omega_\alpha^c} = \frac{S(\varepsilon_\alpha^c)}{4\pi} \tag{5.6.47}$$

在剩余核运动系中, ^{8}Be 两体崩裂的 α 粒子具有确定能量：

$$\varepsilon_\alpha^r = Q_8/2 \tag{5.6.48}$$

其中 $Q_8 = 0.092\text{MeV}$ 是 ^8Be 两体崩裂的 Q 值, 这是放能反应. 在剩余核运动系中, ^8Be 两体崩裂的 α 粒子的双微分截面可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_\alpha^r \mathrm{d}\Omega_\alpha^r} = \frac{\delta(\varepsilon_\alpha^r - Q_8/2)}{4\pi} \tag{5.6.49}$$

在质心系中, 对于一定的 ^8Be 能量值, 该双微分截面变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_\alpha^c \mathrm{d}\Omega_\alpha^c} = \sqrt{\frac{\varepsilon_\alpha^c}{\varepsilon_\alpha^r}} \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_\alpha^r \mathrm{d}\Omega_\alpha^r} \tag{5.6.50}$$

实际上 ^8Be 有一个连续的能量分布, 所以 (5.6.50) 式给出的 α 粒子的双微分截面还需要对 ^8Be 的归一化能谱做平均, 然后得到在质心系中, 从直接三体崩裂产生的 ^8Be 再发生两体崩裂的 α 粒子的双微分截面:

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_\alpha^c \mathrm{d}\Omega_\alpha^c} = \frac{1}{4\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{\varepsilon_\alpha^c}{\varepsilon_\alpha^r}} \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_\alpha^r \mathrm{d}\Omega_\alpha^r} S(\varepsilon_a^c) \mathrm{d}\varepsilon_a^c \mathrm{d}\Omega_a^c \tag{5.6.51}$$

由剩余核运动系与质心系的速度合成关系 $\boldsymbol{v}_\alpha^r = \boldsymbol{v}_\alpha^c - \boldsymbol{v}_a^c$, 我们得到它们的能量关系为

$$\varepsilon_\alpha^r = \varepsilon_\alpha^c + \frac{m_\alpha}{m_a}\varepsilon_a^c - 2\sqrt{\frac{m_\alpha}{m_a}\varepsilon_\alpha^c \varepsilon_a^c} \cos\theta_\alpha^c \tag{5.6.52}$$

其中 θ_α^c 为 $\boldsymbol{v}_\alpha^c$ 与 $\boldsymbol{v}_a^c$ 之间的夹角. 由上面的速度合成关系还可确定对 a 粒子能量积分的上下限. 现在首先确定在质心系中, ^8Be 两体崩裂出射 α 粒子的能量范围, 其最大能量发生在 $\boldsymbol{v}_\alpha^r$ 与 $\boldsymbol{v}_a^c$ 同方向的情况下, 即

$$\varepsilon_{\alpha,\max}^c = \frac{1}{2} m_\alpha (v_\alpha^r + v_{\alpha,\max}^c)^2 = \left(\sqrt{\varepsilon_\alpha^r} + \sqrt{\frac{m_\alpha}{m_a}\varepsilon_{a,\max}^c}\right)^2 \tag{5.6.53}$$

其最小能量则发生在 $\boldsymbol{v}_\alpha^r$ 与 $\boldsymbol{v}_a^c$ 方向相反的情况下, 由于 a 粒子 ^8Be 具有连续谱, 当 ^8Be 的最大速度 $\boldsymbol{v}_{a,\max}^c$ 大于剩余核运动系中 α 粒子的速度 $\boldsymbol{v}_\alpha^r$ 时, 总会存在一个 ^8Be 的速度 $\boldsymbol{v}_a^c$ 恰好与 $\boldsymbol{v}_\alpha^r$ 相抵消, 于是

$$\varepsilon_{\alpha,\min}^c = 0 \tag{5.6.54}$$

而如果 ^8Be 的最大速度 $\boldsymbol{v}_{a,\max}^c$ 小于 $\boldsymbol{v}_\alpha^r$ 时, $\boldsymbol{v}_\alpha^r$ 与 $\boldsymbol{v}_a^c$ 就总也不能相互抵消, 于是

$$\varepsilon_{\alpha,\min}^c = \left(\sqrt{\varepsilon_\alpha^r} - \sqrt{\frac{m_\alpha}{m_a}\varepsilon_{a,\max}^c}\right)^2 \tag{5.6.55}$$

将上面两种情况合并写出, 得到 α 粒子发射的最小能量为

$$\varepsilon_{\alpha,\min}^c = \begin{cases} 0, & \text{当 } \varepsilon_{a,\max}^c \geqslant \dfrac{m_a}{2m_\alpha} Q_8 \\ \left(\sqrt{\varepsilon_\alpha^r} - \sqrt{\dfrac{m_\alpha}{m_a}\varepsilon_{a,\max}^c}\right)^2, & \text{当 } \varepsilon_{a,\max}^c < \dfrac{m_a}{2m_\alpha} Q_8 \end{cases} \tag{5.6.56}$$

在质心系中, 对于一个确定的 α 粒子发射能量 ε_α^c 值 ($\varepsilon_{\alpha,\min}^c \leqslant \varepsilon_\alpha^c \leqslant \varepsilon_{\alpha,\max}^c$), 可以通过速度合成关系 $\boldsymbol{v}_a^c = \boldsymbol{v}_\alpha^c - \boldsymbol{v}_\alpha^r$ 来确定对 a 粒子 ^{8}Be 的能量积分上下限. 其下限发生在 $\boldsymbol{v}_\alpha^c$ 与 $\boldsymbol{v}_\alpha^r$ 方向相反时,

$$a = (\sqrt{\varepsilon_\alpha^c} - \sqrt{\varepsilon_\alpha^r})^2 \tag{5.6.57}$$

其上限则发生在 $\boldsymbol{v}_\alpha^c$ 与 $\boldsymbol{v}_\alpha^r$ 的方向相同时, 对应于 $(\sqrt{\varepsilon_\alpha^c} + \sqrt{\varepsilon_\alpha^r})^2$, 但是这个值有可能大于 ^{8}Be 三体崩裂粒子能量的最大值, 因此, 对 a 粒子 ^{8}Be 能量 ε_α^c 积分的上限写为

$$b = \min\left\{\varepsilon_{a,\max}^c, (\sqrt{\varepsilon_\alpha^c} + \sqrt{\varepsilon_\alpha^r})^2\right\} \tag{5.6.58}$$

在对 ^{8}Be 归一化能谱做平均后, 在质心系中, 得到从三体崩裂出射的 ^{8}Be 再发生两体崩裂, 其崩裂 α 粒子的双微分截面为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_\alpha^c \mathrm{d}\Omega_\alpha^c} = \frac{1}{(4\pi)^2}\int_a^b \sqrt{\frac{\varepsilon_\alpha^c}{\varepsilon_\alpha^r}}\delta\left(\varepsilon_\alpha^c + \frac{m_\alpha}{m_a}\varepsilon_\alpha^c - 2\sqrt{\frac{m_\alpha}{m_a}\varepsilon_\alpha^c\varepsilon_a^c}\cos\theta_\alpha^c - \frac{Q_8}{2}\right)S(\varepsilon_a^c)\mathrm{d}\varepsilon_a^c\mathrm{d}\Omega_a^c \tag{5.6.59}$$

再应用 δ 函数的性质, 如果在一个积分中出现 δ 函数, 其结果可以表示为

$$\int F(x)\delta(a(x-x_0))\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(x_0) \tag{5.6.60}$$

这里 $x = \cos\theta_\alpha^c$, 因此, (5.6.59) 式的积分结果得到在质心系中从 ^{8}Be 两体崩裂的各向同性 α 粒子能谱为

$$S_\alpha(\varepsilon_\alpha^c) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{m_a}{m_\alpha \varepsilon_\alpha^r}}\int_a^b \frac{S(\varepsilon_a^c)}{\sqrt{\varepsilon_a^c}}\mathrm{d}\varepsilon_a^c \tag{5.6.61}$$

下面证明这个谱是归一化的. 事实上

$$\int_{\varepsilon_{\alpha,\min}^c}^{\varepsilon_{\alpha,\max}^c} S_\alpha(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = \int_{\varepsilon_{\alpha,\min}^c}^{\varepsilon_{\alpha,\max}^c} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{m_a}{m_\alpha\varepsilon_\alpha^r}}\int_a^b \frac{S(\varepsilon_a^c)}{\sqrt{\varepsilon_a^c}}\mathrm{d}\varepsilon_a^c\mathrm{d}\varepsilon \tag{5.6.62}$$

交换积分顺序后, 记 $\varepsilon' = \varepsilon_a^c$, 得到

$$\int_{\varepsilon_{\alpha,\min}^c}^{\varepsilon_{\alpha,\max}^c} S_\alpha(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{m_a}{m_\alpha\varepsilon_\alpha^r}}\int_{\varepsilon_{\min}}^{\varepsilon_{\max}} \frac{S(\varepsilon')}{\sqrt{\varepsilon'}}\mathrm{d}\varepsilon' \int_{\varepsilon_{\alpha,\min}^c}^{\varepsilon_{\alpha,\max}^c}\mathrm{d}\varepsilon_\alpha^c \tag{5.6.63}$$

由速度合成关系 $\boldsymbol{v}_\alpha^c = \boldsymbol{v}_\alpha^r + \boldsymbol{v}_a^c$, 对于确定的 ε_a^c 可以得到对 ε_α^c 积分的下限、上限分别为

$$\varepsilon_{\alpha,\min}^c = \left(\sqrt{\varepsilon_\alpha^r} - \sqrt{m_\alpha\varepsilon'/m_a}\right)^2, \quad \varepsilon_{\alpha,\max}^c = \left(\sqrt{\varepsilon_\alpha^r} + \sqrt{m_\alpha\varepsilon'/m_a}\right)^2 \tag{5.6.64}$$

因而有

$$\varepsilon_{\alpha,\max}^c - \varepsilon_{\alpha,\min}^c = 4\sqrt{\frac{m_\alpha}{m_a}\varepsilon'\varepsilon_\alpha^r} \tag{5.6.65}$$

代入到 (5.6.63) 式的积分中, 又知, 直接三体崩裂粒子的能谱是归一化的, 于是得到

$$\int_{\varepsilon_{\alpha,\min}^c}^{\varepsilon_{\alpha,\max}^c} S_\alpha(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = 1 \tag{5.6.66}$$

因此证明了在质心系中, 从直接三体崩裂中的 ^{8}Be 再发生两体崩裂, 其崩裂出的 α 粒子的能谱是归一化的. 下面讨论在质心系中, 从上述 ^{10}Be 直接三体崩裂过程中, ^{8}Be 崩裂出的 α 粒子所携带的能量. 两体崩裂 α 粒子的能量对其能谱做平均, 得到

$$\int_{\varepsilon_{\alpha,\min}^c}^{\varepsilon_{\alpha,\max}^c} S_\alpha(\varepsilon)\varepsilon\mathrm{d}\varepsilon = \int_{\varepsilon_{\alpha,\min}^c}^{\varepsilon_{\alpha,\max}^c} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{m_a}{m_\alpha\varepsilon_\alpha^r}}\int_a^b \frac{S(\varepsilon_a^c)}{\sqrt{\varepsilon_a^c}}\mathrm{d}\varepsilon_a^c\varepsilon\mathrm{d}\varepsilon \tag{5.6.67}$$

交换积分顺序后, 记 $\varepsilon' = \varepsilon_a^c$, (5.6.67) 式变为

$$\int_{\varepsilon_{\alpha,\min}^c}^{\varepsilon_{\alpha,\max}^c} S_\alpha(\varepsilon)\varepsilon\mathrm{d}\varepsilon = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{m_a}{m_\alpha\varepsilon_\alpha^r}}\int_{\varepsilon_{\alpha,\min}^c}^{\varepsilon_{\alpha,\max}^c} \frac{S(\varepsilon')}{\sqrt{\varepsilon'}}\mathrm{d}\varepsilon' \int_{\varepsilon_{\alpha,\min}^c}^{\varepsilon_{\alpha,\max}^c} \varepsilon_\alpha^c\mathrm{d}\varepsilon_\alpha^c \tag{5.6.68}$$

由 (5.6.64) 式给出的对 ε_α^c 积分的上下限, 得到 (5.6.68) 式中对 ε_α^c 积分的结果为

$$\int_{\varepsilon_{\alpha,\min}^c}^{\varepsilon_{\alpha,\max}^c} \varepsilon_\alpha^c\mathrm{d}\varepsilon_\alpha^c = 4\sqrt{\frac{m_\alpha\varepsilon'\varepsilon}{m_a}}\left(\varepsilon_\alpha^r + \frac{m_\alpha}{m_a}\varepsilon'\right) \tag{5.6.69}$$

代入到 (2.6.68) 式, 得到

$$\bar{\varepsilon}_\alpha^c = \int_{\varepsilon_{\alpha,\min}^c}^{\varepsilon_{\alpha,\max}^c} S_\alpha(\varepsilon)\varepsilon\mathrm{d}\varepsilon = \int_{\varepsilon_{\alpha,\min}^c}^{\varepsilon_{\alpha,\max}^c} S(\varepsilon)\left(\varepsilon_\alpha^r + \frac{m_\alpha}{m_a}\varepsilon'\right)\mathrm{d}\varepsilon' = \varepsilon_\alpha^r + \frac{m_\alpha}{m_a}\bar{\varepsilon}_a^c \tag{5.6.70}$$

注意到 $2m_\alpha = m_a$, m_a 是 ^{8}Be 的质量. 因此在质心系中, ^{8}Be 两体崩裂出射的两个 α 粒子所携带的能量之和为

$$2\varepsilon_\alpha^r + \frac{2m_\alpha}{m_a}\bar{\varepsilon}_a^c = Q_8 + \bar{\varepsilon}_a^c \tag{5.6.71}$$

上述由 ^{8}Be 崩裂的 α 粒子, 在实验室系中的能量可以由质心系与实验室系的速度合成关系 $\boldsymbol{v}_\alpha^l = \boldsymbol{v}_\alpha^c + \boldsymbol{V}_\mathrm{C}$ 得到. 由于三体崩裂粒子都是各向同性发射的, 所以在实验室系中每个 α 粒子携带的平均动能为它在质心系中的平均动能加上质心动能分到 α 粒子上的那一部分

$$\bar{\varepsilon}_\alpha^l = \frac{m_\alpha m_\mathrm{n} E_\mathrm{n}}{M_\mathrm{C}^2} + \bar{\varepsilon}_\alpha^c \tag{5.6.72}$$

第三节已经给出, 在实验室系中, 直接三体崩裂粒子携带的平均能量为

$$\bar{\varepsilon}_b^l = \bar{\varepsilon}_c^l = \frac{m_\mathrm{n} m_\mathrm{n} E_\mathrm{n}}{M_\mathrm{C}^2} + \frac{1}{2}\varepsilon_{b,\max}^c \tag{5.6.73}$$

于是可以得到在实验室系中释放的总能量, 它就是由 b 和 c 粒子 (即两个中子) 携带的能量加上 ^{8}Be 两体崩裂的两个 α 粒子所携带的能量:

$$E_\mathrm{total}^l = 2\bar{\varepsilon}_\alpha^l + \bar{\varepsilon}_b^l + \bar{\varepsilon}_c^l = \frac{m_\mathrm{n} E_\mathrm{n}}{M_\mathrm{C}} + 2\varepsilon_\alpha^r + \bar{\varepsilon}_a^c + \varepsilon_{n,\max}^c \tag{5.6.74}$$

由直接三体崩裂的讨论中得知

$$\bar{\varepsilon}_a^c = \frac{1}{2}\varepsilon_{a,\max}^c = \frac{m_\mathrm{n}}{M_\mathrm{C}}(E^* - Q_3) \tag{5.6.75}$$

以及

$$\varepsilon_{n,\max}^c = \frac{M_\mathrm{C} - m_\mathrm{n}}{M_\mathrm{C}}(E^* - Q_3) \tag{5.6.76}$$

由此得到了在实验室系中, 从 $^{10}\mathrm{Be}$ 直接三体崩裂中的 $^{8}\mathrm{Be}$ 再两体崩裂出的两个 α 粒子携带的能量之和为

$$E_\mathrm{total}^l = E_\mathrm{n} + B_\mathrm{n} + Q_8 - Q_3 = E_\mathrm{n} + Q \tag{5.6.77}$$

上述这种独特核反应的 Q 值为 $Q = B_\mathrm{n} + Q_8 - Q_3$. 因此, $^{10}\mathrm{Be}$ 在质心系中三体崩裂中的 $^{8}\mathrm{Be}$ 再崩裂为两个 α 粒子的双微分截面表示也能够保证在实验室系中的能量平衡条件.

到此, 从连续谱到分立能级的核反应过程中出现的两种情况的运动学讨论完毕.

5.7　连续谱到连续谱的发射过程

下面研究从连续谱到连续谱的核反应过程的运动学 (C *to* C). 因为, 目前在轻核反应中, 只有在剩余核发生三体崩裂的情况下, 崩裂出的粒子才是连续谱. 由前面的讨论已知, 两次粒子以上发射后的剩余核是处于环形连续谱 (见图 5.7). 因此, 有序发射两个或两个以上粒子后, 其剩余核发生三体崩裂的过程都属于连续谱到连续谱的发射过程. 目前已知有 $^{6}\mathrm{He}$ 的第 1 激发态会发生三体崩裂. 例如,

$$^{7}\mathrm{Li(n, np + pn)}^{6}\mathrm{He}^*, \quad ^{10}\mathrm{B(n, p\alpha + \alpha p)}^{6}\mathrm{He}^*, \quad ^{11}\mathrm{B(n, d\alpha + \alpha d)}^{6}\mathrm{He}^*$$

等核反应的剩余核会发生 $^{6}\mathrm{He}^*$ 的三体崩裂. 因此, 它们都属于连续谱到连续谱的发射过程.

下面首先讨论两次粒子发射后剩余核 $^{6}\mathrm{He}$ 处于第 1 激发态的情况 (Zhang, 2001b, 2002b), 因为目前仅知道 $^{6}\mathrm{He}$ 的第 1 激发态是发生三体崩裂成两个中子和一个 α 粒子, 这是一种从连续谱到连续谱的情况. 而 $E_\mathrm{brk} = 1.797\mathrm{MeV}$ 是 $^{6}\mathrm{He}^*$ 第 1 激发态的能量. 当然, 如果需要的话, 仿照下面的思路, 也同样能处理两次以上粒子发射后到达剩余核 $^{6}\mathrm{He}$ 的第 1 激发态的三体崩裂情况. 图 5.12 示意地表示了这种核反应过程.

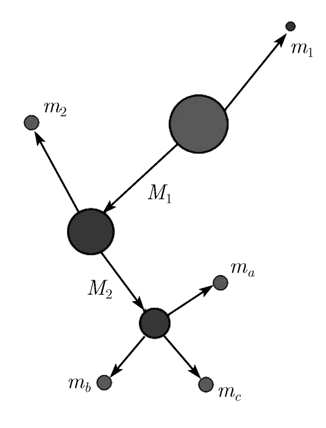


图 5.12　两次粒子发射后 $^{6}\mathrm{He}^*$ 三体崩裂过程的示意图

无论在质心系或是在实验室系中, 一、二次发射粒子的能量表示都已经在第四节中给出了, 由 (5.4.52) 式给出的二次剩余核在质心系中的最大和最小能量值以及 (5.4.66) 式给出的二次剩余核在质心系中的平均能量. 在质心系中, 二次剩余核能量的归一化双微分截面由 (5.4.53) 式给出, 其 Legendre 展开系数由 (5.4.54) 式给出.

在 5.3 节中已经给出了在剩余核运动系中三体崩裂粒子的双微分截面和能谱表示, 以及三体崩裂的 i 粒子发射能量的最大值. 但是这里 M_2 是二次粒子发射后剩余核 ^{6}He 的质量. 由 (5.1.9) 式给出双微分截面在质心系与余核运动系之间的关系, 于是在质心系中的三体崩裂的 i 粒子双微分截面表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_i^c\mathrm{d}\Omega_i^c}=\sqrt{\frac{\varepsilon_i^c}{\varepsilon_i^r}}\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_i^r\mathrm{d}\Omega_i^r}=\sqrt{\frac{\varepsilon_i^c}{\varepsilon_i^r}}\frac{S(\varepsilon_i^r)}{4\pi} \tag{5.7.1}$$

将 i 粒子的双微分截面对二次剩余核的归一化双微分截面平均之后, 得到质心系中三体崩裂 i 粒子的双微分截面表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_i^c\mathrm{d}\Omega_i^c}=\int\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}E_2^c\mathrm{d}\Omega_{M_2}^c}\sqrt{\frac{\varepsilon_i^c}{\varepsilon_i^r}}\frac{S(\varepsilon_i^r)}{4\pi}\mathrm{d}E_2^c\mathrm{d}\Omega_{M_2}^c \tag{5.7.2}$$

ε_i^c 是 i 粒子在质心系中的能量, 写成双微分截面的标准形式时,

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_i^c\mathrm{d}\Omega_i^c}=\frac{1}{4\pi}\sum_l(2l+1)f_l^c(\varepsilon_i^c)P_l(\cos\theta_i^c) \tag{5.7.3}$$

这里 θ_i^c 是三体崩裂 i 粒子在质心系中的角度. 将上面两个双微分截面表示两边分别都乘上因子 $2\pi P_l(\cos\theta_i^c)$, 并对 $\cos\theta_i^c$ 积分, 利用 Legendre 多项式的正交性, 得到 i 粒子在质心系中的 Legendre 展开系数为

$$f_l^c(\varepsilon_i^c)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta_i^c\int\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}E_2^c\mathrm{d}\Omega_{M_2}^c}P_l(\cos\theta_i^c)\sqrt{\frac{\varepsilon_i^c}{\varepsilon_i^r}}S(\varepsilon_i^r)\mathrm{d}E_2^c\mathrm{d}\Omega_{M_2}^c \tag{5.7.4}$$

在质心系中, 如果用 θ 表示二次剩余核的速度 $\boldsymbol{v}_{M_2}^c$ 与三体崩裂 i 粒子的速度 $\boldsymbol{v}_i^c$ 之间的夹角, 利用球谐函数的加法定理公式 (5.5.9), 仅在这里用 $\theta_{M_2}^c$ 代替了 $\theta_{M_1}^c$. 在 (5.7.4) 式中, 对 $\Omega_{M_2}^c$ 的积分可以用对 $\mathrm{d}\cos\theta\mathrm{d}\varphi$ 的积分代替. 对 φ 的积分使得带 m 的项消失, 第一项仅出现因子 2π. 将二次剩余核的双微分截面表示代入到 (5.7.4) 式中, 得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_i^c\mathrm{d}\Omega_i^c}=\int\sqrt{\frac{\varepsilon_i^c}{\varepsilon_i^r}}\frac{S(\varepsilon_i^r)}{8\pi}\sum_l(2l+1)f_l^c(E_2^c)P_l(\cos\theta_i^c)P_l(\cos\theta)\mathrm{d}E_2^c\mathrm{d}\cos\theta \tag{5.7.5}$$

Legendre 多项式展开系数 (5.7.4) 可以表示为

$$f_l(\varepsilon_i^c) = 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_i^c \mathrm{d}\Omega_i^c} P_l(\cos\theta_i^c)\mathrm{d}\cos\theta_i^c \tag{5.7.6}$$

将 (5.7.5) 式代入到 (5.7.6) 式中, 完成对 $\cos\theta$ 的积分, 得到

$$f_l(\varepsilon_i^c) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{\varepsilon_i^c}{\varepsilon_i^r}} S(\varepsilon_i^r) f_l^c(E_2^c) P_l(\cos\theta)\mathrm{d}E_2^c \mathrm{d}\cos\theta \tag{5.7.7}$$

由速度合成关系 $\boldsymbol{v}_i^r = \boldsymbol{v}_i^c - \boldsymbol{v}_{M_2}^c$ 可以得到各种能量与 $\cos\theta$ 的等式：

$$\varepsilon_i^r = \varepsilon_i^c + \frac{m_i}{M_2} E_2^c - 2\sqrt{m_i E_2^c \varepsilon_i^c / M_2 \cos\theta} \tag{5.7.8}$$

利用 (5.7.8) 式, 可以将对 $\mathrm{d}\cos\theta$ 的积分换为对 $\varepsilon_i^r \equiv \varepsilon$ 的积分. 它们的微分关系是

$$\mathrm{d}\cos\theta = -\frac{\sqrt{M_2}}{2\sqrt{m_i E_2^c \varepsilon_i^c}} \mathrm{d}\varepsilon \tag{5.7.9}$$

这时 i 粒子在质心系中的 Legendre 展开系数约化为

$$f_l^c(\varepsilon_i^c) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{M_2}{m_i}} \int_A^B \mathrm{d}E_2^c \frac{f_l^c(E_2^c)}{\sqrt{E_2^c}} \int_a^b \frac{S(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} P_l\left(\frac{\varepsilon_i^c + \frac{m_i}{M_2}E_2^c - \varepsilon}{2\sqrt{\frac{m_i}{M_2}E_2^c \varepsilon_i^c}}\right)\mathrm{d}\varepsilon \tag{5.7.10}$$

下面需要确定 (5.7.10) 公式中的积分上下限 a 和 b. 首先, 在给定 ε_i^c 和 E_2^c 数值后, 由速度合成关系 $\boldsymbol{v}_i^r = \boldsymbol{v}_i^c - \boldsymbol{v}_{M_2}^c$ 可以得到对 ε_i^r 的积分限. $\boldsymbol{v}_i^c$ 与 $\boldsymbol{v}_{M_2}^c$ 方向相同时给出积分下限：

$$a = \left(\sqrt{\varepsilon_i^c} - \sqrt{\frac{m_i}{M_2}E_2^c}\right)^2 \tag{5.7.11}$$

而 $\boldsymbol{v}_i^c$ 与 $\boldsymbol{v}_{M_2}^c$ 方向相反时则给出积分上限, 但是对应的能量不能超过三体崩裂能量的最大值 $\varepsilon_{i,\max}^r$, 因此对 ε_i^r 的积分上限为

$$b = \min\left\{\varepsilon_{i,\max}^r, \left(\sqrt{\varepsilon_i^c} + \sqrt{\frac{m_i}{M_2}E_2^c}\right)^2\right\} \tag{5.7.12}$$

关于 E_2^c 的积分上下限, 当给定 ε_i^c 数值后, 由速度合成关系 $\boldsymbol{v}_{M_2}^c = \boldsymbol{v}_i^c - \boldsymbol{v}_i^r$ 可以看出, $\boldsymbol{v}_i^c$ 与 $\boldsymbol{v}_i^r$ 方向相反时给出积分上限, 但是需要考虑到剩余核能谱存在能量最大值 $E_{2,\max}^c$, 因此对 E_2^c 的积分上限为

$$B = \min\left\{E_{2,\max}^c, \frac{M_2}{m_i}\left(\sqrt{\varepsilon_{i,\max}^r} + \sqrt{\varepsilon_i^c}\right)^2\right\} \tag{5.7.13}$$

而 $\boldsymbol{v}_i^c$ 与 $\boldsymbol{v}_i^r$ 方向相同时给出积分下限, 但不能低于二次剩余核能量的最小值 $E_{2,\min}^c$, 因此对 E_2^c 积分的下限为

$$A=\begin{cases}\dfrac{M_2}{m_i}(\sqrt{\varepsilon_{i,\min}^r}-\sqrt{\varepsilon_i^c})^2, & \text{当}\ \sqrt{\dfrac{m_i}{M_2}E_{2,\min}^c}\leqslant|\sqrt{\varepsilon_{i,\min}^r}-\sqrt{\varepsilon_i^c}|\\ E_{2,\min}, & \text{当}\ \sqrt{\dfrac{m_i}{M_2}E_{2,\min}^c}\geqslant|\sqrt{\varepsilon_{i,\min}^r}-\sqrt{\varepsilon_i^c}|\end{cases}\tag{5.7.14}$$

得到了对 ε_i^r 积分的上下限和对 E_2^c 积分的上下限之后, 就可以计算出二次剩余核的三体崩裂中 i 粒子双微分截面谱的 Legendre 展开系数 $f_l^c(\varepsilon_i^c)$.

下面来证明这个双微分截面中的能谱是归一化的. 为此, 需要先确定 ε_i^c 的能量范围. 由速度合成关系 $\boldsymbol{v}_i^c=\boldsymbol{v}_{M_2}^c+\boldsymbol{v}_i^r$ 可以看出, 当 $\boldsymbol{v}_i^r$ 与 $\boldsymbol{v}_{M_2}^c$ 方向相同并都取最大值时, 就给出 ε_i^c 的最大值为

$$\varepsilon_{i,\max}^c=\left(\sqrt{\varepsilon_{i,\max}^r}+\sqrt{\frac{m_i}{M_2}E_{2,\max}^c}\right)^2\tag{5.7.15}$$

而当 $\boldsymbol{v}_i^r$ 与 $\boldsymbol{v}_{M_2}^c$ 方向相反时, 并且注意到, 如果 $v_{i,\max}^r<v_{M_2,\min}^c$, 无论如何两者都不能彼此抵消; 而 $v_{i,\max}^r>v_{M,\min}^c$ 时, 总会有一个 $\boldsymbol{v}_i^r$ 值恰好与 $\boldsymbol{v}_{M_2}^c$ 的合成速度为 0, 即 ε_i^c 的最小值为 0. 综合起来, ε_i^c 的最小值可表示为

$$\varepsilon_{i,\min}^c=\begin{cases}\left(\sqrt{\dfrac{m_i}{M_2}E_{2,\min}^c}-\sqrt{\varepsilon_{i,\max}^r}\right)^2, & \text{当}\ \varepsilon_{i,\max}^r<\dfrac{m_i}{M_2}E_{2,\min}^c\\ 0, & \text{当}\ \varepsilon_{i,\max}^r\geqslant\dfrac{m_i}{M_2}E_{2,\min}^c\end{cases}\tag{5.7.16}$$

在质心系中, 三体崩裂 i 粒子的能量满足 $\varepsilon_{i,\min}^c\leqslant\varepsilon_i^c\leqslant\varepsilon_{i,\max}^c$.

在对能谱归一化的积分中, 利用交换积分顺序, 先对 ε_i^c 积分, 再对 ε_i^r 积分, 最后对 E_2^c 积分. 这时在给定 E_2^c 和 ε_i^r 数值之后, 对 ε_i^c 的积分上下限可以由速度合成关系分别得到

$$\varepsilon_{i,\max}^c=\left(\sqrt{\frac{m_i}{M_2}E_2^c}+\sqrt{\varepsilon_i^r}\right)^2,\quad \varepsilon_{i,\min}^c=\left(\sqrt{\frac{m_i}{M_2}E_2^c}-\sqrt{\varepsilon_i^r}\right)^2\tag{5.7.17}$$

因此归一化积分变为

$$\int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c}f_0^c(\varepsilon_i^c)\mathrm{d}\varepsilon_i^c=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{M_2}{m_i}}\int_{E_{2,\min}^c}^{E_{2,\max}^c}\mathrm{d}E_2^c\frac{f_0^c(E_2^c)}{\sqrt{E_2^c}}\int_0^{\varepsilon_{i,\max}^r}\mathrm{d}\varepsilon_i^r\frac{S(\varepsilon_i^r)}{\sqrt{\varepsilon_i^r}}\int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c}\mathrm{d}\varepsilon_i^c\tag{5.7.18}$$

最内层对 ε_i^c 的积分结果为

$$\int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c}\mathrm{d}\varepsilon_i^c=4\sqrt{\frac{m_i}{M_2}E_2^c\varepsilon_i^r}\tag{5.7.19}$$

代入 (5.7.18) 式后, 可以消去被积函数的分母中包含的 $\sqrt{E_2^c}$ 和 $\sqrt{\varepsilon_i^r}$, 以及前面的系数. 又知, $S(\varepsilon_i^r)$ 和 $f_0^c(E_2^c)$ 都是归一化的, 因此最后得到

$$\int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c} f_0^c(\varepsilon_i^c)\mathrm{d}\varepsilon_i^c = 1 \tag{5.7.20}$$

由此证明了由 (5.7.10) 式给出的能谱是归一化的.

作为计算示例, 在表 5.4 中给出了对 $^7\mathrm{Li(n, np+pn)}^6\mathrm{He}^*$ 反应, 在 $E_\mathrm{n}=14\mathrm{MeV}$ 时, 用 (5.7.10) 式计算的在剩余核 ^{6}He 三体崩裂中的中子双微分截面的 Legendre 展开系数. 计算结果表明, 展开系数随分波 l 的加大而迅速减小, 可以近似视为各向同性. 由表中结果还可以看出, 由于在 ^{6}He 的三体崩裂前已经有了两次粒子发射, 一次粒子发射的反冲效应被明显掩盖, 这时 $l=1$ 分波的系数 $f_1(\varepsilon)$ 都大于 0. 另一方面, 从归一化能谱 $f_0(\varepsilon)$ 来看, 峰值是在 0.216MeV 附近, 随着出射中子能量的提高, 能谱值迅速降低, 属于软能谱.

表 5.4　$E_\mathrm{n}=14\mathrm{MeV}$ 时 $^7\mathrm{Li(n, np+pn)}^6\mathrm{He}^*$ 反应中 ^{6}He 三体崩裂中子的双微分截面在质心系中的 Legendre 系数

ε/MeV	$f_0(\varepsilon)$/MeV	$f_1(\varepsilon)$/MeV	$f_2(\varepsilon)$/MeV	$f_3(\varepsilon)$/MeV	$f_4(\varepsilon)$/MeV
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.018	5.348×10^{-1}	5.215×10^{-4}	-1.254×10^{-6}	2.549×10^{-8}	-6.311×10^{-10}
0.091	1.126	2.927×10^{-3}	-1.900×10^{-5}	1.040×10^{-6}	-6.824×10^{-8}
0.216	1.450	8.573×10^{-3}	-1.360×10^{-4}	1.874×10^{-5}	-3.141×10^{-6}
0.382	1.274	1.934×10^{-2}	-1.670×10^{-4}	-1.410×10^{-4}	6.114×10^{-5}
0.574	9.744×10^{-1}	2.152×10^{-2}	7.661×10^{-4}	-2.169×10^{-4}	-6.721×10^{-5}
0.775	6.512×10^{-1}	1.769×10^{-2}	1.299×10^{-3}	1.139×10^{-4}	-8.815×10^{-5}
0.967	3.661×10^{-1}	1.134×10^{-2}	1.171×10^{-3}	3.477×10^{-4}	4.092×10^{-5}
1.132	1.597×10^{-1}	5.389×10^{-3}	6.773×10^{-4}	2.971×10^{-4}	1.027×10^{-4}
1.258	4.430×10^{-2}	1.579×10^{-3}	2.226×10^{-4}	1.183×10^{-4}	5.561×10^{-5}
1.331	3.800×10^{-3}	1.393×10^{-4}	2.083×10^{-5}	1.211×10^{-5}	6.460×10^{-6}
1.349	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

下面讨论能量平衡问题. 在质心系中考虑二次剩余核的三体崩裂中的第 i 粒子所携带的平均能量为

$$\bar{\varepsilon}_i^c = \int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c} \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_i^c \mathrm{d}\Omega_i^c}\varepsilon_i^c \mathrm{d}\varepsilon_i^c \mathrm{d}\Omega_i^c \tag{5.7.21}$$

将质心系中第 i 粒子的双微分截面表示 (5.7.10) 式代入 (5.7.21) 式, 完成对角度的积分后, 再交换积分顺序, 由此得到

$$\bar{\varepsilon}_i^c = \int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c} f_0^c(\varepsilon_i^c)\varepsilon_i^c \mathrm{d}\varepsilon_i^c = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{M_2}{m_i}}\int_{E_{2,\min}^c}^{E_{2,\max}^c}\mathrm{d}E_2^c \frac{f_0^c(E_2^c)}{\sqrt{E_2^c}}\int_0^{\varepsilon_{i,\max}^r}\mathrm{d}\varepsilon_i^r \frac{S(\varepsilon_i^r)}{\sqrt{\varepsilon_i^r}}\int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c}\varepsilon_i^c \mathrm{d}\varepsilon_i^c \tag{5.7.22}$$

对最内层 ε_i^c 的积分得到的积分结果是

$$\int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c} \varepsilon_i^c \mathrm{d}\varepsilon_i^c = 4\sqrt{\frac{m_i}{M_2}E_2^c\varepsilon_i^r}\left(\varepsilon_i^r + \frac{m_i}{M_2}E_2^c\right) \tag{5.7.23}$$

将其代入 (5.7.22) 式后得到

$$\bar{\varepsilon}_i^c = \int_{E_{2,\min}^c}^{E_{2,\max}^c} \mathrm{d}E_2^c f_0^c(E_2^c) \int_0^{\varepsilon_{i,\max}^r} S(\varepsilon_i^r)\left(\varepsilon_i^r + \frac{m_i}{M_2}E_2^c\right)\mathrm{d}\varepsilon_i^r \tag{5.7.24}$$

完成对 ε_i^c 的积分后得到

$$\bar{\varepsilon}_i^c = \int_{E_{2,\min}^c}^{E_{2,\max}^c} f_0^c(E_2^c)\left[\bar{\varepsilon}_i^r + \frac{m_i}{M_2}E_2^c\right]\mathrm{d}E_2^c \tag{5.7.25}$$

最后完成对 E_2^c 的积分, 得到质心系中三体崩裂中 i 粒子携带的平均能量为

$$\bar{\varepsilon}_i^c = \bar{\varepsilon}_i^r + \frac{m_i}{M_2}\bar{E}_2^c \tag{5.7.26}$$

由此得到在质心系中, $i = 1, 2, 3$ 的三个崩裂粒子携带的平均总能量为

$$\sum_{i=a,b,c} \bar{\varepsilon}_i^c = E_{\mathrm{brk}} + \bar{E}_2^c \tag{5.7.27}$$

同样, 在实验室系中, 由质心系和实验室系的速度合成关系可以得到三体崩裂的第 i 粒子携带的平均能量为

$$\bar{\varepsilon}_i^l = \frac{m_i m_{\mathrm{n}} E_{\mathrm{n}}}{M_{\mathrm{C}}^2} + \bar{\varepsilon}_i^c + 2\frac{\sqrt{m_i m_{\mathrm{n}} E_{\mathrm{n}}}}{M_{\mathrm{C}}}\int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c} \sqrt{\varepsilon_i^c} f_1^c(\varepsilon_i^c)\mathrm{d}\varepsilon_i^c \tag{5.7.28}$$

将由 (5.7.10) 式得到的 $f_1^c(\varepsilon_i^c)$ 的表示代入后得到

$$f_1^c(\varepsilon_i^c) = \frac{1}{8}\frac{M_2}{m_i\sqrt{\varepsilon_i^c}}\int_A^B \mathrm{d}E_2^c \frac{f_1^c(E_2^c)}{E_2^c}\int_a^b \frac{S(\varepsilon_i^r)}{\sqrt{\varepsilon_i^r}}\left(\varepsilon_i^c + \frac{m_i}{M_2}E_2^c - \varepsilon_i^r\right)\mathrm{d}\varepsilon_i^r \tag{5.7.29}$$

将其代入 (5.7.28) 式第三项中, 积分部分变为

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c} \sqrt{\varepsilon_i^c} f_1^c(\varepsilon_i^c)\mathrm{d}\varepsilon_i^c = \frac{M_2}{8m_i}\int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c} \mathrm{d}\varepsilon_i^c \int_A^B \mathrm{d}E_2^c \frac{f_1^c(E_2^c)}{E_2^c}\int_a^b \frac{S(\varepsilon_i^r)}{\sqrt{\varepsilon_i^r}} \\ \times\left(\varepsilon_i^c + \frac{m_i}{M_2}E_2^c - \varepsilon_i^r\right)\mathrm{d}\varepsilon_i^r\end{aligned} \tag{5.7.30}$$

再应用交换积分顺序的方式, (5.7.30) 式被改写为

$$\int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c} \sqrt{\varepsilon_i^c} f_1^c(\varepsilon_i^c)\mathrm{d}\varepsilon_i^c = \frac{M_2}{8m_i}\int_{E_{2,\min}^c}^{E_{2,\max}^c} \mathrm{d}E_2^c \frac{f_1^c(E_2^c)}{E_2^c}\int_0^{\varepsilon_{i,\max}^r}$$

$$\times \mathrm{d}\varepsilon_i^r \frac{S(\varepsilon_i^r)}{\sqrt{\varepsilon_i^r}} \int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c} \left(\varepsilon_i^c + \frac{m_i}{M_2} E_2^c - \varepsilon_i^r\right) \mathrm{d}\varepsilon_i^c \tag{5.7.31}$$

完成 (5.7.31) 式中最内层对 ε_i^c 的积分后得到

$$\int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c} \left(\varepsilon_i^c + \frac{m_i}{M_2} E_2^c - \varepsilon_i^r\right) \mathrm{d}\varepsilon_i^c = 8\sqrt{\frac{m_i}{M_2} E_2^c \varepsilon_i^r} \frac{m_i}{M_2} E_2^c \tag{5.7.32}$$

将 (5.7.32) 式的结果代入到 (5.7.31) 式后, (5.7.31) 式被约化为

$$\int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c} \sqrt{\varepsilon_i^c} f_1^c(\varepsilon_i^c) \mathrm{d}\varepsilon_i^c = \sqrt{\frac{m_i}{M_2}} \int_{E_{2,\min}^c}^{E_{2,\max}^c} \mathrm{d}E_2^c \sqrt{E_2^c} f_1^c(E_2^c) \int_0^{\varepsilon_{i,\max}^r} S(\varepsilon_i^r) \mathrm{d}\varepsilon_i^r \tag{5.7.33}$$

由 (5.4.60) 式得到的二次粒子发射后剩余核的 $l=1$ 阶 Legendre 展开系数表示

$$f_1^c(E_2^c) = -\frac{1}{8\Gamma^2 E_2^r} f_1^c(m_1) \sqrt{\frac{E_2^r}{E_2^c}} \left(\frac{E_2^c}{E_2^r} - 1 + \Gamma^2\right) \tag{5.7.34}$$

将其代入 (5.7.33) 式, 注意到 $S(\varepsilon_i^r)$ 对 ε_i^r 积分是归一化的. 于是有

$$\int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c} \sqrt{\varepsilon_i^c} f_1^c(\varepsilon_i^c) \mathrm{d}\varepsilon_i^c = -\sqrt{\frac{m_i}{M_2 E_2^r}} \frac{1}{8\Gamma^2} f_1^c(m_1) \int_{E_{2,\min}^c}^{E_{2,\max}^c} \mathrm{d}E_2^c \left(\frac{E_2^c}{E_2^r} - 1 + \Gamma^2\right) \tag{5.7.35}$$

利用前面给出的 $E_{2,\max}^c$, $E_{2,\min}^c$ 和 (5.4.51) 给出的 Γ 的表达式, 完成 E_2^c 的积分后得到

$$\int_{\varepsilon_{i,\min}^c}^{\varepsilon_{i,\max}^c} \sqrt{\varepsilon_i^c} f_1^c(\varepsilon_i^c) \mathrm{d}\varepsilon_i^c = -\sqrt{\frac{m_i}{M_2 E_2^r}} f_1^c(m_1) E_2^r \Gamma = -\sqrt{\frac{m_i E_1^c}{M_1}} f_1^c(m_1) \tag{5.7.36}$$

将 (5.7.36) 式代入 (5.7.28) 式后, 得到三体崩裂中的 i 粒子在实验室系中携带的平均能量为

$$\bar{\varepsilon}_i^l = \frac{m_i m_\mathrm{n} E_\mathrm{n}}{M_\mathrm{C}^2} + \bar{\varepsilon}_i^c - 2\frac{m_i}{M_\mathrm{C}} \sqrt{\frac{m_\mathrm{n} E_\mathrm{n} E_1^c}{M_1}} f_1^c(m_1) \tag{5.7.37}$$

因此, 在实验室系中, $i=1,2,3$ 的三个崩裂粒子携带的平均总能量为

$$\sum_{i=a,b,c} \bar{\varepsilon}_i^l = \frac{M_2 m_\mathrm{n} E_\mathrm{n}}{M_\mathrm{C}^2} + E_\mathrm{brk} + \bar{E}_2^c - 2\frac{M_2}{M_\mathrm{C}} \sqrt{\frac{m_\mathrm{n} E_\mathrm{n} E_1^c}{M_1}} f_1^c(m_1) \tag{5.7.38}$$

在实验室系中, 由 (5.2.3) 式给出的一次发射粒子携带的平均能量 $\bar{\varepsilon}_1^l$, 以及由 (5.4.74) 式给出的二次发射粒子携带的平均能量 $\bar{\varepsilon}_2^l$, 可以看出, 将上面五个出射粒子的能量求和后, 与 $f_1^c(m_1)$ 有关的项彼此相消. 因此, 在实验室系中, 五个出射粒子携带的平均总能量为

$$E_\mathrm{total}^l = \frac{m_\mathrm{n} E_\mathrm{n}}{M_\mathrm{C}} + E_\mathrm{brk} + \bar{E}_2^c + \varepsilon_1^c + \bar{\varepsilon}_2^c = E_\mathrm{n} + B_\mathrm{n} - B_1 - B_2 = E_\mathrm{n} + Q \tag{5.7.39}$$

上述两次粒子发射后再进行 ^{6}He 的三体崩裂过程的反应的 Q 值为 $Q = B_{\rm n} - B_1 - B_2$, 因此, 双微分截面公式 (5.7.10) 给出的在两次粒子发射后, 其剩余核 ^{6}He 再发生三体崩裂的核反应过程中, 在实验室系中也严格满足能量平衡条件. 注意到这时 Q 值与有序发射两个粒子的结果 (5.4.81) 式完全相同. 但是, 这里不同的是在有序发射两个粒子后剩余核是必须达到 ^{6}He 的第 1 激发态, 因此, 在反应阈能上是有所不同的.

至此, 对于轻核反应中可能出现的各种粒子发射模式, 在用质心系中的 Legendre 展开系数的形式下, 出射粒子的双微分截面的理论表示都已经被给出. 无论是粒子的有序发射和非有序发射, 包括剩余核或发射粒子的两体崩裂, 以及三体崩裂过程, 都可以用上述的推导结果给出. 因此, 尽管轻核反应非常复杂, 但是形形色色的核反应过程的运动学都包含在前述的几类之中. 核反应运动学给出发射粒子双微分谱准确的形状和位置, 而每个分谱的大小则由核反应动力学给出. 关于核反应运动学的更详细的内容可参见核科技报告 (Zhang, 2003b).

由公式 (1.4.4) 指出, ^{9}Be(n, 2n) 反应道是通过六种不同的反应途径来实现的. 其中包括连续发射两个中子, 以及发射一个中子和一个 α 粒子后, 剩余核 $^5{\rm He} \to {\rm n} + \alpha$ 的两体崩裂过程, 其中的第二个粒子发射是属于 D to D 运动学过程, 连续发射两个中子后, 剩余核 $^8{\rm Be} \to \alpha + \alpha$ 的两体崩裂过程的 α 粒子是属于 C to D 运动学过程, 同样, 复合核直接三体崩裂 $^{10}{\rm Be}^* \to {\rm n} + {\rm n} + {}^8{\rm Be}$ 中的 $^8{\rm Be} \to \alpha + \alpha$ 两体崩裂出的 α 粒子也是属于 C to D 运动学过程, 而在发射一个 α 粒子后, 剩余核 ^{6}He 处于第 1 激发能级时, 出现 $^6{\rm He} \to {\rm n} + {\rm n} + \alpha$ 的三体崩裂过程, 这些中子和 α 粒子都属于 D to C 运动学过程. 由此可见, ^{9}Be(n, 2n) 的反应道中包含了多种运动学过程. 由于有了上述各种运动模式下的运动学公式, 可以给出保证能量平衡的双微分截面数据. 在编写的 LUNF 程序中, 应用了上面给出的各种运动模式下的运动学公式. 作为实际计算的例子, 对中子引发 ^{9}Be(n, 2n) 反应道的双微分截面的能量平衡结果由表 5.5 给出, 而关于双微分截面谱的计算结果则由第 6 章给出.

表 5.5 ^{9}Be(n, 2n2α) 反应道中, 出射的中子和 α 粒子的携带能量和能量平衡情况

$E_{\rm n}$/MeV	E_{av}/MeV	Diff %/MeV	$E_{\rm sum}$/MeV	n/MeV	α/MeV
2.70	0.855	0.29	0.853	0.672	0.181
3.25	1.35	0.16	1.35	1.12	0.227
3.90	1.93	0.10	1.93	1.64	0.295
4.50	2.47	0.02	2.47	2.01	0.461
5.90	3.73	0.01	3.73	2.83	0.901
6.40	4.18	0.00	4.18	3.12	1.06
7.05	4.77	0.01	4.77	3.55	1.21
8.40	5.98	0.04	5.98	4.34	1.63
10.3	7.65	0.06	7.65	5.46	2.19

续表

E_n/MeV	E_{av}/MeV	Diff %/MeV	E_{sum}/MeV	n/MeV	α/MeV
11.0	8.32	0.06	8.32	5.91	2.40
12.0	9.22	0.06	9.21	6.53	2.68
13.0	10.1	0.06	10.1	7.22	2.89
14.1	11.1	0.06	11.1	8.01	3.09
15.0	11.9	0.07	11.9	8.65	3.26
16.0	12.8	0.07	12.8	9.38	3.43
17.0	13.7	0.07	13.7	10.1	3.61
18.0	14.6	0.07	14.6	10.9	3.74
19.0	15.5	0.07	15.5	11.6	3.89
20.0	16.4	0.07	16.4	12.4	4.03

注: E_{av} 是在质心系中理论上总释放能量, E_{sum} 是计算得到的总释放能量. Diff% $\equiv 100 \times (E_{sum} - E_{av})/E_{av}$ 是计算能量差别的百分比, 后两列分别为中子和 α 粒子携带的能量.

由表 5.5 中的结果看出, 保证了能量平衡. 另外还可以看到, 在 ^{9}Be(n, 2n2α) 反应道中出射的中子所携带能量总是大于 α 粒子携带的能量. 因而也可以得到在不同入射中子能量时, 中子和 α 粒子携带的能量在总能量中所占的百分比.

轻核反应运动学是计算轻核反应双微分截面数据不可或缺的理论基础.

5.8 Kerma 系数的简介

在核反应过程中, 会发射 γ 射线、中子、各种带电粒子以及对应的剩余核、包括弹性散射和非弹性散射的反冲核等. 由于中子和 γ 射线不带电, 自由程长, 会很容易从物质中跑掉, 因此辐射防护问题是对于中子和 γ 射线. 而带电粒子, 如质子 (p)、氘 (d)、氚 (t)、α 粒子, 以及核反应中的各种反冲核, 由于与核外电子和其他带电核之间的库仑场的相互作用, 它们都会滞留在物质内部离反应位置很近之处, 它们的动能都耗损在物质内部, 并转化为相应的热量, 这就是所谓物质的"阻止本领", 不同核素具有不同的阻止本领.

在核工程和核医学的应用中, 这种带电粒子滞留在物质内部所产生的热能被称之为 Kerma 系数, 它是 Kinetic Energy Released in Material 的缩写. Kerma 系数对于确定核工程中材料、元件的辐照损伤, 热工系统的传热、载热, 冷却方面的设计以及核医学中确定放射治疗的辐照剂量等方面, 都起着关键作用.

在核医学中, 很早就考虑如何利用中子治疗癌症 (Stone, 1948). 其原理就是让中子束流在癌细胞位置发生核反应产生带电粒子和反冲核, 通过它们的电离作用破坏癌细胞组织, 达到治疗癌症的作用. 目前主要有硼的热中子俘获治癌、快中子治癌和近距中子治癌等方式. 关于中子治癌的发展过程可以参见有关文献 (丁大钊

等, 2005). 而人体有机组织的主要成分是碳、氢和氧, 以及少量的氮. 中子与质子只有弹性散射过程, 目前这方面的核数据已经相当丰富而准确. 而另外两个主要元素碳和氧元素都是属于 1p 壳轻核, 中子与它们发生核反应后, 会产生带电粒子和反冲核, 由于它们与核外电场之间的库仑相互作用, 它们携带的动能都转化为热量而滞留在人体内. 在核医学应用中, 确定最佳入射能量, 定准辐照位置、精确计算辐照吸收剂量都是非常重要的, 而辐照剂量在一级近似下正比于吸收剂量. 而与吸收剂量紧密联系的物理量就是 Kerma 系数. 当然, 对于辐照损伤来说, 还包含了初始原子位移、氦气产生以及电离过程等. 本书的内容仅限于讨论 Kerma 系数.

其实 Kerma 系数就是在实验室系中, 从各种核反应过程中产生的带电粒子和反冲核所携带的平均动能的总和. 前面已经给出了实验室系中, 在一定中子入射能量下, 各种类型轻核反应从各分反应道所释放的能量, 将其乘以相应分反应道的截面, 再按不同出射粒子和反冲核分类相加, 就得到各种粒子和反冲核的分 Kerma 系数. Kerma 系数包括弹性散射反冲核的 Kerma 系数, 非弹性散射反冲剩余核的 Kerma 系数, 各反应道的出射粒子和对应反冲剩余核的 Kerma 系数, 以及俘获辐射的反冲剩余核的 Kerma 系数. 将这些分 Kerma 系数求和后就得到总 Kerma 系数. 一般来说, 发射带电粒子包括：质子、氘核、^{3}He 以及 α 粒子, 其质量数都小于等于 4, 而 ^{5}He 的发射会自发崩裂为一个中子和一个 α 粒子, α 粒子的质量等于 4. 而剩余核也都是带电的, 质量数范围却很广.

第 5 章给出了从各分反应道中各种粒子所释放的能量. 但是其中没有对弹性散射进行讨论. 因此, 这里将给出弹性散射的 Kerma 系数公式. 在弹性散射过程中, 仅是原来在实验室系中静止的靶核经过弹性散射后在实验室系的运动能量贡献到 Kerma 系数中, 在实验方面也对 ^{12}C 的弹性散射和非弹性散射的 Kerma 系数进行了测量 (Ohlson, 1989). 根据统计理论的原理, 任何可观测的物理量都是由这个物理量对分布函数的平均值给出. 因此, 在弹性散射中, 散射中子在实验室系中的能量是由散射中子能量对弹性散射角分布的平均. 在 Legendre 展开系数形式下, 弹性散射角分布通常是在质心系中以下面形式给出

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega^c}=\sum_l\frac{2l+1}{4\pi}f_l^{\mathrm{el}}(c)P_l(\cos\theta^c) \tag{5.8.1}$$

而在实验室系中的中子散射平均能量由下式给出：

$$\bar{E}_l^{\mathrm{el}}(n)=\int\varepsilon_l^{\mathrm{el}}(n)\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{el}}}{\mathrm{d}\Omega^l}\mathrm{d}\Omega^l=\int\varepsilon_l^{\mathrm{el}}(n)\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{el}}}{\mathrm{d}\Omega^c}\mathrm{d}\Omega^c \tag{5.8.2}$$

在实验室系中, 散射中子的能量是散射角度的函数, 用速度合成关系可以得到用质心系中的散射角度表示的能量关系

$$\varepsilon_l^{\mathrm{el}}(n)=\frac{m_{\mathrm{n}}^2}{M_{\mathrm{C}}^2}E_{\mathrm{n}}+2\frac{m_{\mathrm{n}}}{M_{\mathrm{C}}}\sqrt{\varepsilon_c^{\mathrm{el}}(n)E_{\mathrm{n}}}\cos\theta^c+\varepsilon_c^{\mathrm{el}}(n) \tag{5.8.3}$$

而在质心系中弹性散射的能量是有确定值的, 由速度合成关系得到为

$$\bar{\varepsilon}_c^{\rm el}(n)=\frac{1}{2}m_{\rm n}(v_{\rm n}-V_{\rm C})^2=\frac{M_{\rm T}^2}{M_{\rm C}^2}E_{\rm n} \tag{5.8.4}$$

可以看出, 在质心系中弹性散射的能量是入射中子能量乘上因子 $(M_{\rm T}/M_{\rm C})^2$. 因而靶核越轻, 这个因子就越小, 说明轻核的反冲效应比较明显. 将 (5.8.4) 式代入 (5.8.3) 式得到

$$\bar{\varepsilon}_l^{\rm el}(n)=\left[\frac{m_{\rm n}^2+M_{\rm T}^2}{M_{\rm C}^2}+\frac{2m_{\rm n}M_{\rm T}}{M_{\rm C}^2}\cos\theta^c\right] \tag{5.8.5}$$

由 (5.8.2) 式得到在实验室系中散射中子平均能量为

$$\bar{E}_l^{\rm el}(n)=\left[\frac{m_{\rm n}^2+M_{\rm T}^2}{M_{\rm C}^2}+\frac{2m_{\rm n}M_{\rm T}}{M_{\rm C}^2}f_1^{\rm el}(c)\right] \tag{5.8.6}$$

而弹性散射的反冲靶核在质心系中的速度就是质心运动速度. 因此, 弹性散射的反冲靶核在实验室系中的平均能量为

$$\bar{E}_l^{\rm el}(R)=\int\varepsilon_l^{\rm el}(R)\frac{{\rm d}\sigma_{\rm el}}{{\rm d}\Omega^l}{\rm d}\Omega^l=\int\varepsilon_l^{\rm el}(R)\frac{{\rm d}\sigma_{\rm el}}{{\rm d}\Omega^c}{\rm d}\Omega^c \tag{5.8.7}$$

其中

$$\bar{\varepsilon}_l^{\rm el}(R)=\frac{2m_{\rm n}M_{\rm T}}{M_{\rm C}^2}(1-\cos\theta^c)E_{\rm n} \tag{5.8.8}$$

由 (5.8.8) 式可见, 当弹性散射角为 0 度时, 没有靶核的反冲动能, 这种物理图形是显而易见的. 而中子散射在 180 度时, 对应了靶核的反冲动能为最大值的情况. 这也是很直观的物理图像. 将 (5.8.8) 式代入到 (5.8.7) 后, 对立体角积分后得到靶核的反冲动能为

$$\bar{E}_l^{\rm el}(R)=\frac{2m_{\rm n}M_{\rm T}}{M_{\rm C}^2}[1-f_1^{\rm el}(c)]E_{\rm n} \tag{5.8.9}$$

这就是弹性散射中反冲靶核携带的动能, (5.8.9) 式是计算弹性散射的 Kerma 系数的公式.

事实上, 将 (5.8.9) 和 (5.8.6) 式相加后得到

$$\bar{E}_l^{\rm el}(n+R)=E_{\rm n} \tag{5.8.10}$$

表示保持了能量守恒. 在对分布函数求平均后, 由 (5.8.9) 式给出弹性散射反冲靶核携带的动能仅与 $l=1$ 的 Legendre 展开系数有关, 这与本章上面得到各种粒子发射的运动学的结果的形式一致. 如果存在靶核的反冲动能准确的 Kerma 系数实验测量数据, 就可以检验光学模型调参结果的准确性. 实际上, 光学模型参数数值大小是与光学势的公式表示形式以及 Legendre 展开的分波数目有关. 在符合好弹

性散射截面和弹性散射角分布的实验测量数据的情况下, 光学模型参数的数值不是唯一的. 因此将 $l=1$ 的 Legendre 系数在符合 (5.8.9) 式给出的符合弹性散射反冲靶核携带的动能后, 再调出其他高阶分波的 Legendre 展开系数, 这是一个具有约束条件的光学模型调参的课题.

另外, 在通常的 Kerma 系数的研究中, 还包括了俘获辐射 (n,γ) 的剩余核反冲能量. (n,γ) 反应道的 Q 值就是中子在复合核中的结合能 B_n. 如果记出射 γ 的能量为 E_γ 时, 以发射 γ 到一个分立能级能量是 E_k 为例, 这时

$$\bar{E}_\gamma = E^* - E_k = \frac{M_\mathrm{T}}{M_\mathrm{C}} E_\mathrm{n} + B_\mathrm{n} - E_k \tag{5.8.11}$$

由于 γ 的能量与动量之间的关系是 $E_\gamma = p_\gamma c$, 由动量守恒, 可以得到剩余核反冲动量在质心系中为 $p_\mathrm{rec} = p_\gamma$. 由此得到俘获辐射的剩余核反冲能量在质心系中为

$$\bar{E}_\mathrm{rec}(c) = \frac{p_\gamma^2}{2M_\mathrm{C}} = \frac{E_\gamma^2}{2M_\mathrm{C}c^2} \tag{5.8.12}$$

由 (5.8.12) 式可以看出, 对于轻核, 复合核的质量比较轻, 同样的 E_γ 值产生的反冲能量会比较大. 由 (5.8.11) 式看出, 发射 γ 到基态的反冲效应最大, 而发射到激发能级时, 剩余激发能就是 E_k, 由 E_k 能级级联退激的 γ 也会产生反冲效应, 但是它们在各种方向的 γ 退激发射会对反冲效应相互抵消, 总的次级 γ 发射产生的反冲效应都会很小, 可以被忽略. 反冲核在质心系中的速度可以表示为

$$v_c = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{rec}(c)}{M_\mathrm{C}}} \tag{5.8.13}$$

当不考虑出射 γ 的角分布时, 认为 γ 发射是各向同性的. 由速度合成关系得到在实验室系中的平均反冲能量为

$$\overline{E_\mathrm{rec}(l)} = \frac{1}{2} M_\mathrm{C} \overline{(\boldsymbol{v}_c + \boldsymbol{V}_\mathrm{C})^2} = E_\gamma(c) + \frac{m_\mathrm{n}}{M_\mathrm{C}} E_\mathrm{n} = E_\mathrm{n} + B_\mathrm{n} - E_k \tag{5.8.14}$$

因此, 俘获辐射的总平均释放能量 $\overline{E_l^\mathrm{total}}$ 由三部分组成: γ 辐射能量、剩余核反冲能量以及剩余激发能. 由此得到

$$\overline{E_l^\mathrm{total}} = E_\mathrm{n} + B_\mathrm{n} = E_\mathrm{n} + Q \tag{5.8.15}$$

可见满足了能量平衡关系. 当然, 需要对各分立能级求和后才能得到总俘获辐射剩余核反冲能量在 Kerma 系数中的贡献.

由 (5.8.15) 式看出, 一般中子结合能是几个兆电子伏特, 因此 $\overline{E_l^\mathrm{total}}$ 在入射中子能量比较大时也是一个不小的量. 但是对于 Kerma 系数, 需要乘上 (n,γ) 反应截面. 一般来说, 在中子引发的 1p 壳轻核反应中, 俘获辐射截面是非常小的, 大约是在微靶的数量级, 以致可以忽略俘获辐射的剩余核反冲能量在 Kerma 系数中的贡

献. 但是对于中重核来说, 这种贡献就需要考虑了, 这是由于中重核的俘获辐射截面在低能中子入射时, 可以达到靶的量级.

用来衡量辐照吸收剂量的 Kerma 系数的量纲是截面乘能量. 它是每个原子产生的带电粒子截面 (单位是靶) 乘上平均能量 (能量单位是兆电子伏特). 因此理论模型计算的 Kerma 系数可以用每个原子的 $\mathrm{b \cdot MeV}$ 的单位给出.

但是, 在传统剂量学中 Kerma 系数用 SI 为单位. 辐照剂量用 $1\mathrm{Gy \cdot m^2}$ 为单位, 表示每平方米每千克物质吸收 1J 的热量, 在这种 SI 单位中, 1Gy 表示每千克物质中的原子吸收的热量, 单位是焦耳. 面积的单位是平方米, 而每千克物质是指每千克物质中的原子数, 这是与核物理中单原子的辐照吸收剂量非常不同之处. 而在核物理中, 面积用的是靶, 能量用的是兆电子伏特. 两种单位的转换关系由下面方式给出 (Chadwich et al., 1996; Axton et al., 1992), 例如对于 $^{12}\mathrm{C}$ 核而言, 原子量是 12, 得到

$$1\mathrm{b \cdot MeV} = 0.804044 \times 10^{-15}\mathrm{GY \cdot m^2} \tag{5.8.16}$$

这个因子的产生由来是:

用 Avogadro 常数可以得到每千克 $^{12}\mathrm{C}$ 包含 $6.0221367/12 \times 10^{26}$ 个碳原子;

而 $1\mathrm{MeV} = 1.60217733 \times 10^{-13}\mathrm{J}$;

$1\mathrm{b} = 10^{-28}\mathrm{m}$.

因此, 上面这三个数的乘积为

$$6.0221367/12 \times 10^{26} \times 1.60217733 \times 10^{-13} \times 10^{-28} = 0.804044 \times 10^{-15}$$

由于两种单位的转换中存在一个很小的 10^{-15} 因子, 因此在实际应用中往往用

$$1\mathrm{fGY \cdot m^2} = 1 \times 10^{-15}\mathrm{GY \cdot m^2} \tag{5.8.17}$$

的单位 (Chadwich et al., 1996; Axton et al., 1992). 因此, 对于 $^{12}\mathrm{C}$ 核而言

$$1\mathrm{b \cdot MeV} = 0.804044\mathrm{fGy \cdot m^2} \tag{5.8.18}$$

显而易见, 两种单位的转换是与原子量有关的. 而对于 $^{16}\mathrm{O}$ 仅将上面 (5.8.17) 的因子乘以 12/16 即可 (Chadwich et al., 1999), 对于 $^{16}\mathrm{O}$, 原子量为 16, 两种单位的转换关系常数是

$$1\mathrm{b \cdot MeV} = 0.603225\mathrm{fGy \cdot m^2} \tag{5.8.19}$$

对其他轻核就可按照上述过程给出两种单位的转换关系值.

目前已经有很多 $^{12}\mathrm{C}$ 的 Kerma 系数实验测量数据 (Slynen et al., 1995; Ronero et al., 1986; Antolhovic et al., 1984; Deluca et al., 1986; Haremann et al., 1992. 等), 也有对 $^{16}\mathrm{O}$ 和 $^{14}\mathrm{N}$ 的 Kerma 系数实验测量数据. 例如 Boeller 等 (1988) 及其他大量的实验测量数据. 应用轻核反应的理论模型也对 $^{12}\mathrm{C}$ 的 Kerma 系数进行了理论

计算 (Zhang et al., 1999). 需要注意的是, 在对低能中入射区域, 轻核反应的截面会出现类似于共振的明显结构, 这是轻核反应理论方法所无能为力的, 这种截面只能用 $\boldsymbol{R}$ 矩阵理论去拟合 (Lane et al., 1958, 1969; Garside et al., 1968; Puecell, 1969). 因此, 在用目前轻核反应理论来计算各种类型的粒子的 Kerma 系数时, 需要用反应截面的评价值, 而不能用理论计算值.

以前国际上对 Kerma 系数实验测量数据进行理论分析时, 往往仅用平衡态统计理论进行计算. 现在对轻核反应的研究表明, 仅用平衡态统计理论是不能很好描述这些轻核的反应行为, 必须要用以预平衡机制为主的核反应理论去描述. 因此, 可以将上述轻核反应理论模型应用到轻核反应的 Kerma 系数计算中. 由于 1p 壳轻核的 (n, γ) 截面很小, γ 发射的反冲核能量也比较小, 轻核俘获辐射剩余核的 Kerma 系数可以忽略不计. 在计算 ^{12}C, ^{14}N 和 ^{16}O 等核素的 Kerma 系数时, 包括了弹性散射的反冲核能量, 质量小于等于 4 的复杂粒子发射能量, 以及质量大于 4 的剩余反冲核的能量, 并分别给出各种类型发射粒子和剩余核的 Kerma 系数, 相加后得到总 Kerma 系数.

例如对 $n + {}^{12}C$ 核反应过程, 在一定的中子入射能量下, 已经计算过包括了质子, 氘核, 氚核, α 粒子, 以及各种剩余反冲核, 还有弹性散射和非弹性散射的反冲核的 Kerma 系数 (Chadwich et al., 1996). 当然还应包括 $n + {}^{12}C \rightarrow {}^{6}Li + {}^{7}Li$ 的发射过程. 但目前还缺少对 ^{3}He 和 ^{6}Li 的 Kerma 系数的实验测量数据. 计算结果表明, 它们都会有所贡献, 但在总 Kerma 系数中仅占很小比例. 对于 $n + {}^{12}C$ 而言, 弹性散射剩余核和 α 粒子的 Kerma 系数是在总 Kerma 系数中占主要成分 (Chadwich et al., 1996). 以 $n + {}^{12}C$ 核反应为例, 给出用轻核反应理论计算的总 Kerma 系数和各种 Kerma 系数, 其中包括弹性散射截面在内的各种反应截面都是用了评价值. 图 5.13 和图 5.14 分别给出总 Kerma 系数和弹性散射反冲核的 Kerma 系数.

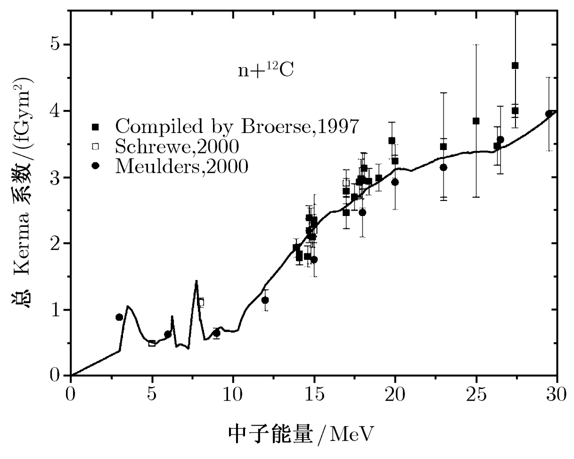


图 5.13 $n + {}^{12}C$ 反应总 Kerma 系数

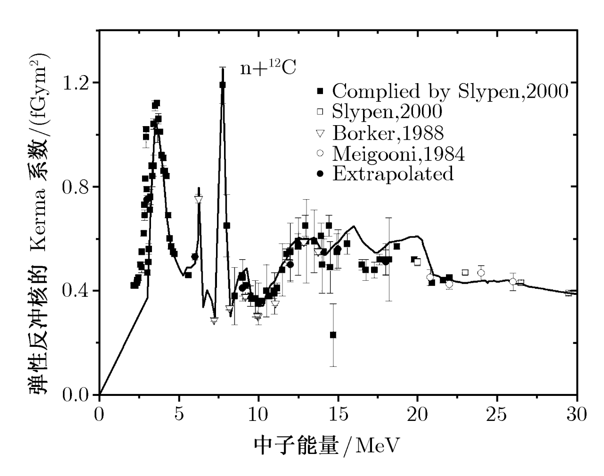


图 5.14　$n + {}^{12}C$ 弹性散射反冲核的 Kerma 系数

图 5.15 和图 5.16 分别给出 α 粒子和质子的 Kerma 系数, 以及氘氚的 Kerma 系数. 由图中给出的结果可以看出, 用轻核反应理论编写的 LUNF 程序 (Zhang et al., 1999) 对 $n + {}^{12}C$ 的计算结果可以符合好实验测量的 Kerma 系数. 这不仅说明各种类型粒子发射的运动学的准确性, 另外也说明对每种反应截面评价值的准确性.

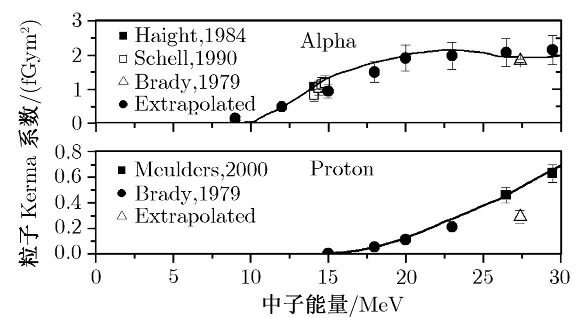


图 5.15　$n + {}^{12}C$ 反应中 α 粒子和质子的 Kerma 系数

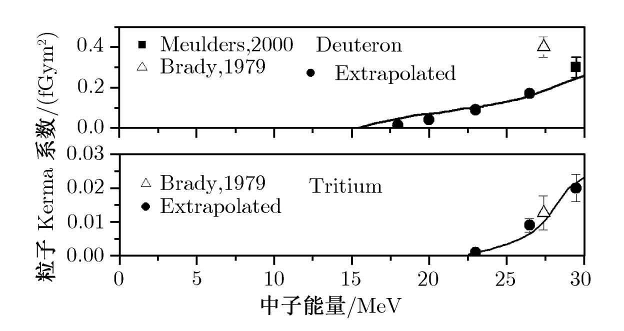


图 5.16　$n + {}^{12}C$ 反应中氘和氚的 Kerma 系数

参 考 文 献

丁大钊, 叶春堂, 赵志详, 等. 2005. 中子物理学——原理, 方法与应用. 北京: 原子能出版社.

王竹溪, 郭敦仁. 1965. 特殊函数论. 北京: 科学出版社.

曾谨言. 2001. 量子力学. 北京: 科学出版社.

Antolkovic B, et al. 1984. Radiat. Rev., 97: 253.

Axton E J, Nistir. 1992. Neutron Institute of Standards and Technology: 4838.

Boeker G, et al. 1988. Partial kerma factors for carbon and oxygen obtained from cross section measurements. Radiat. Prot. Dosim., 40: 23-26.

Chadwick M B, Cox L J. 1996. Calculation and evaluation of cross sections and kerma factors for Neutrons up to 100 MeV on Carbon. Nucl. Sci. Eng., 123: 17-37.

Chadwick, et al. 1999. A consistent set of neutron kerma coefficients from thermal to 150 MeV for biologically important materials. Med. Phys., 26(6): 977.

Deluca P M, et al. 1986. Carbon kerma factor for 18 and 20 MeV neutrons. Nucl. Sci. Eng., 94: 192.

Fuchs H. 1982. On cross section transformation in reaction with three outgoing fragments. Nucl. Instrum. Meth., 200: 361.

Garside L, Tobocman W. 1968. Extended R-matrix theory of nuclear reactions. Phys. Rev. C, 173: 1047.

Hartmann C L, et al. 1992. Radiat. Prot. Dosim., 44: 25.

Lane A M, Robson D. 1969. Optimization of nuclear resonance reaction calculations. Phys. Rev., 178: 1715.

Lane A M, Thomas R G. 1958. R-matrix theory of nuclear reactions. Rev. Mod. Phys., 30: 257.

Meijer R J, Kamermens R. 1985. Break phenomena in nuclear collision processes with He projectiles. Rev. Mod. Phys., 57: 147.

Meulders, et al. 2000. Experimental kerma coefficients of biologically important materials at neutron energies below 75 MeV. Med. Phys., 27(11): 2550.

Ohlson G G, et al. 1989. Cross sections and partial kerma factor for elastic and inelastic neutron scattering from carbon in the energy range 16.5∼22.0 MeV. Phys. Med. Biol., 34: 909.

Ohlson G G. 1965. Kinematical relation in reactions of the form A+B→C+D+E. Nucl. Instrum. Meth., 37: 240.

Puecell J E. 1969. Nuclear-structure calculation in the continuum-application to neutron-carbon scattering. Phys. Rev. C, 185: 1279.

Ronero J L, et al. 1985. In Proc. nuclear data for basic and applied science. Santa Fe, New Mexico, May, 13-17: 687.

Schrewe U J, et al. 1992. Radiat. Prot. Dosim.

Slypen I, et al. 1995. Phys. Med. Biol., 40: 73.

Stone R S. 1948. Neutron theory and specific ionization. AJR, 59: 771.

Zhang J S, Han Y L, Cao L G. 1999. Model calculation of n+^{12}C reactions from 4.8 to 20 MeV. Nucl. Sci. Eng., 133: 218-234.

Zhang J S. 2001a. USER manual of UNF code. Atomic Energy Press, CNDC-01616, CNDC-0032.

Zhang J S. 2001b. Model calculation of n+^{6}Li reactions below 20 MeV. Commun. Theor. Phys., 36: 437-442.

Zhang J S. 2002a. UNF code for fast neutron reaction data calculations. Nucl. Sci. Eng., 142: 207-219.

Zhang J S, Han Y L. 2002b. Calculation of double-differential cross sections of n+^{7}Li reactions below 20 MeV. Commun. Theor. Phys., 37: 465-474.

Zhang J S. 2003a. Theoretical analysis of neutron double-differential cross section of n+^{11}B at 14.2 MeV. Commun. Theor. Phys., 39: 83-88.

Zhang J S. 2003b. The energy balance of nuclear reaction and kerma factors. CNIC-01460, CNDC-0026.

Zhang J S. 2004. Possibility of ^{5}He emission in neutron induced reactions. Science in China G. Physics, 47: 137-145.

Zhang J S. 2005. User manual of FUNF code. CNDC-01782, CNDC-0037, Atomic Energy Press.

第 6 章　能谱展宽和坐标系转换以及数据的检验

6.1　引　　言

核反应的理论计算一般是在质心系中进行的, 而实验测量是在实验室系中进行的. 为了验证理论计算结果的正确性, 需要与实验测量数据进行比较, 以符合的好坏程度来衡量理论计算的正确性. 理论计算结果与实验数据符合的越好, 说明理论计算的可靠性越高. 在此基础上, 对没有实验测量数据的能区所做出的理论预言就有越大的可信度.

角分布和双微分截面在上述两种坐标系中取值不同, 但是彼此间存在确定的关系, 所以为了将理论计算值与实验数据做比较就必须进行坐标系转换. 为此, 需要给出角分布和双微分截面从质心系到实验室系的转换公式. 在轻核反应中, 为了用理论计算值与实验测量数据进行比较时, 对于能谱和双微分截面, 还需要考虑能谱展宽效应. 一方面是由于实验测量总会受到一定能量分辨率的限制, 对出射粒子谱有展宽效应. 另外, 在轻核反应中次级粒子都是从剩余核的分立能级上发射出来的, 而这些剩余核的分立能级大都是短寿命的, 由熟知的量子力学的知识, 对微观世界存在时间–能量不确定关系：

$$\Delta t \Delta E \approx \hbar \tag{6.1.1}$$

因此造成测量的粒子谱就具有一定的能量宽度. 需要强调的是, 时间–能量不确定关系仅是表明对微观数据测不准的关系, 这与能量守恒是毫不相关的. 为此, 将对上述两方面的问题分别进行讨论, 给出相应的理论公式.

6.2　能谱展宽效应

在轻核的能级纲图中有不少能级是不稳定的 (Firetone et al., 1996; Tilley et al., 2002), 能级宽度从千电子伏特量级到兆电子伏特量级. 在中子入射情况下, 从复合核发射一次粒子后剩余核都处于分立能级的状况. 由第 5 章的核反应运动学得知, 在质心系中第一出射粒子谱是单能谱, 而直接三体崩裂以及多次粒子发射后伴随的三体崩裂的过程中粒子发射谱是连续谱, 次级粒子的有序发射或伴随两体崩裂的过程中, 质心系中的粒子能谱都是有明显宽度的环形谱. 下面来讨论上述这些出射粒子谱在实验测量中的展宽效应.

对于单能粒子谱, 采用了高斯 (Gaussian) 形式的展宽 (Zhang, 1999). 若复合核一次发射粒子在质心系中的能量为 ε_1^c, 剩余核处在第 k_1 分立能级, 归一化的高斯形能谱展宽为

$$G(\varepsilon,k_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varGamma_1}\exp\left[-\frac{(\varepsilon-\varepsilon_1^c)^2}{2\varGamma_1^2}\right] \tag{6.2.1}$$

其中 $\varGamma_1$ 为一次粒子发射能谱展宽的宽度. 应注意到, 由 (6.2.1) 式给出的高斯分布谱是对能量从负无穷到正无穷积分才是归一化的, 而物理上却要求能量必须 $\varepsilon\geqslant 0$, 这种正能量要求就会使归一化有所偏离. 事实上

$$\int_0^{\infty}G(\varepsilon,k_1)\mathrm{d}\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varGamma_1}\int_0^{\infty}\exp\left[-\frac{(\varepsilon-\varepsilon_1^c)^2}{2\varGamma_1^2}\right]\mathrm{d}\varepsilon=\frac{1}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{\varepsilon_1^c}{\sqrt{2}\varGamma_1}\right)\right] \tag{6.2.2}$$

这里 $\mathrm{erf}(x)$ 是误差函数. 在能量满足 $0\leqslant\varepsilon_1^c\leqslant\infty$ 的条件下, 归一化的高斯分布应该改写为

$$G(\varepsilon,k_1)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\varGamma_1}\frac{\exp\left[-\dfrac{(\varepsilon-\varepsilon_1^c)^2}{2\varGamma_1^2}\right]}{1+\mathrm{erf}\left(\dfrac{\varepsilon_1^c}{\sqrt{2}\varGamma_1}\right)} \tag{6.2.3}$$

目前测量总出射中子的双微分谱, 实验大多采用了 “飞行时间法”(TOF), 关于快中子飞行时间法可以参见文献 (丁大钊等, 2005) 中的介绍. 若中子以飞行速度 v 达到探测器, 从靶核到探测器的直线距离记为 l, 在这段距离内飞行的时间为 t, 于是中子的能量可以表示为

$$\varepsilon=\frac{1}{2}m_{\mathrm{n}}v^2=\frac{1}{2}m_{\mathrm{n}}\left(\frac{l}{t}\right)^2 \tag{6.2.4}$$

在核物理实验测量中, 时间一般用纳秒为单位 ($1\mathrm{ns}=1\times10^{-9}\mathrm{s}$), 距离 l 的单位为米, 能量 ε 的单位为兆电子伏特, 于是飞行时间可以表示为

$$t=72.3l/\sqrt{\varepsilon} \tag{6.2.5}$$

在用快中子飞行时间谱仪测量中子能谱时, 能量的不确定性主要来自三个方面, 飞行距离的误差, 中子飞行时间的误差, 还有来自产生中子源的入射带电粒子能量的不确定性, 以及出射中子的不同张角造成到达探测器的距离不同等因素产生的误差. 对于中子飞行时间的误差导致的中子能量不确定性, 可以对 (6.2.4) 式两边求微分得到

$$\Delta\varepsilon=m_{\mathrm{n}}\left(\frac{l}{t}\right)^2\frac{\Delta t}{t}=\frac{2}{72.3}\varepsilon^{\frac{3}{2}}\frac{\Delta t}{l} \tag{6.2.6}$$

通常记飞行时间的分辨本领为

$$R=\frac{\Delta t}{l} \tag{6.2.7}$$

可见飞行距离越长飞行时间的分辨本领越高. 因此由飞行时间的不确定性导致的中子能量不确定性为

$$\Gamma_{\mathrm{T}} \equiv \Delta\varepsilon = \frac{2}{72.3}\varepsilon^{\frac{3}{2}}R \tag{6.2.8}$$

这说明中子能量越高, 其不确定性就越大. 应用 “飞行时间法” 测量中子能谱时, 在分辨率中能量的不确定性主要来自下面三个方面:

$$\frac{\Delta E}{E} = \sqrt{\left(\frac{2\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta t}{t}\right)^2 + \frac{\Delta E_i^2}{E^2}} \tag{6.2.9}$$

这表明能量的不确定性分别来自粒子飞行距离, 中子飞行时间, 以及产生中子源的带电粒子的能量不确定性. 由 (6.2.8) 式看到, 虽然低能出射中子的 Γ_{T} 比较小, 但是这些可以发射次级粒子的能级自身宽度比较大. 这样, 对于所有的出射中子都会有不同程度的能谱展宽, 只不过各自的成分有所不同而已.

另一方面, 来自中子源的带电粒子能量的不确定性和中子出射的张角等因素造成的中子能量不确定性记为 Γ_E 时, 其中也包含了实验测量的偶然误差, 这时的实验测量中子能量的不确定性为 (Chiba et al., 1998)

$$\Gamma_{\mathrm{exp}} = \sqrt{\Gamma_{\mathrm{T}}^2 + \Gamma_E^2} \tag{6.2.10}$$

如果一次粒发射剩余核的第 k_1 分立能级的能级宽度为 Γ_{k_1}, 那么一次粒子发射单能谱的总展宽就为

$$\Gamma = \sqrt{\Gamma_{k_1}^2 + \Gamma_{\mathrm{exp}}^2} \tag{6.2.11}$$

由第 5 章知道, 在多次粒子发射过程出射粒子是呈连续能谱形状. 以二次粒子发射为例, 在归一化的连续谱的高斯形展宽式表示中, 来自于一次发射粒子的展宽 $\Gamma_{k_1}^2$ 和二次粒子发射的展宽 $\Gamma_{k_2}^2$, 具体表示为

$$G(\varepsilon, k_1, k_2) = \frac{1}{2\pi\Gamma_{k_1}\Gamma_{k_2}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\varepsilon' \exp\left(-\frac{(\varepsilon-\varepsilon')^2}{2\Gamma_{k_2}^2} - \frac{(\varepsilon'-\varepsilon_2^c)^2}{2\Gamma_{k_1}^2}\right) \tag{6.2.12}$$

完成对 ε' 积分后得到归一化高斯形的连续谱展宽的表示变为

$$G(\varepsilon, k_1, k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma}\exp\left\{-\frac{(\varepsilon-\varepsilon_2^c)^2}{2\Gamma^2}\right\} \tag{6.2.13}$$

其中

$$\Gamma = \sqrt{\Gamma_{k_1}^2 + \Gamma_{k_2}^2 + \Gamma_{\mathrm{exp}}^2} \tag{6.2.14}$$

如果将未经展宽连续谱的能量记为 ε', 在物理上要求 $\varepsilon' \geqslant 0$, 经过高斯展宽后的归一化的连续谱的表示是

$$S_G(\varepsilon) = \int_{\varepsilon_{\min}^c}^{\varepsilon_{\max}^c} G(\varepsilon, \varepsilon') S(\varepsilon') \mathrm{d}\varepsilon' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\Gamma} \int_{\varepsilon_{\min}^c}^{\varepsilon_{\max}^c} \frac{\exp\left\{-\dfrac{(\varepsilon-\varepsilon')^2}{2\Gamma^2}\right\}}{1+\mathrm{erf}\left(\dfrac{\varepsilon'}{\sqrt{2}\Gamma}\right)} S(\varepsilon') \mathrm{d}\varepsilon' \quad (6.2.15)$$

在完成高斯展宽后的连续谱能量 ε 从 $0 \to \infty$ 的积分后可以得到

$$\int_0^{\infty} S_G(\varepsilon) \mathrm{d}\varepsilon = \int_{\varepsilon_{\min}^c}^{\varepsilon_{\max}^c} S(\varepsilon) \mathrm{d}\varepsilon = 1 \quad (6.2.16)$$

因此验证了归一化的连续出射粒子谱在 (6.2.15) 形式的高斯展宽后仍然是归一化的.

6.3 分立能级角分布的坐标系转换

第 5 章给出了轻核反应过程中, 由运动学给出的各种形态的出射粒子谱形状. 但是为了与实验测量的总中子出射双微分截面数据进行比较, 还需要将这些由理论计算的数据从质心系转换到实验室系. 本节讨论单能的分立能级角分布的坐标系转换问题.

如果出射粒子在质心系的能量为 ε_c, 而在实验室系的出射角为 θ_l 时, 对应的实验室系的能量 ε_l 和质心系的出射角 θ_c 可以按下面的方式得到. 先定义质心运动速度与出射粒子速度之比值为 γ, 将其变换为能量单位的表示后得到

$$\gamma \equiv \frac{V_c}{v_c} = \frac{\sqrt{m_\mathrm{n} m_1}}{M_\mathrm{C}} \sqrt{\frac{E_\mathrm{n}}{\varepsilon_c}} \quad (6.3.1)$$

这里 m_n, m_1 和 M_C 分别是入射中子、出射粒子和复合核的质量. 由速度合成关系可知, 当 $\gamma < 1$ 时, θ_l 可以在 0 到 π 之间变化 ($-1 \leqslant \cos\theta_l \leqslant 1$), 没有角度限制, 这对应了轻粒子入射的情况; 而如果 $\gamma \geqslant 1$ 时, θ_l 就会存在一极大值的限制:

$$\cos\theta_{l,\max} = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\gamma^2 - 1} \quad (6.3.2)$$

这表示在实验室系中存在一个最大出射角 $\theta_{l,\max}$, 因而在实验室系中没有大于 $\theta_l > \theta_{l,\max}$ 角度的粒子出射, 它通常对应于入射粒子质量大于靶核质量的情况, 或者发生近阈反应的情况, 当 ε_c 很小时的情况. 对于中子入射情况下, 由 (6.3.1) 式可以给出 $\gamma = 1$ 临界状态下出射粒子的能量值需要满足

$$\varepsilon_{c,\min} = \frac{m_\mathrm{n} m_1}{M_\mathrm{C}^2} E_\mathrm{n} \quad (6.3.3)$$

因此, 只有在 $\varepsilon_c \leqslant \varepsilon_{c,\min}$ 时才会有 $\gamma \geqslant 1$ 的情况发生.

下面讨论 $\gamma \geqslant 1$ 的物理意义. 由图 6.1 可以看出, 如果质心系中粒子的出射速度小于等于质心运动速度时, 即 $v_c \leqslant V_{\rm C}$ 时, 虽然在质心系中粒子仍然可以在 4π 空间内发射, 但是在实验室系中粒子的发射角却不能大于 $\theta_{l,\max}$. 而且, 除了 $\theta_l = \theta_{l,\max}$ 之外, 对于每个出射角 θ_l 都对应于质心系中的两个出射角 (向前的 θ_c 和向后的 θ_c'). 在质心系中与 $\theta_{l,\max}$ 相对应的角度为 $\theta_{c,m}$, 当质心系中的角度由 $0 \to \theta_{c,m}$ 增大时, 在实验室系中对应的角度也增大, 而质心系中的角度由 $\theta_{c,m} \to \pi$ 增大时, 实验室系中对应的角度反而会由 $\theta_{l,m}$ 逐步减小到 0.

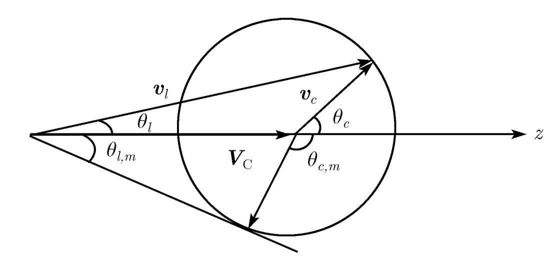


图 6.1 在 $\gamma > 1$ 时, 粒子 m_1 在实验室系中出射角的限制

下面由实际的例子给出一些数值概念. 当入射中子能量为 $E_{\rm n} = 14{\rm MeV}$ 时, 在 ${\rm n} + {}^9{\rm Be}$ 反应中, 对于出射中子的情况, 在 $\gamma \geqslant 1$ 发生时对应的出中子射能量大约为 $\varepsilon_{\rm n} \leqslant 0.14{\rm MeV}$, 而对于出射 α 粒子的情况, 在 $\gamma > 1$ 发生时对应的出射能量大约为 $\varepsilon_{\rm n} \leqslant 0.56{\rm MeV}$. 而第一出射粒子发射到剩余核能量为 E_{k_1} 的能级时, 出射粒子能量由 (5.2.1) 给出, 由 (6.3.3) 式得到, 当分立能级能量满足

$$E_{k_1} \geqslant \frac{M_{\rm T} M_1 - m_{\rm n} m_1}{M_1 M_{\rm C}} E_{\rm n} + B_{\rm n} - B_1 \tag{6.3.4}$$

时, 就会出现 $\gamma \geqslant 1$ 的情况. 以 ${\rm n} + {}^9{\rm Be}$ 核反应为例, 在 $E_{\rm n} = 14{\rm MeV}$ 时, 出射中子到剩余核 ${}^9{\rm Be}$ 的分立能级能量 $E_{k_1} > 12.44{\rm MeV}$ 时才会有 $\gamma \geqslant 1$ 的情况出现. 对于出射 α 粒子的情况, 中子和 α 粒子在 ${}^{10}{\rm Be}$ 中的结合能分别是 $B_{\rm n} = 6.811{\rm MeV}$, $B_\alpha = 7.409{\rm MeV}$, 只有达到 ${}^6{\rm He}$ 的分立能级能量为 $E_{k_1} > 11.07{\rm MeV}$ 时, 即达到 ${}^6{\rm He}$ 的第 3 激发能级时, $\gamma \geqslant 1$ 的情况才会出现, 出射 α 粒子的角分布才会出现角度限制.

下面讨论在质心系中能量为确定值的分立能级角分布的坐标系转换公式. 以粒子入射方向为 z 轴, 速度在 z 轴和 x 轴的投影关系分别

$$\begin{cases} v_l \cos\theta_l = V_{\rm C} + v_c \cos\theta_c \\ v_l \sin\theta_l = v_c \sin\theta_c \end{cases} \tag{6.3.5}$$

两式相除得到

$$\tan\theta_l = \frac{v_c \sin\theta_c}{V_C + v_c \cos\theta_c} = \frac{\sin\theta_c}{\gamma + \cos\theta_c} \tag{6.3.6}$$

利用三角学的知识：

$$\cos\theta_l = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta_l}} = \frac{\gamma + \cos\theta_c}{\sqrt{1+2\gamma\cos\theta_c+\gamma^2}} \tag{6.3.7}$$

将 (6.3.7) 式两边平方, 并整理为 $\cos\theta_c$ 的一元二次方程：

$$\cos^2\theta_c + 2\gamma(1-\cos^2\theta_l)\cos\theta_c - \cos^2\theta_l + \gamma^2(1-\cos^2\theta_l) = 0 \tag{6.3.8}$$

求解该一元二次方程, 得到 $\cos\theta_c$ 与 $\cos\theta_l$ 的关系式：

$$\cos\theta_c = \pm\cos\theta_l\sqrt{1-\gamma^2(1-\cos^2\theta_l)} - \gamma(1-\cos^2\theta_l) \tag{6.3.9}$$

当 $\gamma < 1$ 时, 在 (6.3.9) 式中仅取正号. 在实验室系中角度区域为 4π 方位角, 即 $0 \leqslant \theta_l \leqslant \pi$. 当 $\cos\theta_l = 1$ 时, 由 (6.3.9) 式得到 $\cos\theta_c = 1$, 而 $\cos\theta_l = -1$ 时, 得到 $\cos\theta_c = -1$, 显然在物理上是合理的. 而在 $\gamma \geqslant 1$ 时, 在实验室系中存在 $\cos\theta_{l,\max} \leqslant \cos\theta_l \leqslant 1$ 的角度限制. 这时, 对于每个满足上面不等式的 $\cos\theta_l$ 值, 由图 6.1 看出, 在质心系中都存在对应的两个角度, 即在 (6.3.9) 式中取正负号. 例如, 当 $\cos\theta_l = 1$ 时, 由 (6.3.9) 式得到 $\cos\theta_c = \pm 1$. 而 $\cos\theta_l = \cos\theta_{l,\max}$ 时, 由 (6.3.2) 式可以得到 $1-\cos\theta_{l,\max}^2 = 1/\gamma^2$, 因而得到在质心系中对应的角度为

$$\cos\theta_{c,m} = -\frac{1}{\gamma} = -\frac{\sqrt{\varepsilon_c}}{\beta} = -\frac{v_c}{V_C} = -\sin\theta_{l,\max} \tag{6.3.10}$$

由图 6.1 所示, 总有 $\theta_{l,\max} < \pi/2$ 存在, 因为这时总有 $\theta_{c,m} = \pi/2 + \theta_{l,\max} > 90°$. 显然在物理上是合理的.

如果在质心系中的中子双微分截面的能量区域为 $0 \leqslant \varepsilon_c \leqslant \varepsilon_{c,\max}$, 当给定实验室系的角度 θ_l 时, 有时需要求出在实验室系的能量 ε_l 取值范围. 这需要分两种情况考虑.

(1) 当 $\varepsilon_{c,\max} > \beta^2$ 时 (相当于 $\gamma < 1$)：这是非常普遍的情况, 实验室系和质心系中的角度都是 4π 方位的, 两者之间的关系为

$$\cos\theta_{c,m} = \cos\theta_l\sqrt{1-\frac{\beta^2}{\varepsilon_{c,\max}}(1-\cos^2\theta_l)} - \frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon_{c,\max}}}(1-\cos^2\theta_l) \tag{6.3.11}$$

得到在给定实验室系的角度 θ_l 时, 实验室系的能量 ε_l 取值范围是

$$0 \leqslant \varepsilon_l \leqslant \varepsilon_{c,\max} + 2\sqrt{\varepsilon_{c,\max}}\beta\cos\theta_{c,m} + \beta^2 \tag{6.3.12}$$

(2) 当 $\varepsilon_{c,\max} \leqslant \beta^2$ 时 (相当于 $\gamma \geqslant 1$)：这是质心系中出射能量非常低的情况.

这时物理上对实验室系的角度有限制, 即 $\cos\theta_{l,\max}\leqslant\cos\theta_l\leqslant 1$, 其中

$$\cos\theta_{l,\max}=\frac{1}{\gamma}\sqrt{\gamma^2-1}=\frac{1}{\beta}\sqrt{\beta^2-\varepsilon_{c,\max}} \tag{6.3.13}$$

在给定满足实验室系的角度限制区域内的 θ_l 时, 实验室系的能量 ε_l 取值范围是

$$\varepsilon_{c,\max}+2\sqrt{\varepsilon_{c,\max}}\beta\cos\theta_{c,m}^{(-)}+\beta^2\leqslant\varepsilon_l\leqslant\varepsilon_{c,\max}+2\sqrt{\varepsilon_{c,\max}}\beta\cos\theta_{c,m}^{(+)}+\beta^2 \tag{6.3.14}$$

对于一个给定的 θ_l 角度, (6.3.9) 式用 β 表示时的形式为

$$\cos\theta_{c,m}^{(\pm)}=\pm\cos\theta_l\sqrt{1-\frac{\beta^2}{\varepsilon_{c,\max}}(1-\cos^2\theta_l)}-\frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon_{c,\max}}}(1-\cos^2\theta_l) \tag{6.3.15}$$

特殊情况 1：当 $\varepsilon_{c,\max}=\beta^2$ 时, $\cos\theta_{l,\max}=\dfrac{1}{\beta}\sqrt{\beta^2-\varepsilon_{c,\max}}=0$, 即 $\theta_{l,\max}=\dfrac{\pi}{2}$,

特殊情况 2：当 $\varepsilon_{c,\max}=\beta^2\sin^2\theta_l=\beta^2(1-\cos^2\theta_l)$ 时, 在 $\cos\theta_{c,m}^{(\pm)}$ 中第一项为 0, 这时 $\varepsilon_l=\beta^2-\varepsilon_{c,\max}$, 能量取值范围仅收缩为一点.

当然, 在 $\theta_l>\theta_{l,\max}$ 时, 即 $\cos\theta_l<\cos\theta_{l,\max}$ 时, 由于 θ_l 超出限制角度, 因而物理上没有任何能量 ε_l 的取值范围.

由前面 (5.1.2) 式得到了

$$\varepsilon_l=\varepsilon_c(1+2\gamma\cos\theta_c+\gamma^2) \tag{6.3.16}$$

对 (6.3.7) 式两边微分得到

$$-\sin\theta_l\mathrm{d}\theta_l=-\frac{1+\gamma\cos\theta_c}{(1+2\gamma\cos\theta_c+\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta_c\mathrm{d}\theta_c \tag{6.3.17}$$

由此得到质心系和实验室系之间的立体角的关系：

$$\mathrm{d}\varOmega_l=\sin\theta_l\mathrm{d}\theta_l\mathrm{d}\varphi_l=\mathrm{d}\cos\theta_l\mathrm{d}\varphi_l=\frac{|1+\gamma\cos\theta_c|}{(1+2\gamma\cos\theta_c+\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varOmega_c \tag{6.3.18}$$

如果已知在质心系中的角分布 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\varOmega_c$, 则在实验室系中的角分布可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varOmega_l}=\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varOmega_c}\frac{\mathrm{d}\varOmega_c}{\mathrm{d}\varOmega_l}=\frac{(1+2\gamma\cos\theta_c+\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}{|1+\gamma\cos\theta_c|}\frac{\sigma}{4\pi}\sum_L(2L+1)F_L(\varepsilon_c)P_L(\cos\theta_c) \tag{6.3.19}$$

由于发射一次粒子后剩余核处于分立能级, 因而出射粒子在质心系中具有确定的能量 ε_c. 在给定实验室系的发射角度 θ_l 后, 就可以由 (6.3.16) 式计算出实验室系中对应的能量 ε_l, 以及质心系中对应的角度 θ_c. 如果已经从理论上给出了反应截面 σ 和质心系中的 Legendre 展开系数 $F_L(\varepsilon_c)$, 就可以用 (6.3.19) 式计算出实验室系中的角分布 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\varOmega_l$.

因此, 在分立能级角分布应用 Legendre 展开系数的情况下, 求解在实验室系的角分布数值时, 首先需要判断 γ 是否是大于 1, 如果 $\gamma \geqslant 1$ 出现, 则在实验室系中的角度取值就需要用 (6.3.2) 式来确定角度范围, 只有在 $\theta_l < \theta_{l,\max}$ 时, 才可以用 Legendre 系数得到角分布值, 而在 $\theta_l \geqslant \theta_{l,\max}$ 的角度区域角分布值取 0. 当然, 当 $\gamma < 1$ 时, 在实验室系中的角度取值可以从 0 到 π 取任何值.

对于自由核子散射的情况, 由于这时质心运动速度恰好是入射粒子速度的一半, 因而质心系与实验室系具有如下关系:

$$\varepsilon_c = \frac{1}{4}E_{\rm n} \tag{6.3.20}$$

由 (6.3.1) 式得到 $\gamma = 1$, 这是出现有角度限制的临界情况, 由 (6.3.2) 式给出

$$\cos\theta_c = \cos 2\theta_l \quad 或 \quad \theta_c = 2\theta_l \tag{6.3.21}$$

自由核子散射在质心系中的散射角总是实验室系的一倍. 因此, 在实验室系的角分布与在质心系的角分布有如下关系:

$$\frac{{\rm d}\sigma}{{\rm d}\cos\theta_l} = \frac{{\rm d}\sigma}{{\rm d}\cos\theta_c}\frac{{\rm d}\cos\theta_c}{{\rm d}\cos\theta_l} = 4\cos\theta_l\frac{{\rm d}\sigma}{{\rm d}\cos\theta_c}, \quad \theta_l \leqslant 90^\circ \tag{6.3.22}$$

由 (6.3.16) 式得到在实验室系中自由核子散射后能量与散射角之间的关系:

$$\varepsilon_l = \frac{E_{\rm n}}{2}(1+\cos\theta_c) = E_{\rm n}\cos^2\theta_l \tag{6.3.23}$$

在 γ 明显小于 1 的情况下, 可以直接得到在实验室系中角分布的 Legendre 展开形式. 这时, 在实验室系中也用 Legendre 展开系数的表示:

$$\frac{{\rm d}\sigma}{{\rm d}\Omega_l} = \frac{\sigma}{4\pi}\sum_L(2L+1)F_L(\varepsilon_l)P_L(\cos\theta_l) \tag{6.3.24}$$

代入 (6.3.13) 式并与 (6.3.18) 式比较得到

$$\sum_L(2L+1)F_L(\varepsilon_l)P_L(\cos\theta_l) = \frac{(1+2\gamma\cos\theta_c+\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}{|1+\gamma\cos\theta_c|}\sum_L(2L+1)F_L(\varepsilon_c)P_L(\cos\theta_c) \tag{6.3.25}$$

在 (6.3.25) 式两边乘上 Legendre 多项式 $P_L(\cos\theta_l)$, 并对 $\cos\theta_l$ 积分, 在该方程左边利用 Legendre 多项式的正交性, 而在右边利用 (6.3.16) 式, 将对 $\cos\theta_l$ 的积分变为对 $\cos\theta_c$ 的积分, 由此得到在实验室系的 Legendre 系数为

$$F_L(\varepsilon_l) = \sum_{L'}\frac{(2L'+1)}{2}f_{L'}(\varepsilon_c)\int_{-1}^{1}P_{L'}(\cos\theta_c)P_L(\cos\theta_l){\rm d}\cos\theta_c \tag{6.3.26}$$

为完成对 (6.3.26) 式的积分, 将 (6.3.8) 式进行泰勒展开到 γ 三次方的精度下, 这时有

$$\frac{1}{\sqrt{1+z}} \approx 1 - \frac{1}{2}z + \frac{3}{8}z^2 - \frac{5}{16}z^3 \tag{6.3.27}$$

其中记 $z=2\gamma x+\gamma^2$, $x=\cos\theta_c$, 得到

$$\cos\theta_l = x+\varDelta \tag{6.3.28}$$

其中

$$\varDelta=\gamma(1-x^2)\left[1-\frac{3}{2}\gamma x-\frac{1}{2}\gamma^2(1-5x^2)\right] \tag{6.3.29}$$

利用泰勒展开的一般表示公式：

$$P_L(x+\varDelta)=\sum_n \frac{1}{n!}P_L^{(n)}(x)\varDelta^n \tag{6.3.30}$$

其中 $P_L^{(n)}(x)$ 是 Legendre 多项式在 x 点的 n 阶导数. 在 γ 三次方的精度下有

$$P_L(\cos\theta_l)=P_L(x)+P_L^{(1)}(x)\varDelta+\frac{1}{2}P_L^{(2)}(x)\varDelta^2+\frac{1}{6}P_L^{(3)}(x)\varDelta^3 \tag{6.3.31}$$

将 $\varDelta$ 的表示代入, 在保留到 γ 的三次方项的情况下得到

$$\begin{aligned}P_L(\cos\theta_l)=&P_L(x)+\gamma(1-x^2)P_L^{(1)}(x)-\frac{1}{2}\gamma^2[3x(1-x^2)P_L^{(1)}(x)-(1-x^2)^2P_L^{(2)}(x)]\\&-\frac{\gamma^3}{6}[3(1-5x^2)(1-x^2)P_L^{(1)}(x)\\&+9x(1-x^2)^2P_L^{(2)}(x)-(1-x^2)^3P_L^{(3)}(x)]\end{aligned} \tag{6.3.32}$$

利用 Legendre 多项式的递推性质 (王竹溪等, 1965)：

$$xP_L(x)=\frac{1}{2L+1}\left[LP_{L-1}(x)+(L+1)P_{L+1}(x)\right] \tag{6.3.33}$$

$$(1-x^2)P_L^{(1)}(x)=-\frac{L(L+1)}{2L+1}\left[P_{L+1}(x)-P_{L-1}(x)\right] \tag{6.3.34}$$

将 Legendre 函数的微分方程乘以 $(1-x^2)$, 再利用 (6.3.28) 式得到

$$(1-x^2)^2P_L^{(2)}(x)=-2\frac{L(L+1)}{2L+1}\left[xP_{L+1}(x)-xP_{L-1}(x)\right]-L(L+1)(1-x^2)P_L(x) \tag{6.3.35}$$

继续 (6.3.35) 式对 x 求导数就可以得到 $(1-x^2)^3P_L^{(2)}(x)$ 的约化关系式. 利用这些递推性质可以约化 (6.3.32) 式中的每个项, 将约化结果代入后, 利用 Legendre 多项式的正交性, 完成 (6.3.26) 式中对 $\cos\theta_c$ 积分, 最终得到 (丁大钊等, 2005)

$$\begin{aligned}F_L(\varepsilon_l)=&F_L(\varepsilon_c)-\gamma\frac{L(L+1)}{2L+1}(F_{L+1}(\varepsilon_c)-F_{L-1}(\varepsilon_c))\\&+\gamma^2\frac{L(L+1)}{2}\left[\frac{(L+2)^2}{(2L+1)(2L+3)}F_{L+2}(\varepsilon_c)-\frac{(2L^2+2L-1)}{(2L-1)(2L+5)}F_L(\varepsilon_c)\right.\end{aligned}$$

$$
+\frac{(L-1)^2}{(2L-1)(2L+1)}F_{L-2}(\varepsilon_c)\Bigg]-\gamma^3\frac{L(L+1)}{6(2L+1)}\Bigg[\frac{(L+2)^2(L+3)(L+4)}{(2L+3)(2L+5)}
$$

$$
\times F_{L+3}(\varepsilon_c)-\frac{3(L+1)(L+2)(L^2+2L-1)}{(2L-1)(2L+5)}F_{L+1}(\varepsilon_c)
$$

$$
+\frac{3(L^2-2)L(L-1)}{(2L-3)(2L+3)}F_{L-1}(\varepsilon_c)-\frac{(L-3)(L-2)(L-1)^2}{(2L-3)(2L-1)}F_{L-3}(\varepsilon_c)\Bigg] \quad (6.3.36)
$$

在 (6.3.36) 式的下标中, 似乎是可能存在负阶的 Legendre 展开系数. 但是经过细致分析发现, 凡是可能出现负阶 Legendre 展开系数的地方, 其系数全是 0. 例如, 在 γ^3 项中, 当 $L=0$ 时, $F_{L-1}(\varepsilon_c)$ 的系数为 0, 而当 $L=0,1,2$ 时, $F_{L-3}(\varepsilon_c)$ 的系数为 0. 因此实际上是不会出现负阶的 Legendre 多项式的情况.

对于弹性散射而言, 将 (5.8.4) 式给出的在质心系中的散射能量代入 (6.3.1) 式后得到

$$
\gamma = m_{\mathrm{n}}/M_{\mathrm{T}} \quad (6.3.37)
$$

由此可见, 即或对于像 ^{6}Li 这样的轻核, $\gamma\approx 1/6$, 且有 $\gamma^3\approx 1/216$, 而被忽略的项为 $\gamma^4\approx 1/1296\approx 0.00077$, 因此上述公式可以保证有较高的精度. 当然, 对 1p 壳中其他更重的核素, 像 ^{16}O 核, $\gamma^4\approx 1/65536\approx 0.000015$, 精度会更高. 在这种精度下, 可以用 (6.3.36) 式制作出弹性散射从质心系到实验室系两个坐标系的转换矩阵.

6.4 双微分截面的坐标系转换

在核数据库的双微分截面文档中, 采用的是在质心系中给出发射粒子 b 的归一化能谱和相应的 Legendre 展开系数, 是用置方图 (Histogram) 方式表示的 (Mclane et al., 1990). 若在质心系中出射粒子的能量区域为 $\varepsilon_{c,\min}\to\varepsilon_{c,\max}$ 时, 在计算实验室系中给定角度 θ_l 的能谱时, 需要进行坐标系转换. 下面以中子入射、b 粒子出射为例, 给出双微分截面的坐标系转换公式的表示.

在实验室系中, 归一化的双微分截面的标准表示为

$$
\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_l\mathrm{d}\Omega_l}=\frac{1}{4\pi}\sum_L(2L+1)F_L(\varepsilon_l)P_l(\cos\theta_l) \quad (6.4.1)
$$

对于双微分截面在坐标系转换, 更方便的是定义与出射粒子能量无关的参数 β:

$$
\beta\equiv\frac{\sqrt{m_{\mathrm{n}}m_bE_{\mathrm{n}}}}{M_{\mathrm{C}}}=\frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon_c}} \quad (6.4.2)
$$

图 5.1 已经给出了出射粒子在质心系中和实验室系中的速度之间的关系. 对于在实验室系中给定的 m_b 粒子的能量 ε_l 和角度 θ_l, 由此可以给出质心系中对应的能量

ε_c 为

$$\varepsilon_c = \varepsilon_l - 2\beta\sqrt{\varepsilon_l}\cos\theta_l + \beta^2 \tag{6.4.3}$$

同样, 由速度在入射方向的的投影关系 $v_c\cos\theta_c = v_l\cos\theta_l - V_{\mathrm{C}}$, 可以得到质心系中和实验室系中角度的对应关系式:

$$\cos\theta_c = \frac{\sqrt{\varepsilon_l}\cos\theta_l - \beta}{\sqrt{\varepsilon_c}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_l}\cos\theta_l - \beta}{\sqrt{\varepsilon_l - 2\beta\sqrt{\varepsilon_l}\cos\theta_l + \beta^2}} \tag{6.4.4}$$

可以验证, 当 $\theta_l = 0°$ 时, $\varepsilon_c = (\sqrt{\varepsilon_l} - \beta)^2$, 因而 $\cos\theta_c = 1$, 即 $\theta_c = 0°$, 而当 $\theta_l = 180°$ 时, $\varepsilon_c = (\sqrt{\varepsilon_l} + \beta)^2$, 因而 $\cos\theta_c = -1$, 即 $\theta_c = 180°$. 这是合理的物理图形.

由 (6.3.10) 式给出用 β 表示的两个运动体系的能量关系公式是

$$\varepsilon_l = \varepsilon_c + 2\beta\sqrt{\varepsilon_c}\cos\theta_c + \beta^2 \tag{6.4.5}$$

以实验室系的能量 ε_l 为自变量的双微分截面谱是按下式表示给出:

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_l\mathrm{d}\Omega_l} = \frac{\sigma}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_c}}\sum_L(2L+1)F_L(\varepsilon_c)P_L(\cos\theta_c) \tag{6.4.6}$$

其中, σ 是发射 b 粒子的截面, $F_l(\varepsilon_c)$ 是质心系中的 Legendre 展开系数, $P_l(x)$ 是 Legendre 多项式. 需要注意的是 (6.4.6) 式中的因子 $\sqrt{\varepsilon_l/\varepsilon_c}$ 是质心系到实验室系坐标变换的雅科比行列式值. 实际具体计算的过程是, 对于给定的实验室系的发射角 θ_l 和能量 ε_l, 由公式 (6.4.3) 和 (6.4.4) 得到质心系中相应的角度 θ_c 和能量 ε_c, 再由公式 (6.4.6) 式即可计算出实验室系中的双微分截面值.

另外, 还要介绍另一种连续谱 Legendre 系数坐标系转换的积分法. 当 (6.4.6) 式在归一化形式表示下, 该式两边乘上 $P_L(\cos\theta_l)$, 对立体角积分后得到

$$F_L(\varepsilon_l) = \frac{1}{2}\sum_{L'}(2L'+1)\int_{-1}^{1}F_{L'}(\varepsilon_c)\sqrt{\frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_c}}P_{L'}(\cos\theta_c)P_L(\cos\theta_l)\mathrm{d}\cos\theta_l \tag{6.4.7}$$

在一般情况下, 若在质心系中的粒子出射能量范围是 $\varepsilon_{c,\min} \leqslant \varepsilon_c \leqslant \varepsilon_{c,\max}$, 由图 5.1 给出的出射粒子在质心系中和实验室系中的速度之间的关系, 由此可以得到在实验室系中出射粒子的能量最大的值为

$$\varepsilon_{l,\max} = (\sqrt{\varepsilon_{c,\max}} + \beta)^2 \tag{6.4.8}$$

以及在实验室系中最小的出射能量值为

$$\varepsilon_{l,\min} = \begin{cases} (\sqrt{\varepsilon_{c,\min}} - \beta)^2, & \text{当 } \beta < \sqrt{\varepsilon_{c,\min}}\text{时} \\ 0, & \text{当 } \sqrt{\varepsilon_{c,\min}} \leqslant \beta < \sqrt{\varepsilon_{c,\max}}\text{时} \\ (\beta - \sqrt{\varepsilon_{c,\max}})^2, & \text{当 } \beta \geqslant \sqrt{\varepsilon_{c,\max}}\text{时} \end{cases} \tag{6.4.9}$$

利用 (6.4.3) 式, 可以将对 $\cos\theta_l$ 的积分变为对 ε_c 的积分

$$\mathrm{d}\cos\theta_l = -\frac{\mathrm{d}\varepsilon_c}{2\beta\sqrt{\varepsilon_l}} \tag{6.4.10}$$

这时 (6.4.7) 式变为

$$F_L(\varepsilon_l) = \frac{1}{4\beta}\sum_{L'}(2L'+1)\int_a^b \frac{F_{L'}(\varepsilon_c)}{\sqrt{\varepsilon_c}} P_{L'}\left(\frac{\varepsilon_l-\beta^2-\varepsilon_c}{2\beta\sqrt{\varepsilon_c}}\right) P_L\left(\frac{\varepsilon_l+\beta^2-\varepsilon_c}{2\beta\sqrt{\varepsilon_l}}\right)\mathrm{d}\varepsilon_c \tag{6.4.11}$$

在给定 ε_l 值的情况下, 由速度合成关系可以得到 (6.4.11) 式中的积分上下限分别为

$$b = \min\left\{\varepsilon_{c,\max}, (\sqrt{\varepsilon_l}+\beta)^2\right\}, \quad a = \max\left\{\varepsilon_{c,\min}, (\sqrt{\varepsilon_l}-\beta)^2\right\} \tag{6.4.12}$$

(6.4.11) 式就是连续谱 Legendre 系数坐标系转换的积分法给出的变换公式, 只能用数值积分方法来计算. 为了验证 (6.4.11) 式的合理性, 在质心系中采用归一化的各项同性的 Maxwell 分布：

$$F_0(\varepsilon_c) = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\varepsilon_c}{KT}\right\}\sqrt{\varepsilon_c} \tag{6.4.13}$$

将 (6.4.11) 式中对 ε_c 的积分改为对 $\cos\theta_c$ 的积分, 这时 (6.4.11) 式变成

$$F_L(\varepsilon_l) = \frac{\sqrt{\varepsilon_l}}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\varepsilon_l+\beta^2}{KT}\right\}\int_{-1}^{1}\exp\{a\cos\theta_l\}P_L(\cos\theta_l)\mathrm{d}\cos\theta_l \tag{6.4.14}$$

利用指数函数的 Legendre 展开式 (Abramowitz et al., 1970)：

$$\exp\{a\cos\theta\} = \sum_l (2l+1)\sqrt{\frac{\pi}{2a}}I_{l+\frac{1}{2}}(a)P_l(\cos\theta) \tag{6.4.15}$$

其中 $I_{l+\frac{1}{2}}(a)$ 是正规半整阶虚综量贝塞尔函数 (Abramowitz et al., 1970). 这时 $a = 2\beta\sqrt{\varepsilon_l}/KT$. 对 (6.4.14) 进行角度积分, 由 Legendre 多项式的正交性, 得到的 Legendre 展开系数为

$$F_L(\varepsilon_l) = \frac{\sqrt{2\varepsilon_l}}{\sqrt{a}(KT)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\varepsilon_l+\beta^2}{KT}\right\}I_{L+\frac{1}{2}}(a) \tag{6.4.16}$$

特别是对能谱 $(L=0)$ 而言,

$$I_{\frac{1}{2}}(a) = \sqrt{\frac{2a}{\pi}}\frac{\sinh a}{a} \tag{6.4.17}$$

由此得到的是 Watt 谱的能谱表示：

$$F_0(\varepsilon_l) = \frac{\mathrm{e}^{-\beta^2/KT}}{\sqrt{\pi}\beta\sqrt{KT}}\exp\left\{-\frac{\varepsilon_l}{KT}\right\}\sinh\left(\frac{2\beta\sqrt{\varepsilon_l}}{KT}\right) \tag{6.4.18}$$

6.5 总出射中子双微分截面的计算示例

在统一的 Hauser-Feshbach 和激子模型理论框架的基础上, 建立了可以描述轻核反应特性的轻核反应理论. 另外, 由第 5 章给出的严格的运动学公式, 可以得到各类核反应过程中出射粒子的双微分截面. 考虑了能级宽度和实验测量中的能谱展宽效应, 再将计算结果从质心系转换到实验室系, 就可以与实验测量的总出射中子双微分截面直接进行比较, 由此来检验理论模型的准确性. 正如由第 1 章介绍的对各轻核开放的反应道分析的那样, 轻核反应的个性极强, 不同轻核开放的反应道彼此有很大差异. 为此, 在轻核反应理论的基础上, 对 ^{6}Li, ^{7}Li, ^{9}Be, ^{10}B, ^{11}B, ^{12}C, ^{14}N 和 ^{16}O 等核素分别编写了 LUNF 程序, 形成理论模型计算的 LUNF 程序系列.

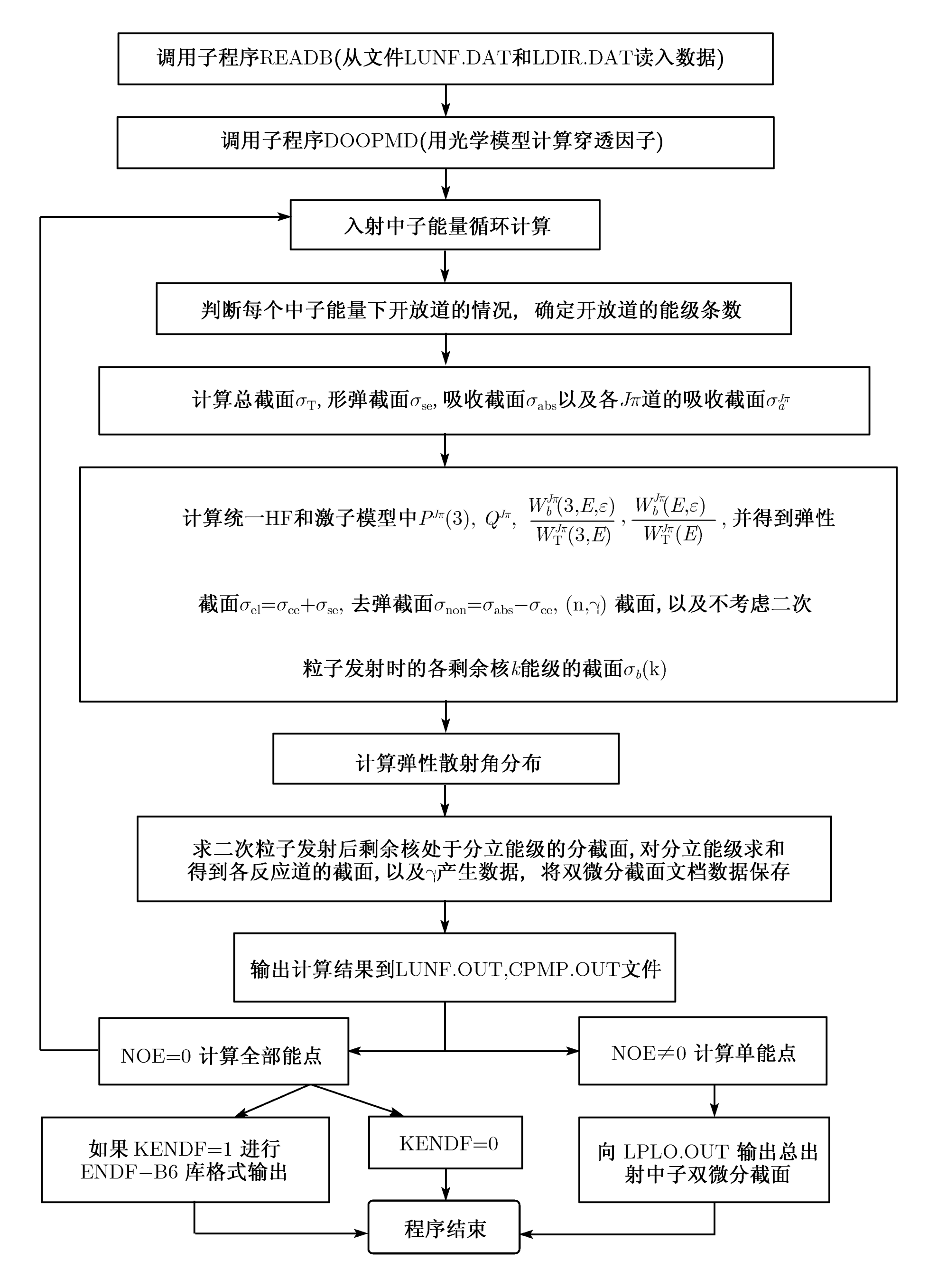
对不同的轻核, 其程序的主体结构是大体相同的, 但是开放的反应道以及非有序粒子发射的次序、类型、数目都是不同的, 甚至由于粒子发射类型的不同, 所需光学势的数目也不尽相同.

在 LUNF 程序中包含了两个输入文件 LUNF. DAT 和 LDIR. DAT. 其中 LUNF. DAT 文件包含程序计算内容的控制量, 中子入射能点, 与各开放反应道有关结合能、有关核素的能级纲图信息, 以及相关发射粒子的光学势参数. LDIR. DAT 文件则包含用其他程序计算得到的包含直接非弹的直接反应数据, 包括达到各剩余核分立能级的截面, 角分布的 Legendre 展开系数. 在 LUNF 程序中, 与统计理论计算的结果合成为总的反应道截面和角分布. 目前, 比较实用的程序有 DWUCK-4(Kunt, 未发表), 以及 ECIS94(Raynal, 1994).

下面给出 LUNF 程序的框架结构示意图.

LUNF 程序有四个主要输出文件, LUNF. OUT 文件记录输出的各中子入射能点的计算结果, 包括各种反应道的截面, 一次粒子发射的角分布, 由不同核反应途径开放分反应道的计算结果. 在单个入射能点的情况下, 各种开放道剩余核的能级条数, 在开放道中到剩余核的各分立能级的分截面值, 多次粒子发射过程中, 到达每个剩余核分立能级的截面和双微分截面谱, 以质心系 Legendre 展开系数的形式给出, 这些分截面数据要分别累加到各自对应的反应道中, 最终构成多粒子发射反应道的截面值. 此外还有截面归一的检查等.

LTFC. OUT 输出文件是记录由理论计算出的各种粒子的穿透因子值, 由此可以检查光学模型计算结果的正确性和精度. LPLO. OUT 文件则是用于对每个特定的中子入射能点, 在考虑了来自能级展宽和在实验测量中能量分辨率的展宽后, 记录出在实验室系中在各出射角度的总中子出射双微分截面谱, 可以直接用来与实验测量值进行比较. B6. OUT 文件则是以国际通用的 ENDF-B6 格式输出的数据库文件 (Melane et al., 1990).



如何在计算程序中确定需要考虑的反应道, 以及那些能级的开放对结果有实际意义, 由第 1 章已经给出有关公式. 但是, 由于竞争, 一些能级虽然在能量上满足开放条件, 但是竞争概率太小, 对最终计算结果没有贡献, 仍然不予考虑. 下面以

$n + {}^{7}Li$ 为例, 在 $E_n = 14MeV$ 时, 在各分反应道中, 通过不同分立能级途径, 大于 10 微靶的截面的输出结果由表 6.1 给出.

表 6.1 $E_n = 14MeV$ 时, $n + {}^{7}Li$ 通过不同分立能级途径开放的分反应道计算结果

反应道	k_1	k_2	截面/mb	反应道	k_1	k_2	截面/mb
(n,n)	1		112.8	(n,pn)	8	*gs*	0.87
(n,d)	*gs*		8.22	(n,nd)	8	*gs*	3.09
(n,d)	1		19.26	(n,nd)	8	1	0.61
(n,t)	*gs*		40.40	(n,nt)	2	*gs*	69.40
(n,t)	1		22.15	(n,nt)	3	*gs*	53.92
(n,2n)	4	*gs*	4.16	(n,nt)	4	*gs*	42.67
(n,2n)	5	*gs*	19.92	(n,nt)	5	*gs*	12.09
(n,2n)	6	*gs*	0.04	(n,nt)	6	*gs*	32.44
(n,2n)	7	*gs*	0.06	(n,nt)	7	*gs*	25.42
(n,2n)	7	1	2.87	(n,nt)	8	*gs*	1.55
(n,2n)	8	*gs*	4.97	(n,pn)	*gs*	*gs*	14.03
(n,2n)	8	1	1.85				
(n,2n)	8	2	0.58				

注: *gs* 表示基态 (下同).

上面是对单个入射能点而言, 对全部入射能点各种剩余核开放的阈能值也可以事先被计算出, 以判断每个有关的核素的能级条数给的是否足够. 以 $n + {}^{12}C$ 为例, 在 $E_n \leqslant 20MeV$ 以下时, 从复合核 ${}^{13}C^*$ 发射第一个粒子到其剩余核的 k_1 能级, 再从这个能级发射第二个粒子到其剩余核的 k_2 能级的开放道的结果可以被 LUNF 程序计算得出. 各种反应途径能级开放的阈能值, 以及在能量允许的条件下有可能开放的能级由表 6.2~6.5 分别给出.

表 6.2 是有序发射中子和 α 粒子剩余核为 ${}^{8}Be$ 的能级开放情况, 由这个表可以看出, ${}^{12}C$ 的第 1 和第 2 激发能级仅是由 γ 退激来结束反应, 因此属于非弹性散射道, 而 ${}^{12}C$ 的第 3 激发能级可以发射 α 粒子, 但能级纲图给出这条能级还存在 E_3 模式的 γ 退激与 α 粒子发射之间产生竞争. ${}^{12}C$ 的第 8 激发能级 $E_k = 12.71MeV(1^+)$, 表 6.2 中从能量上允许发射 α 粒子到 ${}^{8}Be$ 的基态和第 1 激发能级. 但是, 由于 ${}^{8}Be$ 的基态自旋宇称是 0^+, 这种 $1^+ \to 0^+$ 的 α 粒子发射是被禁戒的, 因此计算表明发射 α 粒子的概率非常小, 以致 ${}^{12}C$ 的第 8 激发能级主要贡献到非弹性散射道, 虽然这个截面非常小.

表 6.2 中子入射能量在 20MeV 以下从 ${}^{13}C^*$ 有序发射中子和 α 粒子的反应道分立能级途径和阈能值

	E_{th}/MeV	k_1	$k_2({}^{8}Be)$		E_{th}/MeV	k_1	$k_2({}^{8}Be)$
(n,nα)	10.45	3	*gs*	(n,nα)	19.25	16	*gs*-1
(n,nα)	11.17	4	*gs*	(n,nα)	19.69	17	*gs*-1
(n,nα)	11.76	5	*gs*-1	(n,nα)	19.98	18	*gs*-1
(n,nα)	12.01	6	*gs*-1	(n,αn)	8.066	1	*gs*

续表

	E_{th}/MeV	k_1	$k_2(^8Be)$		E_{th}/MeV	k_1	$k_2(^8Be)$
(n,nα)	12.82	7	*gs*-1	(n,αn)	8.813	2	*gs*
(n,nα)	13.78	8	*gs*-1	(n,αn)	9.193	3	*gs*
(n,nα)	14.47	9	*gs*-1	(n,αn)	9.484	4	*gs*
(n,nα)	15.27	10	*gs*-1	(n,αn)	11.28	5	*gs*
(n,nα)	16.38	11	*gs*-1	(n,αn)	18.98	9	*gs*-1
(n,nα)	16.74	12	*gs*-1	(n,αn)	12.51	6	*gs*-1
(n,nα)	17.46	13	*gs*-1	(n,αn)	14.79	7	*gs*-1
(n,nα)	17.96	14	*gs*-1	(n,αn)	18.41	8	*gs*-1
(n,nα)	18.68	15	*gs*-1	(n,αn)	18.98	9	*gs*-1

表 6.3 是考虑发射两个 α 粒子到剩余核 ^{5}He 的能级开放情况, 这时发射第一个 α 粒子达到剩余核 ^{9}Be 的激发能级. ^{9}Be 的前两个激发能级仅允许发射中子, 而从 ^{9}Be 的第 3 激发能级以上时, 都允许发射第二个 α 粒子, 可以到达其剩余核 ^{5}He 的基态和第 1 激发能级, 并自发崩裂为一个中子和一个 α 粒子, 因此属于 ^{12}C(n, n3α) 反应道. 表 6.3 给出它们的阈能值都不是很大, 都会在 ^{12}C(n, n3α) 反应道中有明显的贡献. 在理论模型计算中要认真考虑.

表 6.3 中子入射能在 20MeV 以下, 从 ^{13}C* 有序发射两个 α 粒子反应道分立能级途径和阈能值

	E_{th}/MeV	$k_1(^9Be)$	$k_2(^5He)$
(n,2α)	9.193	3	*gs*
(n,2α)	9.484	4	*gs*
(n,2α)	11.28	5	*gs*
(n,2α)	13.51	6	*gs*-1
(n,2α)	13.79	7	*gs*-1
(n,2α)	14.79	8	*gs*-1
(n,2α)	18.41	9	*gs*-1

在中子引发 ^{12}C 的核反应中, 还考虑了 ^{5}He 的发射, 剩余核为 ^{8}Be. 两者都是不稳定核素, 属于双两体崩裂, 并贡献到 ^{12}C(n, n3α) 反应道. 该反应道开放情况由表 6.4 给出. 从 ^{5}He 崩裂出的中子主要贡献在低能谱部分 (Zhang et al., 1999). 由表中给出的阈能值看出, 这个反应途径仍然需要考虑.

表 6.4 中子入射能在 20MeV 以下时, 从 ^{13}C* 发射 ^{5}He 到达剩余核 ^{8}Be 分立能级途径和阈能值

	E_{th}/MeV	$k_1(^8Be)$
(n, ^{5}He)	8.954	*gs*
	12.272	1
	18.671	2

表 6.5 是考虑一些发射中子和质子, 即 ^{12}C(n, np + pn)^{11}N 到剩余核 ^{11}N 的能级开放情况, 可以看出, 在这种核反应过程中, 通过各种分立能级途径的反应阈能值都超过 17MeV, 由于有带电的质子发射, 还存在库仑位垒效应, 实际开放的反应

道对应的中子入射能量要比表 6.5 中的值高. 因此, 当中子能量在 20MeV 以下时引发的 ^{12}C 的核反应中是一个高阈能值的核反应道. 其贡献远不如 ^{12}C(n, n3α) 反应道.

表 6.5 中子入射能在 20MeV 以下从 ^{13}C* 先后发射一个中子和一个质子的反应道分立能级途径和阈能值

	E_{th}/MeV	k_1	k_2(^{11}N)		E_{th}/MeV	k_1	k_2(^{11}N)
(n,np)	17.46	13	*gs*	(n,np)	19.98	18	*gs*-1
(n,np)	17.96	14	*gs*				
(n,np)	18.68	15	*gs*	(n,pn)	17.32	5	*gs*
(n,np)	19.25	16	*gs*	(n,pn)	17.72	6	*gs*
(n,np)	19.69	17	*gs*-1	(n,pn)	18.31	7	*gs*

对于其他轻核反应的情况也都需要有上述的核反应途径的细致分析过程, 在这里就不再逐一讲述. 总而言之, 对于轻核反应, 必须对核反应所涉及的能级要逐一地进行分析, 这样才能比较准确地考虑轻核反应的各种途径, LUNF 程序可以提供每个反应道开放的能级阈能信息, 这样才能对理论计算结果给出比较准确的分析和合理的理论解释, 以增加对理论计算结果可靠性的把握.

为验证理论计算结果的可靠性, 下面分核素给出一些总中子出射的分角度能谱的理论计算值与实验数据的符合状况. 一些图中还给出了在某些中子入射能量的情况下, 在实验室系中一定出射角度的分角度能谱中的分解能谱, 也是由 LUNF 程序计算给出的.

为了在同一个图中多给出一些不同角度的能谱, 每个角度大的分角度能谱都相继乘上 10^{-2} 因子, 在有的图中就不再注明. 这是用来分析在总中子出射的双微分截面中, 在各分解谱中给出来自不同反应途径的粒子发射的分谱组成成分.

1) n + ^{6}Li 的情况 (Zhang et al., 2001b)

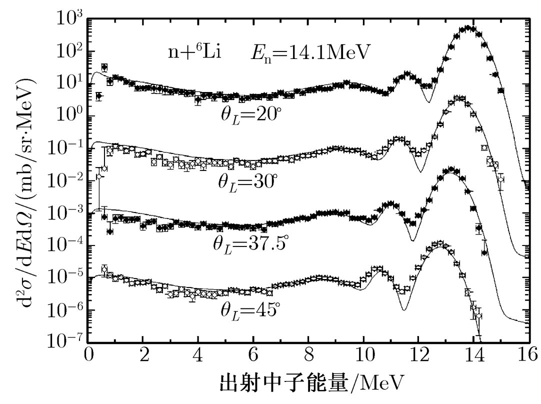


图 6.2 n + ^{6}Li 在 E_n = 14.1MeV 时, 角度分别为 20°, 30°, 37.5°, 45° 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 各种点为实验测量值, 取自文献 (Baba et al., 1990)

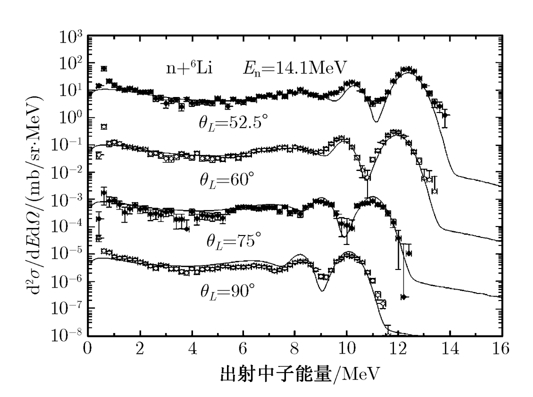


图 6.3　$n + {}^6Li$ 在 $E_n = 14.1MeV$ 时, 角度分别为 52.5°, 60°, 75°, 90° 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 各种点为实验测量值, 取自文献 (Baba et al., 1990)

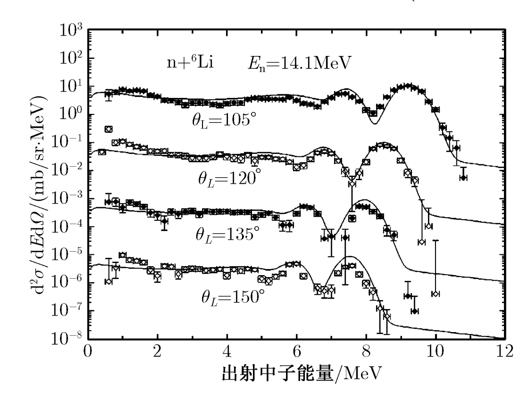


图 6.4　$n + {}^6Li$ 在 $E_n = 14.1MeV$ 时, 角度分别为 105°, 120°, 135°, 150° 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 各种点为实验测量值, 取自文献 (Baba et al., 1990)

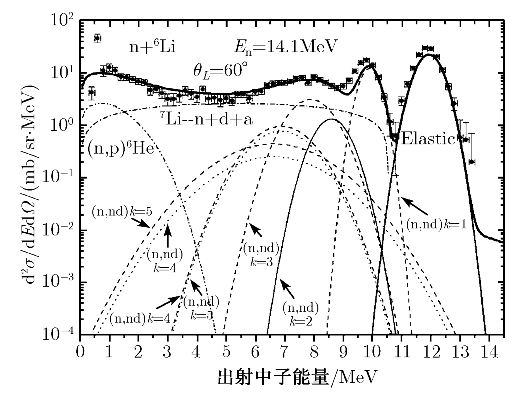


图 6.5　$n + {}^6Li$ 在 $E_n = 14.1MeV$ 时, 角度为 60° 的分角度能谱分解谱, 其中各分谱标记了出射中子的反应道, k 表示剩余核的激发能级序号. 黑曲线为理论计算值, 点为实验测量值, 取自文献 (Baba et al., 1990)

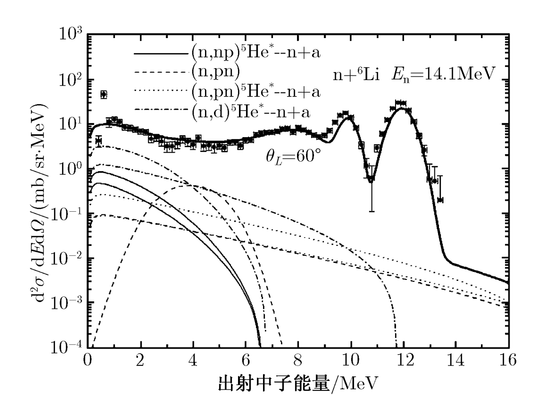


图 6.6 $\mathrm{n}+{}^{6}\mathrm{Li}$ 在 $E_{\mathrm{n}}=14.1\mathrm{MeV}$ 时, 角度为 60° 的分角度能谱分解谱 (续), 其中各分谱标记了出射中子的反应道. 黑曲线为理论计算值, 点为实验测量值, 取自文献 (Baba et al., 1990)

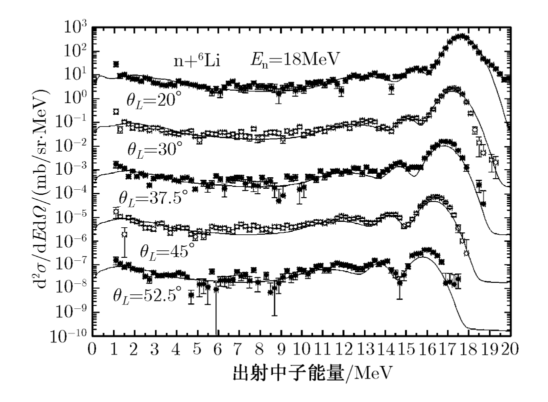


图 6.7 $\mathrm{n}+{}^{6}\mathrm{Li}$ 在 $E_{\mathrm{n}}=18\mathrm{MeV}$ 时, 角度分别为 20°, 30°, 37.5°, 45°, 52.5° 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 各种点为实验测量值, 取自文献 (Ibaraki et al., 1998)

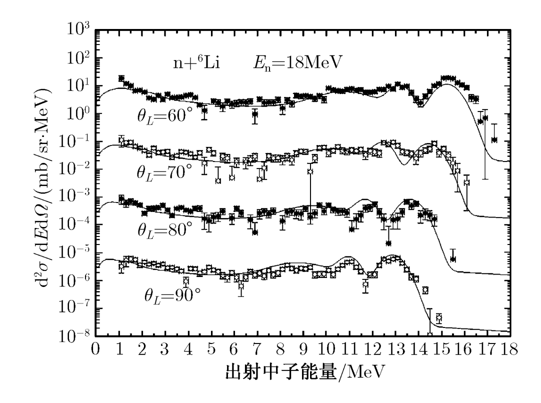


图 6.8 $\mathrm{n}+{}^{6}\mathrm{Li}$ 在 $E_{\mathrm{n}}=18\mathrm{MeV}$ 时, 角度分别为 60°, $70^{\circ},80^{\circ},90^{\circ}$ 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 各种点为实验测量值, 取自文献 (Ibaraki et al., 1998)

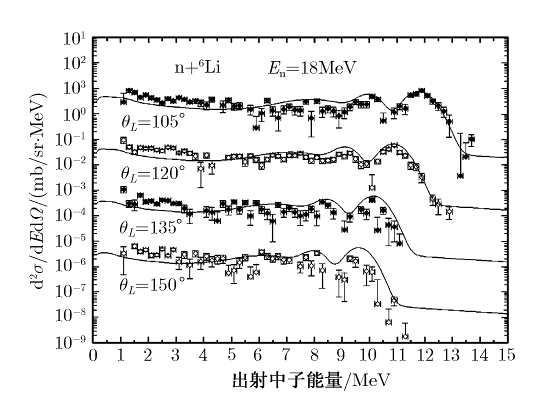


图 6.9　$n+{}^6$Li 在 $E_n = 18$MeV 时, 角度分别为 105°, 120°, 135°, 150° 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 各种点为实验测量值, 取自文献 (Ibaraki et al., 1998)

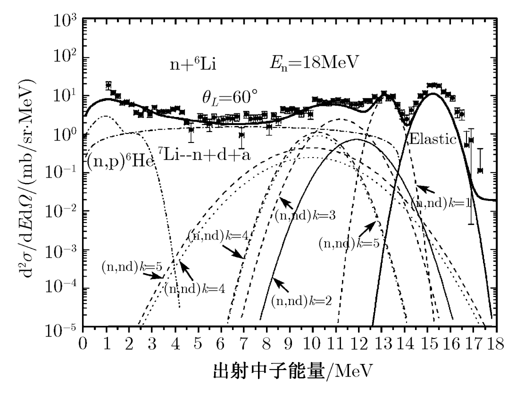


图 6.10　$n+{}^6$Li 在 $E_n = 18$MeV 时, 角度为 60° 的分角度能谱分解谱, 其中各分谱标记了出射中子的反应道, k 表示剩余核的激发能级序号. 黑曲线为理论计算值, 点为实验测量值, 取自文献 (Ibaraki et al., 1998)

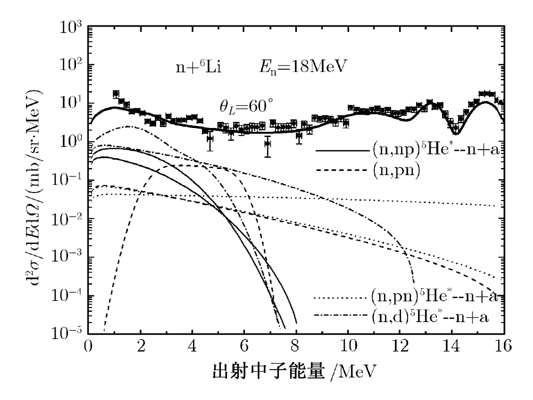


图 6.11　$n+{}^6$Li 在 $E_n = 18$MeV 时, 角度为 60° 的分角度能谱分解谱 (续), 其中各分谱标记了出射中子的反应道. 黑曲线为理论计算值, 点为实验测量值, 取自文献 (Ibaraki et al., 1998)

2) $n + {}^7Li$ 的情况 (Zhang et al., 2002b)

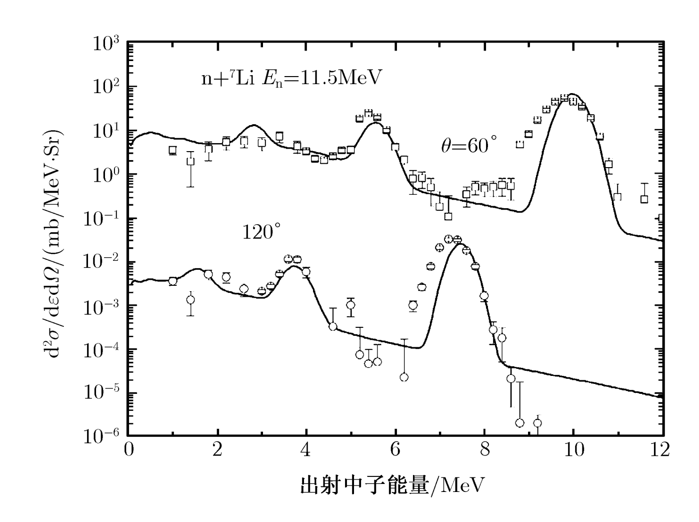


图 6.12 $n + {}^7Li$ 在 $E_n = 11.5MeV$ 时, 角度分别为 60°, 120° 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 各种点为实验测量值, 取自文献 (Chiba et al., 2001)

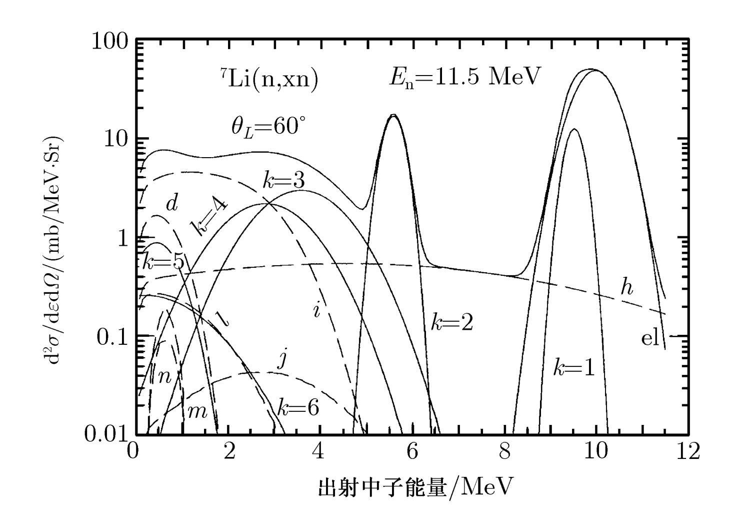


图 6.13 $n + {}^7Li$ 在 $E_n = 11.5MeV$ 时, 角度为 60° 的分角度能谱分解谱, el 表示弹性峰; $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 对应从 ${}^8Li^*$ 向 ${}^7Li$ 的第 k 个分立能级发射第一个中子的谱; i 和 h 对应的是从 (n, t) 反应道的剩余核 ${}^5He$ 的基态与第 1 激发态崩裂的中子分谱; d 是从 (n,d) 反应道的剩余核 ${}^6He$ 的第 1 激发态三体崩裂的中子谱; l 和 j 是分别来自 ${}^7Li$ 的第 4 和第 6 激发态能级通过 ${}^6Li(n, 2n)$ 反应道发射第二个中子到 ${}^6Li$ 的基态的中子谱; m 和 n 是分别来自 ${}^7Li$ 的第 5 和第 6 激发态能级通过 ${}^6Li(n, 2n)$ 反应道发射第二个中子到 ${}^6Li$ 的第 1 激发态的中子谱

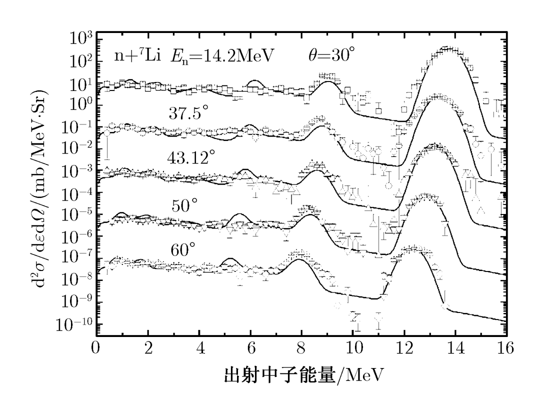


图 6.14 n + ^{7}Li 在 $E_n = 14.2$MeV 时, 角度分别为 30°, 37.5°, 43.12°, 50°, 60° 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 各种点为实验测量值, 取自文献 (Chiba et al., 1985)

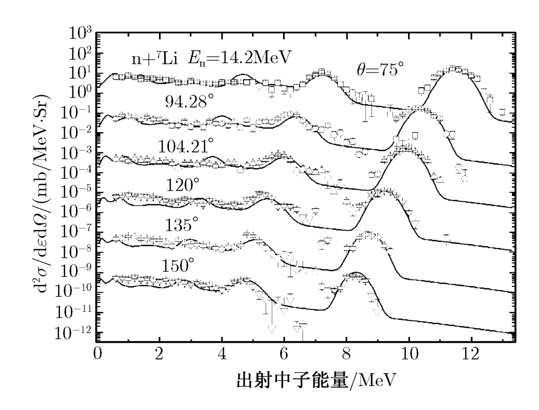


图 6.15 n + ^{7}Li 在 $E_n = 14.2$MeV 时, 角度分别为 75°, 94.28°, 104.2°, 120°, 135°, 150° 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 各种点为实验测量值, 取自文献 (Chiba et al., 1985)

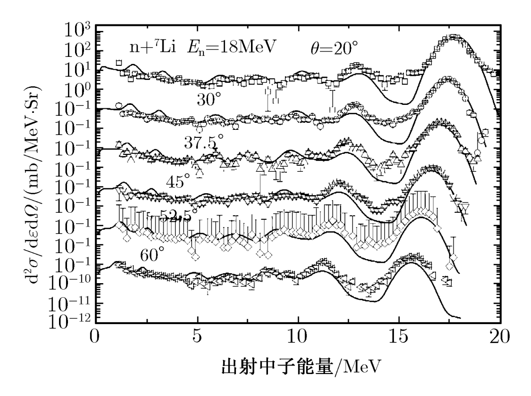


图 6.16 n + ^{7}Li 在 $E_n = 18$MeV 时, 角度分别为 20°, 30°, 37.5°, 45°, 52.5°, 60° 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 各种点为实验测量值, 取自文献 (Ibaraki et al., 1998)

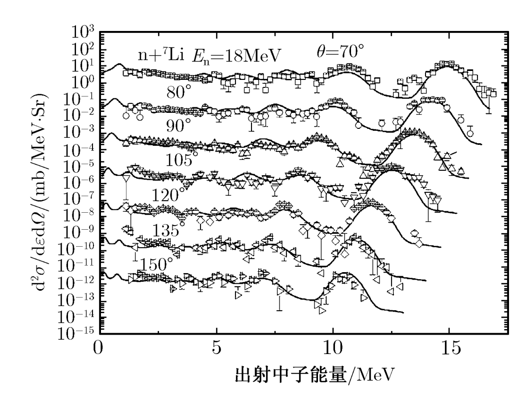


图 6.17 $n + {}^7Li$ 在 $E_n = 18MeV$ 时, 角度分别为 $70°, 80°, 90°, 105°, 120°, 135°, 150°$ 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 各种点为实验测量值, 取自文献 (Ibaraki et al., 1998)

3) 对 $n + {}^9Be$ 的情况

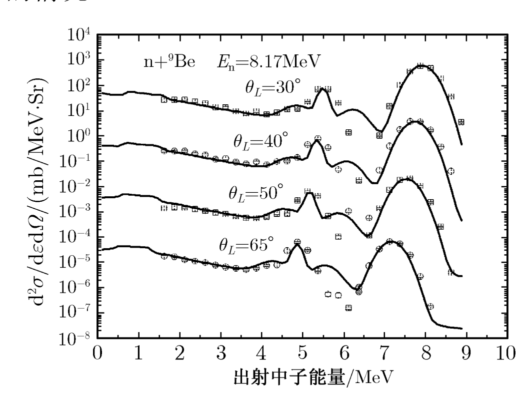


图 6.18 $n + {}^9Be$ 在 $E_n = 8.17MeV$ 时, 角度分别为 $30°, 40°, 50°, 65°$ 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 各种点为实验测量值, 取自文献 (阮锡超等, 2004)

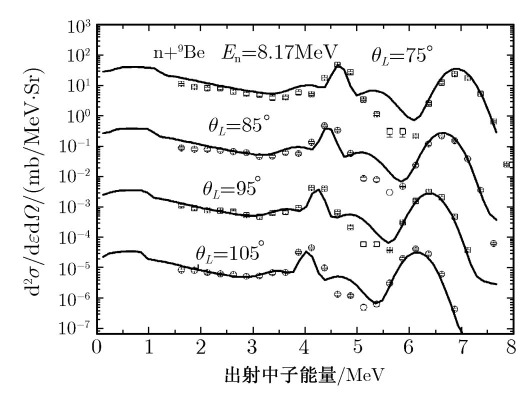


图 6.19 $n + {}^9Be$ 在 $E_n = 8.17MeV$ 时, 角度分别为 $75°, 85°, 95°, 105°$ 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 各种点为实验测量值, 取自文献 (阮锡超等, 2004)

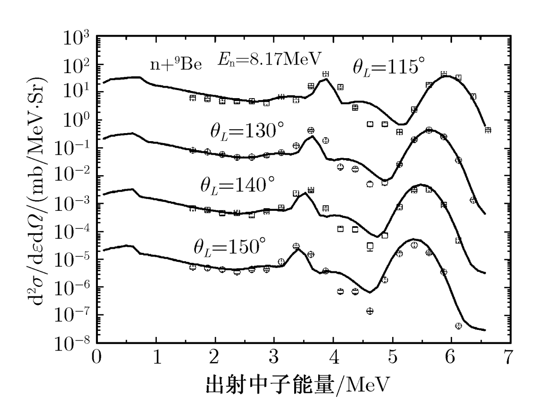


图 6.20 $\mathrm{n}+{}^{9}\mathrm{Be}$ 在 $E_{\mathrm{n}}=8.17\mathrm{MeV}$ 时, 角度分别为 $115°, 130°, 140°, 150°$ 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 各种点为实验测量值, 取自文献 (阮锡超等, 2004)

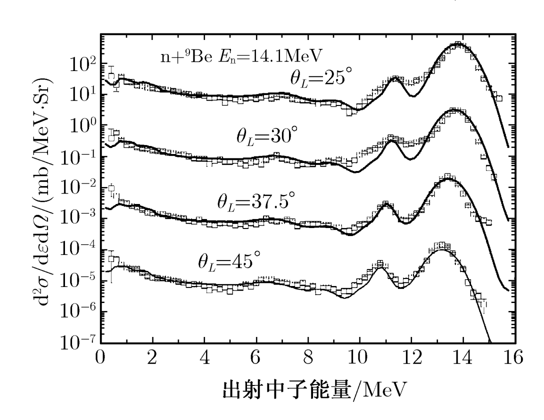


图 6.21 $\mathrm{n}+{}^{9}\mathrm{Be}$ 在 $E_{\mathrm{n}}=14.1\mathrm{MeV}$ 时, 角度分别为 $25°, 30°, 37.5°, 45°$ 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 各种点为实验测量值, 取自文献 (Baba et al., 1988)

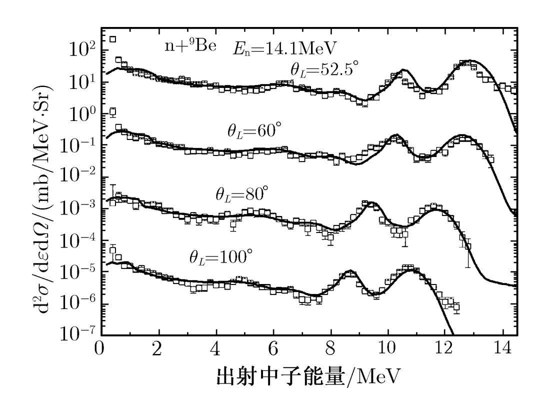


图 6.22 $\mathrm{n}+{}^{9}\mathrm{Be}$ 在 $E_{\mathrm{n}}=14.1\mathrm{MeV}$ 时, 角度分别为 $52.5°, 60°, 80°, 100°$ 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 方点为实验测量值, 取自文献 (Baba et al., 1988)

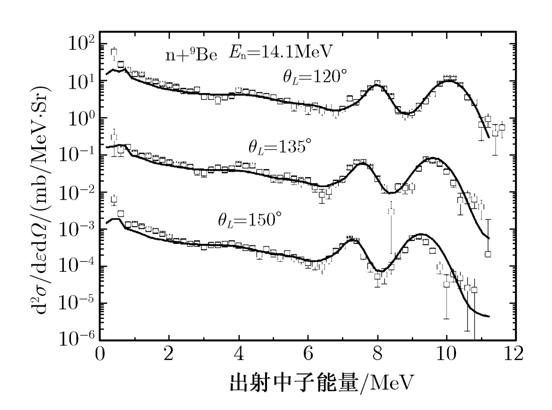


图 6.23　n + ^{9}Be 在 $E_\mathrm{n} = 14.1$MeV 时, 角度分别为 120°, 135°, 150° 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 方点为实验测量值, 取自文献 (Baba et al., 1988)

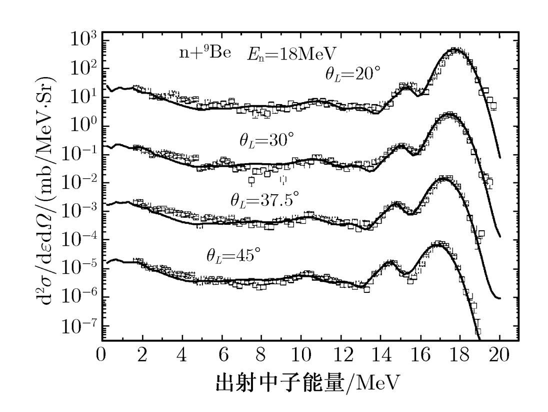


图 6.24　n + ^{9}Be 在 $E_\mathrm{n} = 18$MeV 时, 角度分别为 20°, 30°, 37.5°, 45° 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 各种点为实验测量值, 取自文献 (Ibaraki et al., 1998)

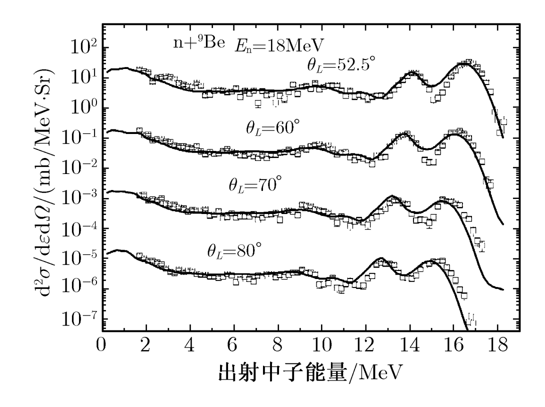


图 6.25　n + ^{9}Be 在 $E_\mathrm{n} = 18$MeV 时, 角度分别为 52.5°, 60°, 70°, 80° 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 各种点为实验测量值, 取自文献 (Ibaraki et al., 1998)

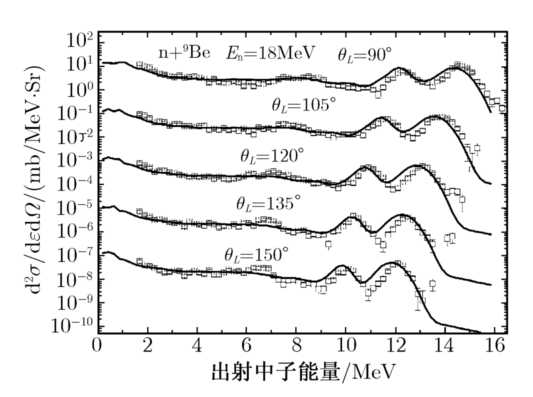


图 6.26　$n + {}^9Be$ 在 $E_n = 18MeV$ 时, 角度分别为 $90°, 105°, 120°, 135°, 150°$ 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 方点为实验测量值, 取自文献 (Ibaraki et al., 1998)

4) $n + {}^{12}C$ 的情况 (Zhang et al, 1999)

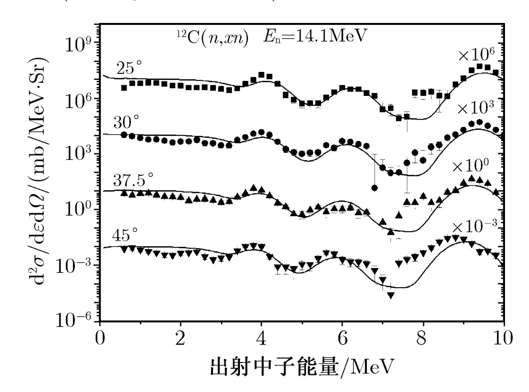


图 6.27　$n + {}^{12}C$ 在 $E_n = 14.1MeV$ 时, 角度分别为 $25°, 30°, 37.5°, 45°$ 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 黑三角点为实验测量值, 取自文献 (Baba et al., 1988)

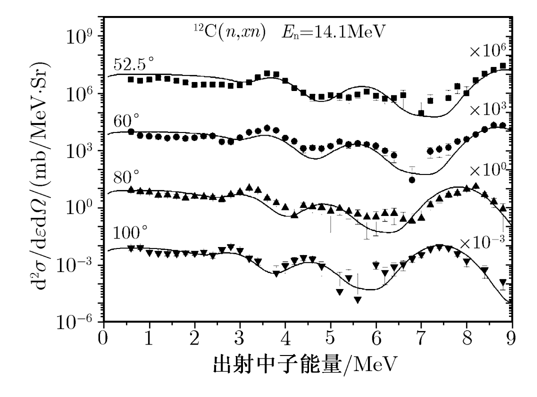


图 6.28　$n + {}^{12}C$ 在 $E_n = 14.1MeV$ 时, 角度分别为 $52.5°, 60°, 80°, 100°$ 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 黑三角点为实验测量值, 取自文献 (Baba et al., 1988)

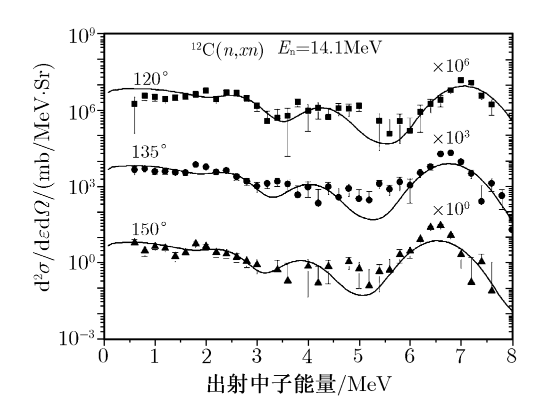


图 6.29　n + ^{12}C 在 $E_{\rm n} = 14.1$MeV 时, 角度分别为 120°, 135°, 150° 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 黑点为实验测量值, 取自文献 (Baba et al., 1988)

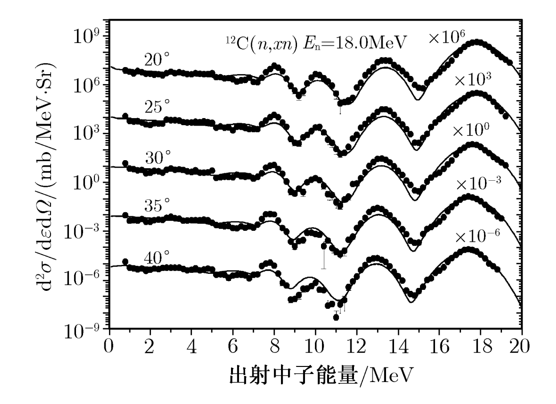


图 6.30　n + ^{12}C 在 $E_{\rm n} = 14.1$MeV 时, 角度分别为 20°, 25°, 30°, 35°, 40° 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 黑点为实验测量值, 取自文献 (Baba et al., 1990)

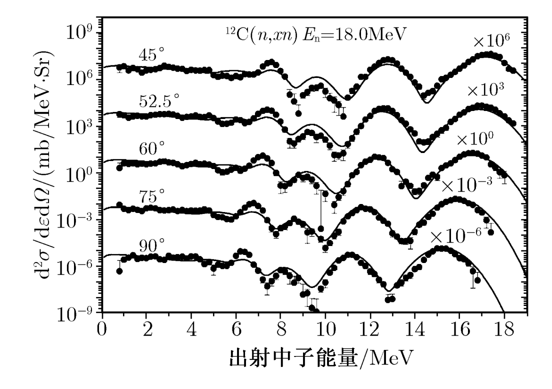


图 6.31　n + ^{12}C 在 $E_{\rm n} = 18$MeV 时, 角度分别为 45°, 52.5°, 60°, 75°, 90° 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 黑点为实验测量值, 取自文献 (Baba et al., 1990)

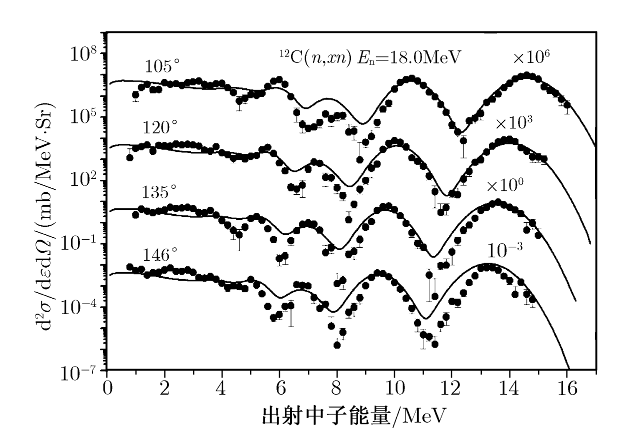


图 6.32 $\mathrm{n}+{}^{12}\mathrm{C}$ 在 $E_\mathrm{n}=18\mathrm{MeV}$ 时, 角度分别为 105°, 120°, 135°, 146° 的分角度能谱, 曲线为理论计算值, 黑点为实验测量值, 取自文献 (Baba et al., 1990)

对于 $\mathrm{n}+{}^{10}\mathrm{B}$ 和 $\mathrm{n}+{}^{11}\mathrm{B}$ 的情况已由图 4.2~4.5 给出 (Zhang, 2003a, 2003b). 关于 $\mathrm{n}+{}^{14}\mathrm{N}$ 和 $\mathrm{n}+{}^{16}\mathrm{O}$ 的情况可参见 (Yan et al., 2005; Zhang et al., 2001a; Dun et al., 2005). 由以上计算的实例可以看出, 由轻核反应理论计算得到的双微分截面能相当好地再现实验测量值, 说明了新发展的轻核反应理论成功之处. 当然, 上述结果只是对理论计算进行了微观实验数据的检验, 而在实际应用中, 还需要对中子数据库进行宏观检验, 也称为基准检验 (Benchmark). 只有既能较好地符合微观实验数据, 又能通过基准检验的核数据才是高质量的实用数据.

由于在轻核反应中, 很大一部分剩余核都是通过各种途径变成轻粒子, 诸如氘, 氚, α 粒子等. 因此很难像中重核那样应用活化法进行截面测量. 对于多粒子发射过程, 则必须用多粒子符合法直接测量, 这种测量的难度相对是比较大的. 因此, 在中子引发的轻核反应中, 有相当多反应道的截面数据至今没能进行过测量, 或有几家测量数据, 但彼此间分歧很大. 但是, 由于有总出射中子的双微分截面谱的实验测量数据, 以及对理论计算的分谱成分的分析, 可以给出这些没有实验测量数据的截面信息, 或者澄清截面数据之间的分歧. 正如上述图中所示, 轻核反应理论计算结果与实验测量的双微分截面谱取得了很好的符合, 在双微分截面谱的分解图中给出了从各分反应道的出射中子信息, 这样就可以得到一些至今没有实验测量的反应截面的评价值, 例如 $\mathrm{n}+{}^{16}\mathrm{O}$ 反应中的 (n, nα) 截面等. 如果实验测量了多个入射能量点的双微分截面, 从而可以得到这些反应道的截面随入射能量变化的关系曲线, 例如在 $\mathrm{n}+{}^{6}\mathrm{Li}$ 反应中的 (n, ndα), (n, 2npα) 截面, 在 $\mathrm{n}+{}^{7}\mathrm{Li}$ 反应中的 (n, d), (n, np), (n, 2ndα) 以及 (n, 3npα) 截面等, 它们都有从 6~18MeV 多能点的双微分截面谱的实验测量数据. 事实表明, 可以通过上述途径可以给出以双微分截面实验测量数据为根据的截面评价值. 同样, 对 $\mathrm{n}+{}^{9}\mathrm{Be}$ 和 $\mathrm{n}+{}^{6}\mathrm{Li}$ 都存在多能点的双微分截面的实

验测量数据. 在理论计算再现双微分截面测量数据的同时, 就得到了复合核发生直接三体崩裂概率随入射能量的变化关系.

6.6 轻核评价中子数据库的基准检验

在本书介绍的轻核反应理论方法的基础上, 编制了 LUNF 程序, 并计算了轻核反应的全套核数据, 在搜集了有关实验测量数据后, 经过分析筛选, 再作仔细的评价后, 建立了包含双微分截面文档的中子诱发轻核反应的中国评价中子数据库.

对于中子诱发 1p 壳轻核 ^{6}Li, ^{7}Li, ^{9}Be, ^{11}B, ^{12}C, ^{14}N 和 ^{16}O 的反应, 通过理论计算方式建立了它们的双微分截面文档. 需要指出的是, 对于中子引发的轻核反应, 在所关心的能量范围内, 复合核发射一次粒子后剩余核总是处于分立能级, 因此从这些分立能级继续发射次级粒子的核反应是多次粒子发射的过程, 由于核质量很轻, 具有很强的反冲效应, 使多次粒子发射过程的能谱具有很宽的能量范围, 需要用双微分截面来描述的核数据内容.

表 6.6 给出了在入射中子能量小于 20MeV 时, 在这些中子引发轻核的反应中, 需要建立双微分截面文档的反应道. 其中每一个反应道都是通过各种不同的粒子发射顺序来实现的, 这种双微分截面是多次粒子发射中各个相应的分截面之和.

表 6.6 入射中子在 20 MeV 以下的轻核反应中, 需要建立双微分截面文档的反应道

核素	反应道
^{6}Li	$(n, nd\alpha), (n, 2np\alpha)$
^{7}Li	$(n, 2n), (n, np), (n, nt\alpha), (n, 2nd\alpha), (n, 3np\alpha)$
^{9}Be	$(n, 2n2\alpha)$
^{10}B	$(n, 2n), (n, np), (n, n\alpha), (n, nd)$
^{11}B	$(n, 2n), (n, np), (n, n\alpha), (n, nd), (n, nt)$
^{12}C	$(n, n3\alpha), (n, np)$
^{14}N	$(n, 2n), (n, np), (n, n\alpha), (n, nd), (n, 2np), (n, 2\alpha), (n, t3\alpha)$
^{16}O	$(n, 2n), (n, np), (n, n\alpha)$

由第 1 章中分析出各种中子引发 1p 壳轻核反应道的开放情况. 在入射中子在 20MeV 以下时, 由表 6.6 给出的双微分截面文档内容可以看出, 不同的核素之间的双微分截面文档彼此间会有如此明显的不同, 充分反映了轻核的核反应特性.

当中子入射能量提高到 30MeV 时, 由第 1 章对这种轻核开放反应道的分析内容可以看出, 会有相当多的反应道开放. 因此, 需要在双微分截面文档中增加相应的新内容. 通过实际计算表明, 虽然一些反应道的阈能在 30MeV 以下, 但是由于库仑位垒或通过分立能级的途径所限制, 这些反应道的截面可以小得忽略不计. 需要新增加的反应道由表 6.7 给出.

表 6.7 中子能量在 30MeV 能区的轻核反应中，需要增加建立双微分截面文档的反应道

核素	需要新增加建立双微分截面文档的反应道
^{9}Be	(n, np), (n, nd), (n, nt)
^{12}C	(n, 2n), (n, np), (n, dα)
^{16}O	(n, 2α), (n, nd), (n, n4α)

注：对于 ^{6}Li, ^{7}Li, ^{14}N 核素，不需要增加新反应道.

由第 1 章介绍的能级纲图的现状可以得知，许多核素中能量大于 20MeV 的能级自旋宇称尚未确定，因此计算中子能量高于 20MeV 的数据尚缺乏足够的可靠性.

为了确定数据的可靠性，还需要对数据进行基准检验 (Benchmark). 基准检验的一个重要方面是中子泄漏谱的测量，即对一定入射能量的中子，在穿透大块物质后，探测不同角度的中子泄漏谱，并与用评价数据库的数据计算结果比较，比较全面地验证评价中子数据库的准确性. 当然，这种大块物质为纯轻核物质最好，这样就可以减少其他核素对检验结果的影响. 目前，已经有除硼之外的其他轻核的中子泄漏谱的基准检验实验结果. 目前的中子泄漏谱的基准检验，主要是检验聚变中子的情况，这是由于聚变中子的应用性比较强. 当然，这种基准检验也存在一定缺欠，那就是无法检验比入射中子能量更高能区的评价中子数据的质量. 另外，从历史发展过程看，基准检验实验的精度也在不断提高，因此，许多旧的基准检验数据可能被淘汰，基准检验的参照标准也在不断的发展之中.

通常，中子泄漏谱的基准检验是用 Monte-Carlo 方法来计算，而在 Monte-Carlo 方法中需要点截面、出射中子的角分布以及各个角度、能量的概率表. 这些数据通常由美国编制的 NJOY 程序对评价中子数据的数据加工制作得到 (MacFarlane et al., 1994). 而 ENDF/B 库格式中的双微分截面文档数据，可以允许按多种方式给出 (Mclane et al., 1990). 有的是以质心系中的 Legendre 系数形式给出，仅少数核素采用表格方式给出双微分截面文档. 有的核素用多体相空间分布系数给出. 而有的核素是用 Kalbach-Mann 系统学公式给出的 (Kalbach et al., 1981, 1982, 1987, 1988). 而 Kalbach-Mann 系统学公式的物理基础也被论证了 (Chadwick et al., 1994).

为此，首先对 Kalbach-Mann 系统学公式进行讨论. 这个系统学公式是用于核反应过程的连续谱粒子发射过程 $a + \mathrm{A} \to \mathrm{C} \to b + \mathrm{B}$(Kalbach et al., 1988; Mclane et al., 1990). 其中 a 是入射粒子，A 是靶核，C 是复合核，b 是出射粒子，B 是剩余核.

Kalbach-Mann 系统学公式的表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma(E_n)}{\mathrm{d}E_b\mathrm{d}\Omega_b} = \frac{f_0(E_a, E_b)}{4\pi}\left\{\frac{a}{\sinh(a)}\left[\cosh(a\mu_b) + r(E_a, E_b)\sinh(a\mu_b)\right]\right\} \tag{6.6.1}$$

其中，E_a 是实验室系中入射粒子 a 的能量，E_b 是质心系中出射粒子 b 的能量，$\mu_b = \cos\theta_b$ 是质心系中粒子 b 出射角的余旋. 在 (6.6.1) 式中，$f_0(E_a, E_b)$ 是质心系

中出射粒子的归一化能谱, $r(E_a, E_b)$ 是预平衡份额, 允许取值的范围是

$$0 \leqslant r(E_a, E_b) \leqslant 1 \tag{6.6.2}$$

这意味着预平衡发射粒子的朝前性特征, 通常由模型理论 (比如普通激子模型, 或多步直接和多步复合核理论) 计算得到或通过拟合双微分截面实验数据得到 (Mclane et al., 1990). 显然, (6.6.1) 式中 $f_0(E_a, E_b)$ 对 E_b 的积分是归一化的. 在 (6.6.1) 式中 $a = a(E_a, E_b)$ 是 E_a, E_b 的函数, 具体函数表示形式参见 (Kalbach, 1988). 由此可见, 用 Kalbach 系统学制作双微分截面文档数据时, 对于每一个入射能点, 仅对出射粒子谱中的每个能量点处给出能谱 $f_0(E_a, E_b)$ 的值, 参数 a 的值, 以及预平衡因子的 $r(E_a, E_b)$ 的值即可.

但是, 如果数据库中是应用了在质心系中的 Legendre 系数的形式给出时, 原有的 NJOY 程序是通过等效的 Kalbach 系统学公式来制作双微分截面的数据. 这时, 必须用数据库中的 Legendre 系数通过一定的转换方式, 给出等效参数 a 值, 以及预平衡因子的 $r(E_a, E_b)$ 值. 为了解这个等效转换过程, 需要进行一些数学准备, 要对 Kalbach-Mann 系统学公式进行 Legendre 多项式展开. 在数学上, 可以用双曲函数的 Legendre 多项式展开的方法来完成这种等效计算. 双曲函数的 Legendre 多项式展开的公式为 (Abramowitz et al., 1970)

$$\cosh(a\mu) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a\mu} + \mathrm{e}^{-a\mu}) = \sum_{l=0,2,\cdots}^{\infty} (2l+1)\sqrt{\frac{\pi}{2a}} I_{l+\frac{1}{2}}(a) P_l(\mu) \tag{6.6.3}$$

$$\sinh(a\mu) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a\mu} - \mathrm{e}^{-a\mu}) = \sum_{l=1,3,\cdots}^{\infty} (2l+1)\sqrt{\frac{\pi}{2a}} I_{l+\frac{1}{2}}(a) P_l(\mu) \tag{6.6.4}$$

其中 $I_{l+\frac{1}{2}}(a)$ 是正规半整阶虚综量贝塞尔函数 (Abramowitz et al., 1970). $P_l(\mu)$ 是 Legendre 多项式.

因此, 在 (6.6.1) 式中, 第一项 $\cosh(a\mu)$ 仅有 Legendre 多项式展开的偶数波, 对应的是平衡态发射, 而第二项 $\sinh(a\mu)$ 仅有 Legendre 多项式展开的奇数波, 对应的是预平衡态发射. 利用上面两个公式, 将 Kalbach-Mann 系统学公式 (6.6.1) 改写成 Legendre 多项式展开的形式：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\sigma(E_n)}{\mathrm{d}E_b\mathrm{d}\Omega_b} &= \frac{f_0(E_a, E_b)}{4\pi}\frac{a}{\sinh(a)} \\ &\times \left[\sum_{l=0,2,\cdots}^{\infty} + r(E_a, E_b)\sum_{l=1,3,\cdots}^{\infty}\right](2l+1)\sqrt{\frac{\pi}{2a}} I_{l+\frac{1}{2}}(a) P_l(\mu_b)\end{aligned} \tag{6.6.5}$$

而归一化双微分截面的 Legendre 多项式标准的展开形式是

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}E_b\mathrm{d}\mu_b} = \frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1) f_l(E_b) P_l(\mu_b) \tag{6.6.6}$$

对比 (6.6.5) 和 (6.6.6) 式, 可得到各阶 Legendre 多项式的展开系数. 对偶数 l 值有

$$f_{l=0,2,\cdots}(E_b) = f_0(E_a,E_b)\frac{a}{\sinh(a)}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}I_{l+\frac{1}{2}}(a) \tag{6.6.7}$$

而对奇数 l 值有

$$f_{l=1,3,\cdots}(E_b) = f_0(E_a,E_b)r(E_a,E_b)\frac{a}{\sinh(a)}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}I_{l+\frac{1}{2}}(a) \tag{6.6.8}$$

特别是对 $l=0$ 分波的正规半整阶虚综量贝塞尔函数, 已由 (6.4.17) 式给出. 代入到 (6.6.7) 式后得到

$$f_{l=0}(E_b) = f_0(E_a,E_b) \tag{6.6.9}$$

说明了 Kalbach-Mann 系统学中的能谱就是理论计算的归一化能谱.

下面讨论在原 NJOY 程序中获得等效参数 a 值和预平衡因子 $r(E_a,E_b)$ 值的途径. 利用 Legendre 多项式的性质:

$$P_l(\mu=1)=1 \tag{6.6.10}$$

引入符号

$$S_{2n} = \sum_{l=0,2,4,\dots}^{\infty}(2l+1)f_l(E_b)/f_0(E_a,E_b) \tag{6.6.11}$$

和

$$S_{2n+1} = \sum_{l=1,3,5,\dots}^{\infty}(2l+1)f_l(E_b)/f_0(E_a,E_b) \tag{6.6.12}$$

对比 (6.6.1) 与 (6.6.6) 式, 得到如下方程:

$$\frac{a}{\tanh(a)} - S_{2n} = 0 \tag{6.6.13}$$

这是一个系统学参数 a 所满足的超越方程. (6.6.13) 式中 S_{2n} 是由 (6.6.11) 式给出的, 而 (6.6.11) 式中的 Legendre 系数是由数据库提供的. 通过求解方程 (6.6.13) 得到等效参数的 a 值.

同样对比 (6.6.1) 与 (6.6.6) 式, 在 $\mu_b=1$ 时存在如下关系:

$$\sum_{l=1,3,5,\dots}^{\infty}(2l+1)f_l(E_b) = ar(E_a,E_b)f_0(E_b) \tag{6.6.14}$$

由此得到求解预平衡因子的公式:

$$r(E_a,E_b) = \frac{1}{a}S_{2n+1} \tag{6.6.15}$$

其中系统学参数 a 值是由方程 (6.6.13) 解出的. 通过上述途径可以得到等效参数 a 值以及预平衡因子 $r(E_a, E_b)$ 值. 注意到在公式 (6.6.13) 中 $a/\tanh(a)$ 是 a 的偶函数, 对任意 a 值有如下性质:

$$\frac{a}{\tanh(a)} \geqslant 1 \tag{6.6.16}$$

在 (6.6.16) 式中等号仅发生 $a = 0$ 的情况, 其他情况均有 $a/\tanh(a) > 1$ 成立. 一旦方程 (6.6.13) 有解, 就会是两个解 $\pm a$, 当然物理上是取 $a > 0$ 的解, 这是表征预平衡发射的朝前性.$a = 0$ 的情况是对应于各项同性分布, 即除 $f_0(E_a, E_b) > 0$ 外, 其他分波展开系数均为 0, 相当于 $S_{2n} = 1$, 这时方程 (6.6.13) 仅有 $a = 0$ 的解. 将 $a = 0$ 代入 (6.6.1) 式得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma(E_\mathrm{n})}{\mathrm{d}E_b\mathrm{d}\Omega_b} = \frac{f_0(E_a, E_b)}{4\pi} \tag{6.6.17}$$

表明 Kalbach-Mann 系统学公式退化为一个各向同性分布的表示.

当 (6.6.11) 式出现 $S_{2n} < 1$ 时, 方程 (6.6.13) 是没有解的, 因而得不到等效参数 a 值. 另外在方程 (6.6.12) 中出现 $S_{2n+1} < 0$ 时, 由 (6.6.15) 式得到的预平衡因子 $r(E_a, E_b) < 0$, 这就不能满足 (6.6.2) 式给出的 Kalbach-Mann 系统学公式应用的条件. 以上给出了应用等效 Kalbach-Mann 系统学公式可适用条件.

下面分析轻核反应理论所制作的双微分截面文档数据的内容. 由第 5 章已知, 轻核反应中的双微分截面数据是用质心系中 Legendre 系数的形式给出的. 由于轻核的主要反应机制是粒子的预平衡发射, 一次发射粒子在质心系中是朝前的, 其剩余核在质心系中是向后反冲的. 于是从剩余核发射的次级粒子在质心系中却会出现朝后运动的趋势. 例如, 在第 5 章中给出的从分立能级发射次级粒子到其剩余核的分立能级是形成环形谱, 在这种情况下, 在这些次级粒子发射能量区域内一些 Legendre 系数会出现 $f_1(E_b) < 0$(见第 5 章中的表 5.3). 由于从不同途径发射粒子的过程可以属于同一反应道, 因而造成在总的出射中子双微分谱中, 既有朝前又有朝后的粒子发射的多个双微分谱叠加组成.

为了说明问题, 以 $E_\mathrm{n} = 5.9\mathrm{MeV}$ 为例, 由 LUNF 程序计算得到的 $^9\mathrm{Be}(\mathrm{n}, 2\mathrm{n})$ 归一化出射中子双微分截面数据的 Legender 系数值由表 6.8 给出.

表 6.8 $E_\mathrm{n} = 5.9\mathrm{MeV}$ 时 $^9\mathrm{Be}(\mathrm{n}, 2\mathrm{n})$ 出射中子双微分截面的 Legender 系数

ε	$f_0(\varepsilon)$	$f_1(\varepsilon)$	$f_2(\varepsilon)$	$f_3(\varepsilon)$	$f_4(\varepsilon)$	S_{2n}	S_{2n+1}
0.0	6.67×10^{-1}	-1.40×10^{-1}	7.24×10^{-3}	-1.55×10^{-3}	-9.51×10^{-5}	1.053	−0.644
0.1	3.09×10^{-1}	-2.31×10^{-2}	1.63×10^{-3}	-7.19×10^{-4}	4.86×10^{-4}	1.040	−0.241
0.2	3.24×10^{-1}	-6.66×10^{-3}	2.38×10^{-5}	3.27×10^{-7}	-7.22×10^{-6}	1.000	−0.062
0.3	3.17×10^{-1}	-9.95×10^{-3}	-1.95×10^{-4}	1.96×10^{-5}	1.19×10^{-6}	0.997	−0.094
0.4	6.05×10^{-1}	4.28×10^{-2}	4.37×10^{-3}	1.27×10^{-3}	5.77×10^{-4}	1.045	0.227
0.5	5.00×10^{-1}	6.03×10^{-3}	-1.32×10^{-3}	-8.87×10^{-4}	-1.09×10^{-4}	0.985	0.024

续表

ε	$f_0(\varepsilon)$	$f_1(\varepsilon)$	$f_2(\varepsilon)$	$f_3(\varepsilon)$	$f_4(\varepsilon)$	S_{2n}	S_{2n+1}
0.6	4.89×10^{-1}	-1.21×10^{-2}	-2.23×10^{-3}	4.43×10^{-5}	5.69×10^{-4}	0.988	−0.074
0.7	4.93×10^{-1}	-2.47×10^{-2}	-1.23×10^{-3}	9.46×10^{-4}	-2.07×10^{-5}	0.987	−0.137
0.8	4.76×10^{-1}	-4.05×10^{-2}	6.36×10^{-4}	6.50×10^{-4}	-6.87×10^{-4}	0.994	−0.245
0.9	5.15×10^{-1}	-4.59×10^{-2}	4.29×10^{-3}	-1.08×10^{-3}	2.59×10^{-4}	1.046	−0.282
1.0	2.66×10^{-1}	-1.48×10^{-3}	6.42×10^{-5}	-2.22×10^{-4}	-8.66×10^{-5}	0.998	−0.023
1.1	2.48×10^{-1}	-4.83×10^{-3}	-1.86×10^{-4}	-9.34×10^{-5}	4.36×10^{-5}	0.998	−0.061
1.2	2.33×10^{-1}	-8.05×10^{-3}	3.81×10^{-5}	6.76×10^{-5}	7.90×10^{-5}	1.004	−0.102
1.3	2.09×10^{-1}	-8.66×10^{-3}	3.48×10^{-4}	1.59×10^{-4}	8.71×10^{-6}	1.009	−0.119
1.4	1.92×10^{-1}	-9.00×10^{-3}	7.15×10^{-4}	1.78×10^{-4}	-1.77×10^{-4}	1.010	−0.134
1.5	1.94×10^{-1}	-1.26×10^{-2}	1.63×10^{-3}	-2.94×10^{-4}	1.13×10^{-4}	1.047	−0.205
1.6	8.46×10^{-2}	-4.20×10^{-4}	4.34×10^{-4}	1.30×10^{-6}	1.80×10^{-5}	1.028	−0.015
1.7	2.81×10^{-2}	-3.71×10^{-4}	1.51×10^{-5}	-9.73×10^{-7}	-9.80×10^{-7}	1.002	−0.040
1.8	2.65×10^{-2}	-1.29×10^{-4}	8.89×10^{-6}	-2.31×10^{-6}	8.56×10^{-7}	1.002	−0.015
1.9	5.24×10^{-1}	1.07×10^{-1}	1.13×10^{-2}	5.56×10^{-3}	4.07×10^{-3}	1.178	0.688
2.0	2.57×10^{-2}	-8.73×10^{-7}	3.17×10^{-9}	-6.32×10^{-11}	1.92×10^{-12}	1.000	0.000
2.1	2.32×10^{-1}	4.11×10^{-2}	4.49×10^{-3}	2.13×10^{-3}	1.57×10^{-3}	1.157	0.595
2.2	2.55×10^{-2}	-8.60×10^{-7}	2.98×10^{-9}	-5.40×10^{-11}	1.66×10^{-12}	1.000	0.000
2.3	2.53×10^{-2}	-3.23×10^{-6}	-2.92×10^{-8}	2.53×10^{-8}	7.73×10^{-9}	1.000	0.000
2.4	1.79	4.08×10^{-1}	4.16×10^{-2}	2.12×10^{-2}	1.54×10^{-2}	1.194	0.767
2.5	2.91×10^{-2}	6.28×10^{-4}	-2.08×10^{-7}	-1.84×10^{-5}	-1.15×10^{-5}	0.996	0.060
2.6	2.82×10^{-2}	1.87×10^{-4}	-5.14×10^{-5}	-1.26×10^{-5}	8.82×10^{-6}	0.994	0.017
2.7	2.72×10^{-2}	-2.48×10^{-4}	-4.97×10^{-5}	1.50×10^{-5}	7.42×10^{-6}	0.993	−0.023
2.8	2.54×10^{-2}	-6.78×10^{-4}	6.84×10^{-7}	1.99×10^{-5}	-1.33×10^{-5}	0.995	−0.075
2.9	2.20×10^{-2}	-8.04×10^{-4}	6.38×10^{-5}	-1.92×10^{-5}	6.48×10^{-6}	1.017	−0.116
3.0	1.53×10^{-2}	0.00	0.00	0.00	0.00	1.000	0.000
3.1	1.05	3.24×10^{-1}	2.47×10^{-2}	1.26×10^{-2}	9.19×10^{-3}	1.196	1.008
3.2	3.96×10^{-3}	0.00	0.00	0.00	0.00	1.000	0.000

注：ε 为出射中子能量, 单位 MeV, $f_l(\varepsilon)$ 是 Legender 展开系数, 单位为 MeV^{-1}.

由表 6.8 中的结果可以看出, 有不少能点出现了 $S_{2n} < 1$ 的情况. 一旦这种情况出现, 这时方程 (6.6.13) 是没有解的, 因此给不出等效的参数 a 值. NJOY 程序或被迫中断、或用各向同性近似 $a \approx 0$ 来制作双微分截面数据的概率表. 在表 6.8 中, 多处出现 $S_{2n+1} < 0$ 的情况, 这都是来自次级粒子从反冲剩余核的发射. 在这种情况下, 无法给出预平衡因子满足 $0 \leqslant r(E_a, E_b) \leqslant 1$ 条件的等效值, 而用 $r(E_a, E_b) = 0$ 代替, 使预平衡贡献消失.

由于这是轻核反应理论方法制作的双微分截面文档数据的普遍情况, 为进一步说明问题, 作为示例, 在表 6.9 中, 给出了 $^7\text{Li}(\text{n}, \text{nt}\alpha)$ 反应在 $E_\text{n} = 6\text{MeV}$ 时, 出射中子在质心系中的双微分截面文档 Legendre 系数数据. 之所以仅给出低能中子入射的例子, 是由于能量高的情况, 表格会太大, 而低能的例子已经完全可以说明问

题.

表 6.9　^{7}Li(n, ntα) 反应道中，出射中子双微分截面文档数据

ε_n	$f_0(\varepsilon_n)$	$f_1(\varepsilon_n)$	$f_2(\varepsilon_n)$	$f_3(\varepsilon_n)$	$f_4(\varepsilon_n)$	S_{2n}	S_{2n+1}
0.2	5.85×10^{-1}	5.57×10^{-2}	8.65×10^{-3}	4.07×10^{-3}	8.44×10^{-4}	1.087	0.334
0.3	3.17×10^{-1}	1.70×10^{-2}	-3.50×10^{-4}	-1.30×10^{-3}	-3.38×10^{-4}	0.985	0.132
0.4	4.30×10^{0}	4.27×10^{-1}	6.73×10^{-2}	6.40×10^{-2}	2.91×10^{-2}	1.139	0.402
0.5	3.37×10^{-1}	1.79×10^{-3}	-3.05×10^{-3}	-2.61×10^{-4}	4.53×10^{-4}	0.967	0.010
0.6	3.47×10^{-1}	-4.21×10^{-3}	-3.03×10^{-3}	6.57×10^{-4}	4.08×10^{-4}	0.967	-0.023
0.7	3.57×10^{-1}	-9.84×10^{-3}	-2.61×10^{-3}	1.48×10^{-3}	1.73×10^{-4}	0.968	-0.054
0.8	3.66×10^{-1}	-1.49×10^{-2}	-1.76×10^{-3}	1.81×10^{-3}	-1.50×10^{-4}	0.972	-0.088
0.9	3.76×10^{-1}	-1.99×10^{-2}	-7.25×10^{-4}	1.92×10^{-3}	-4.78×10^{-4}	0.979	-0.123
1.0	3.86×10^{-1}	-2.46×10^{-2}	5.88×10^{-4}	1.45×10^{-3}	-6.22×10^{-4}	0.993	-0.165
1.1	3.96×10^{-1}	-2.93×10^{-2}	2.05×10^{-3}	7.05×10^{-4}	-6.34×10^{-4}	1.011	-0.209
1.2	4.74×10^{-1}	-2.79×10^{-2}	4.45×10^{-3}	-3.01×10^{-4}	-2.85×10^{-4}	1.041	-0.181
1.3	5.01×10^{-1}	-3.26×10^{-2}	5.76×10^{-3}	-2.35×10^{-3}	2.53×10^{-4}	1.062	-0.228
1.4	4.46×10^{-1}	-3.18×10^{-2}	5.91×10^{-3}	-3.77×10^{-3}	9.95×10^{-4}	1.086	-0.273
1.5	8.94×10^{-2}	2.23×10^{-3}	-5.58×10^{-4}	-2.50×10^{-4}	2.63×10^{-5}	0.971	0.055
1.6	9.15×10^{-2}	5.93×10^{-4}	-6.99×10^{-4}	-6.74×10^{-5}	6.78×10^{-5}	0.968	0.014
1.7	9.35×10^{-2}	-1.02×10^{-3}	-6.95×10^{-4}	1.19×10^{-4}	6.31×10^{-5}	0.969	-0.024
1.8	9.55×10^{-2}	-2.63×10^{-3}	-5.71×10^{-4}	2.91×10^{-4}	2.03×10^{-5}	0.972	-0.061
1.9	9.75×10^{-2}	-4.20×10^{-3}	-3.01×10^{-4}	3.43×10^{-4}	-4.01×10^{-5}	0.981	-0.105
2.0	9.95×10^{-2}	-5.78×10^{-3}	5.88×10^{-5}	2.94×10^{-4}	-8.66×10^{-5}	0.995	-0.154
2.1	1.02×10^{-1}	-7.35×10^{-3}	5.35×10^{-4}	6.52×10^{-5}	-7.78×10^{-5}	1.019	-0.213
2.2	1.04×10^{-1}	-8.90×10^{-3}	1.11×10^{-3}	-3.56×10^{-4}	3.45×10^{-5}	1.056	-0.282
2.3	3.89×10^{-2}	-3.69×10^{-3}	5.73×10^{-4}	-2.78×10^{-4}	6.73×10^{-5}	1.089	-0.335

注：ε_n 为出射中子能量, 单位 MeV, $f_l(\varepsilon_n)$ 是 Legendre 展开系数, 单位为 MeV^{-1}.

由表 6.9 中列出的数据可以看出, 这种在质心系中的 Legendre 系数, 很多能点出现 $S_{2n}<1$ 的情况, 多能点 $S_{2n+1}<0$ 的情况也屡见不鲜, 仅有 $\varepsilon_n=0.2, 0.4$MeV 两个能点能满足上述等效条件. 这充分说明, 轻核反应理论方法制作的双微分截面文档的 Legendre 系数的内容, 是无法通过这种途径得到等效的 Kalbach-Mann 系统学公式中的参数 a 值以及预平衡因子的 r 值. 表明用等效的 Kalbach-Mann 系统学公式对轻核反应数据完全失效, 通过这种等效途径不能制作出原文档数据的真实内容的概率表, 造成基准检验的失真. 这对提供 Monte-Carlo 方法中双微分截面数据抽样概率表的制作提出了新要求.

这里需要特别强调指出的是, 在表 6.8 和 6.9 中的双微分截面数据都是未经能谱展宽的, 这才是真实的物理内容. 事实上, 仅在符合实验测量的双微分截面时需要能谱展宽. 正如前面阐述的内容得知, 能谱展宽是来自两个基本物理因素：实验测量条件引起的能谱展宽、能级宽度引起的能谱展宽. 而能级宽度的存在, 由 (6.1.1) 式给出的时间–能量不确定关系的物理内涵在于, 这是所谓的测不准关系, 表明是

对微观态的物理量在实验测量过程中的不确定性. 如前所述, 上述能谱展宽效应可以被定量地确定, 因此, 实验测量中观测到的双微分谱是包含了能谱展宽后的物理现象.

而由量子力学中时间平移不变性已经证明, 微观世界粒子的运动必须遵守能量守恒. 而双微分截面文档数据中不能有能谱展宽, 这才是具有真正物理意义的内容. 正如在数据库中的弹性散射数据那样, 出射中子能量是具有确定能量值的单能谱, 而不是像前面展示的实验测量的双微分截面谱中那样, 弹性散射对应的是一个被明显展宽的单峰谱. 由于实验测量的飞行时间法, 再现实验测量的双微分截面谱时需要能谱展宽, 而制作双微分截面文档数据时, 则不需要能谱展宽, 这是研究所得出的结论. 因此, 在双微分截面文档数据中加入能级展宽效应, 甚至还包含了实验测量条件引起的能谱展宽效应等, 这在物理上是不合理的.

因此, 只能通过理论计算, 对每一个出射粒子的分谱对应的实验测量条件以及能级宽度进行展宽, 每一个出射粒子的分谱的展宽条件彼此不同, 只有这样途径才能再现实验测量的双微分截面谱. 反之, 制作出的双微分截面文档数据是未经任何展宽的, 因此由这些数据是不能再现实验测量的双微分截面谱的. LUNF 程序既有将各分谱按不同的数值展宽来再现合实验测量的双微分截面谱的功能, 又有用无展宽的数据制作双微分截面文档数据的功能.

用 Legender 系数的方式给出双微分截面文档数据时, 原 NJOY 程序 (MacFarlance et al., 1994) 是通过上述的 (6.6.13) 和 (6.6.15) 式来得到等效的 a 和 r 值的, 上面表 6.8 和表 6.9 的例子已经阐明了应用等效 Kalbach-Mann 系统学公式的途径不适用于加工轻核反应理论给出的双微分截面数据的原因. 因此, 为了要对轻核的双微分截面进行有效的基准检验, 就必须对原 NJOY 程序的有关模块进行重造, 使得在加工双微分截面数据时, 要避开先制作等效 Kalbach-Mann 系统学参数的途径, 而要将双微分截面数据由质心系直接转换到实验室系. 只有用这样重造过的 NJOY 程序来加工出适合 Monte-Carlo 计算所需要的双微分截面的概率表, 才能对轻核反应的双微分截面文档数据进行真实有效的基准检验.

基准检验使用的中子通常是来自聚变中子源 (Fussion Neutron Source), 简记为 FNS 实验. 在中子能量为 14.8MeV 的情况下, 穿透大块物质后在一些角度的中子泄漏谱的测量数据. 最有效的基准检验是纯大块物质, 例如, ^{9}Be, C, N, O 等核素. 另外, 如果一种轻核元素在应用到一个大型装置中, 例如在核反应堆的情况, 这时是包含了多种核素的综合效应. 如果有纯轻核数据的基准检验存在, 就可以选择基准检验最好的数据应用到这个大型装置中. 用这种替代方式来观察基准检验结果的变化, 判断出应用这个核素的数据后对基准检验的效果, 以及对 k_{eff} 值所起到的作用, 因而得到对这个核素数据准确性的综合性判断结果.

下面给出一些基准检验的结果. 首先是氧化锂板的基准检验. FNS 的基准检验

数据取自 (Oyama et al., 1990, 1983, 1985, 1988), 对应氧化锂的厚度分别为 4.8cm 和 20cm. 中子泄漏谱的检验结果分别由图 6.33 和 6.34 所示.

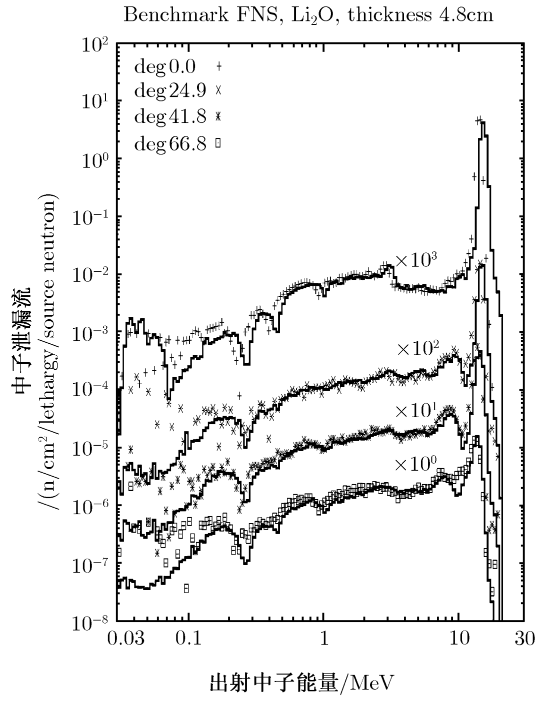


图 6.33　对 4.8cm 氧化锂的基准检验结果

对于 ^{6}Li 和 ^{7}Li, 出射中子都包含了弹性散射道和非弹性散射道. 正如在第 1 章中分析的那样, ^{6}Li 的非弹性散射道来自第 2 激发能级; 而 ^{7}Li 的非弹性散射道来自第 1 激发能级. 除此之外, ^{6}Li 还存在包含中子的多粒子发射的 (n, nd)α 和 (n, 2np)α 反应道存在. 由于缺少理论方法来制作出这些反应道的双微分截面数据, 在美国的 ENDF-B7 库, 以及日本的 JENDL-3.3 库中全都采用了在非弹性散射道中加入赝能级的办法, 由此补充给出了上述反应道中的出射中子的信息.

所谓赝能级的方法是指, 先确定由这些反应道中出射中子的能量区域, 以 $\Delta E =$ 0.5MeV 为间隔, 在非弹性散射道中加入多条赝能级, 在符合双微分截面和中子泄漏谱等有关实验测量数据的基础上, 确定这些赝能级的截面和角分布的数据值. 由此得到的非弹性散射截面变得非常大, 而轻核反应理论可以给出真正意义上的非弹性散射截面.ENDF-B7 库和 JENDL-3.3 库分别用了三十多条赝能级. 但是这种赝能级的途径, 无法同时给出伴随中子出射的带电粒子信息, 例如, ^{6}Li(n, ndα) 反应道中的 d 和 α 粒子, 以及 ^{6}Li(n, 2np)α 反应道中的 p 和 α 粒子. 轻核反应理论解决了这个问题.

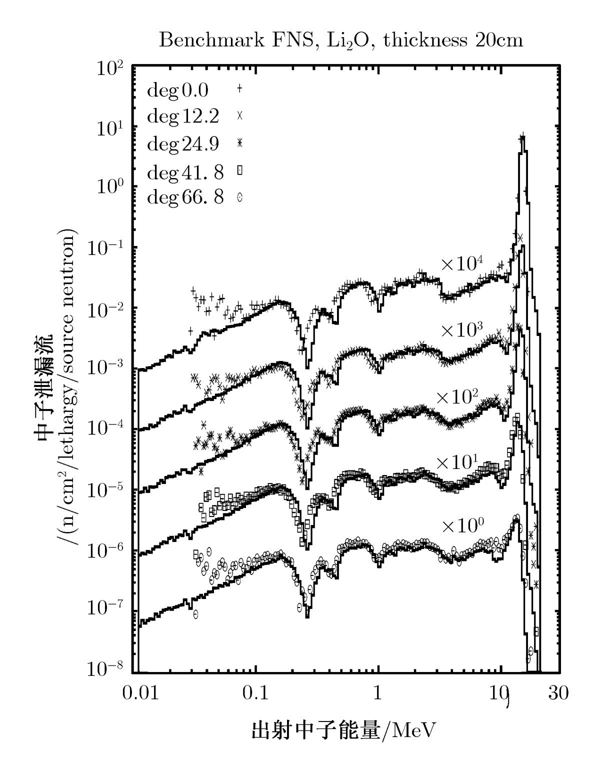


图 6.34　对 20cm 氧化锂的基准检验结果

为说明问题, 由 ^{6}Li 的 LUNF 程序计算的 ^{6}Li(n, ndα) 反应道中, 各种出射粒子携带的能量分配和能量平衡情况由表 6.10 给出. 由此可见, 如果用赝能级方法时, 无法同时自恰地给出 d 和 α 粒子的信息, 而它们携带的能量都与中子携带的能量属于同一个数量级. 这会造成在数据库中描述伴随中子出射的带电粒子信息的不准确性. 其他轻核反应也都存在同样的问题.

表 6.10　^{6}Li(n, ndα) 反应道中, 各种出射粒子的能量分配和能量平衡情况

E_n/MeV	E_{av}/MeV	Diff%/MeV	E_{sum}/MeV	n/MeV	d/MeV	α/MeV
3.0	1.09	0.25	1.10	0.488	0.375	0.234
4.0	1.95	0.19	1.95	0.839	0.718	0.397
5.0	2.81	0.17	2.81	1.21	1.04	0.556
6.0	3.66	0.16	3.67	1.56	1.40	0.709
7.05	4.56	0.15	4.57	1.92	1.78	0.871
8.0	5.38	0.14	5.38	2.27	2.09	1.01
9.0	6.23	0.14	6.24	2.66	2.42	1.16
10.0	7.09	0.14	7.10	3.06	2.73	1.31
12.0	8.84	0.13	8.85	3.97	3.31	1.57
14.0	10.5	0.13	10.5	4.93	3.80	1.80

续表

$E_{\rm n}$/MeV	$E_{\rm av}$/MeV	Diff%/MeV	$E_{\rm sum}$/MeV	n/MeV	d/MeV	α/MeV
16.0	12.2	0.13	12.2	5.96	4.26	2.02
18.0	13.9	0.12	14.0	7.04	4.65	2.27
20.0	15.7	0.12	15.7	8.10	5.00	2.57

注：$E_{\rm av}$ 是在质心系中理论上总释放能量, $E_{\rm sum}$ 是计算得到的总释放能量, Diff% $\equiv 100 \times (E_{\rm sum} - E_{\rm av})/E_{\rm av}$ 是计算能量差别的百分比, 后三列为对应出射粒子携带的能量.

由于 ^{9}Be 的 (n, 2n) 截面很大, 而且俘获辐射截面很小, 在核工程诸多领域得到了广泛的应用. 又知 ^{9}Be 是 1p 壳核素中唯一没有非弹性散射的核素, 除 (n, 2n) 反应道外, 下一个出射中子的反应道是 (n, np), 但是阈能是在 18.777MeV. 因此, 可以这样说, 当中子入射能量在 20MeV 以下时, 除了弹性散射外, 几乎全部出射中子信息来自于 (n, 2n) 反应道. 这也是为什么国际上的评价中子数据库中仅考虑 (n, 2n) 反应道的双微分截面数据的原因. 由于 (n, 2n) 反应道总是将一个中子转换成为两个中子, 是中子增值剂. 这是 ^{9}Be 有广泛应用价值之所在. 因此, 在很宽的中子入射能量点下对 ^{9}Be 的总出射中子双微分截面谱进行了实验测量, 相对其他轻核而言, ^{9}Be 的双微分截面数据是测量最多的核素.

由于缺少理论方法, 目前国外采用的是 Perkins 方法 (Perkins et al., 1985). 即在实验室系中, 以表格方式给出从 ^{9}Be 的 (n, 2n) 反应道中出射粒子中子和 α 粒子的数据. 对于每个给定的中子入射能量下, $\cos\theta_l$ 从 -1 到 $+1$, 间隔为 0.5 共 21 个角度, 每个角度给出出射粒子的能谱. 通过符合实验测量的双微分谱和特定的中子泄漏谱的途径制作出来的. 用表格形式时制作双微分截面文档数据时, $\rm n + {}^9Be$ 的 (n, 2n) 反应道的双微分截面需要用多达一万三千多行数据来表示, 而理论方法采用在质心系的 Legendre 多项式系数时, 仅用不到两千行数据即可.

对 $\rm n + {}^9Be$ 的 (n, 2n) 反应道的双微分截面理论计算的难点在于, 如何准确地给出由第 1 章给出的 $^9{\rm Be(n, 2n)}$ 六种不同反应途径的概率分配, 这是能得到正确的双微分截面数据的关键. 需要由计算各种中子入射情况下的双微分截面谱与实验测量数据的符合, 以及由诸多基准检验的综合分析的结果来确定. 在不同中子入射能点的双微分截面谱中, 会显示出每个分立能级对双微分截面谱中贡献的大小, 由此判断出能级纲图的准确性. 例如由 $E_{\rm n} = 18{\rm MeV}$ 的双微分截面谱的理论计算表明, 当在 ^{9}Be 的 9MeV 和 10MeV 能量区域附近增添新能级后, 才能再现双微分截面谱的实验测量数据 (Ibaraki et al., 1998), 否则在这些能级附近会出现一个明显的凹坑缺欠. 因此希望在今后的核谱学中证实这一点. $\rm n + {}^9Be$ 的 (n, 2n) 反应道的双微分截面理论计算是在 1p 壳核当中最为复杂的核素. 这是由于目前 ^{9}Be 的能级纲图还尚未尽善尽美.

对于 ^{9}Be 的基准检验, 已经进行了相当多的数据测量. 对铍球和铍板的中子

泄漏谱的实验测量, 数据分别取自 (Oyama et al., 1987, 1990). 在入射中子能量为 14.8MeV 时, 厚度为 5.08cm 铍板的中子泄漏谱基准检验结果由图 6.35 所示.

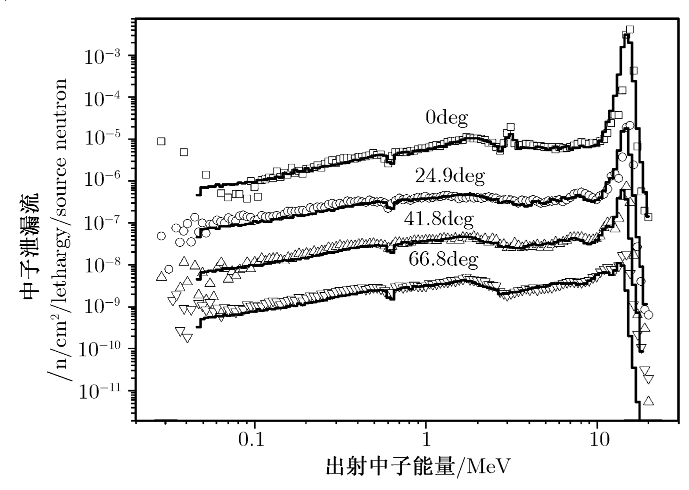


图 6.35　对 5.08cm 铍板的中子泄漏谱基准检验结果

由第 1 章表 1.4 可以看出, 在 2004 年 ^{9}Be 的能级纲图中增加了在 5.59MeV 和 6.38MeV 两条新能级 (Tilley et al., 2004). 另外, 由表 1.4 给出了与 ^{9}Be 的核反应有关的反应道的剩余核 ^{5}He 和 ^{6}He 的能级纲图也进行了更新. 这种能级更新会对双微分截面谱的形状带来明显的影响. 以 n + ^{9}Be 的 (n,2n) 反应道的双微分截面为例, ^{9}Be 中每增加一条新能, 对于两次中子有序发射, 就在总中子出射双微分谱中会增加两个出射中子的分谱, 而伴随一次中子发射后的次级 α 粒子发射, 加上剩余核 ^{5}He 的崩裂, 在总中子的双微分谱中又会增加两个出射中子的分谱. 另外, ^{5}He 的第 1 激发能级从 4.00MeV 降至 1.27MeV, 这样一来从 ^{5}He 崩裂中子谱的位置也发生相应的变化. 在新的 ^{6}He 能级纲图中增加了一条 5.6MeV 新能级, 而原来 14.6MeV 的这条能级 (Tilley et al., 2002) 在入射中子能量小于 17MeV 时不会被激发到. 现在当中子能量在 6.9MeV 时就可以通过发射 α 粒子来开放 ^{6}He 的这条新能级, 在这条 ^{6}He 的能级上可以继续发射中子, 剩余核 ^{5}He 又会崩裂出一个中子, 这又在总中子双微分谱中增加了两个新的中子分谱. 由此可见, 在新的能级纲图出现后, 在中子双微分截面谱中会增加许多分谱, 同时一些分谱的位置也会发生变化. 这就能很清楚地看到了能级纲图的准确性对双微分截面谱的计算结果之间的密切关系.

事实上, ^{9}Be 的数据在反应堆的 $k_{\rm eff}$ 计算中也起相当重要的作用, 要综合双微分截面谱、中子泄漏谱、$k_{\rm eff}$ 等诸方面检验手段才能确定好推荐的全套数据.

对于 ^{12}C, 现有的 FNS 中子泄漏谱实验测量对 ^{12}C 板基准检验的数据取自 (Oyama et al., 1990, 1988). ^{12}C 板的厚度分别为 5.06cm 和 20.24cm 碳版的基准检验结果分别由图 6.36 和 6.37 给出. 相比国际上其他的中子评价核数据库数据而言,

这个基准检验结果的符合是相当理想的.

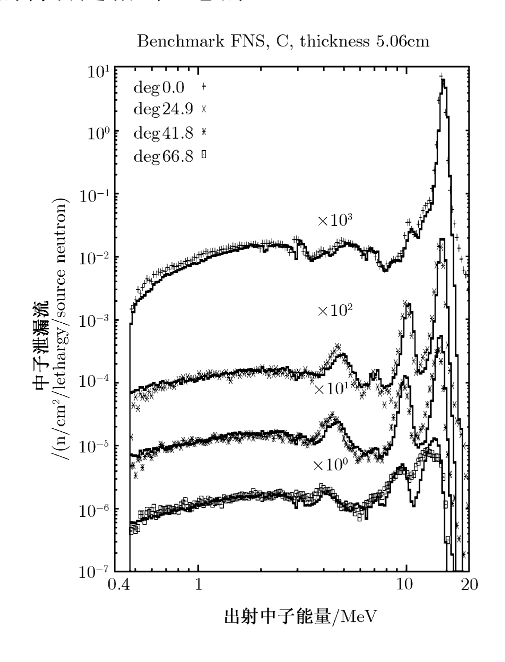


图 6.36 厚度为 5.06cm 的 ^{12}C 板的基准检验结果

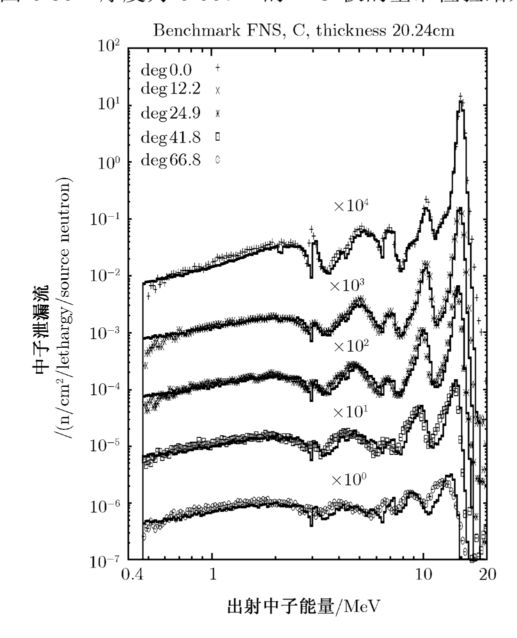


图 6.37 厚度为 20.24cm 的 ^{12}C 板的基准检验结果

对于 n+^{12}C 核反应, 在中子入射能量小于 20MeV 的能区, 开放的多粒子发射

反应道主要是 (n, n3α), 由第 1 章所述, 这个反应道是通过多种反应途径来实现的, 不同途径出射的粒子双微分谱是彼此不同的. 用轻核反应理论方法计算 (n, n3α) 反应的双微分截面数据, 是将各种反应途径出射的双微分谱叠加而成, 并可以很好再现双微分截面实验测量数据. 在此基础上制作的双微分截面文档数据中, 不仅包含了出射中子的信息, 而且也给出了伴随出射 α 粒子的全部信息.

由 ^{12}C 的 LUNF 程序计算的 ^{12}C(n, n3α) 反应道中, 各种出射粒子的能量分配和能量平衡情况由表 6.11 给出. 可见, 如果应用在非弹性散射道中加入赝能级的途径来补充出射中子的信息时, 其结果使得粒子数最多, 携带数倍于中子携带能量的 α 粒子的信息全部丢失.

表 6.11　^{12}C(n, n3α) 反应道中, 各种出射粒子的携带能量和能量平衡情况

E_n/MeV	E_{av}/MeV	Diff %/MeV	E_{sum}/MeV	n/MeV	α/MeV
9.0	1.03	0.55	1.03	0.050	0.983
10.0	1.95	0.19	1.95	0.347	1.61
11.0	2.87	0.14	2.88	0.633	2.24
12.0	3.79	0.12	3.90	0.912	2.89
13.0	4.72	0.10	4.72	1.13	3.59
14.1	5.73	0.09	5.74	1.45	4.28
15.0	6.56	0.09	6.57	1.70	4.87
16.0	7.48	0.09	7.49	2.01	5.48
18.0	9.33	0.07	9.34	2.69	6.65
20.0	11.2	0.07	11.2	3.40	7.78

注：表中各符号的意义同于表 6.9.

轻核都是具有重要应用价值的核素, 需要中子和伴随出射的带电粒子详细和准确的信息.

此外, 对 n + ^{14}N 和 n + ^{16}O 的反应, 也进行了 FNS 的基准检验, 其液氮厚度和液氧厚度都是为 20cm, 实验测量数据参见 (Oyama et al., 1991). 理论计算中子泄漏谱的结果也是比较好的.

由于以前没有适合描述轻核反应的模型理论, 因而采用了在非弹性散射道中加入的赝能级方法给出轻核的出射中子信息. 虽然用这种方法可以符合好特定的中子泄漏谱的实验测量数据, 但是无法自恰地得到伴随出射的带电粒子信息. 中子泄漏谱实验测量也在不断地发展, 因此评价中子数据库也要随之进行改进. 为此, 国际原子能委员会曾经强调, 对轻核的评价中子数据库要不断更新 (Muir et al., 2001), 才能满足国际核数据界的进一步需求.

仅用传统的直接反应机制加末态相互作用是不能定量描述好轻核反应行为的 (Chiba et al., 1998). 从复合核向剩余核分立能级的一次粒子发射, 仅需要用角分部来描述, 而只有通过描述多粒子发射过程的理论方法才能给出双微分截面的数据,

赝能级方法是将多次粒了发射简化为一次粒子发射过程, 因而是不能给出双微分截面数据的. ***R*** 矩阵理论仅能计算一次粒子发射过程, 因此对双微分截面的描述也是无能为力的.

本书是重点研究中子引发轻核反应的理论方法. 对于复杂粒子入射, 例如弱束缚的氘核引发的轻核反应中, 氘核的削裂反应就变得很重要了 (Liu et al., 2001), 实验测量还观察到氘核破裂引起对弹性散射角分布以及对质子产生谱的明显贡献 (Auce et al., 1996), 这种反应道之间的耦合图像表明了复杂粒子引发的轻核反应会包含更多更复杂的核反应过程. 因此, 不能完全抹杀直接反应机制在轻核反应中的重要性. 只不过这不在本书的研究范畴之内.

中子诱发的轻核反应的计算表明, 粒子发射是以预平衡机制为主. 正是由于发展了统一的 Hauser-Feshbach 和激子模型理论, 由与角动量有关的激子模型可以得到与角动量有关的预平衡机制发射的概率, 于是这个轻核反应理论模型可以描述末态为分立能级的预平衡发射的核反应过程.

另外, 在轻核的反应中存在相当多非有序粒子发射的过程. 针对这些非有序发射的双微分截面计算, 建立了相应的理论模型公式. 由于严格考虑了反应过程中的反冲效应, 可以给出各粒子发射分谱在各种发射角度上准确的位置和形状. 描述好这种非有序粒子发射过程是发展轻核反应理论的另一个要点.

在目前应用于核反应全套数据计算的 GNASH(Young et al., 1996), UNF(Zhang, 2002a) 等程序, 以及正在研发的一些综合功能更全的大型统计理论计算程序中, 恰好没有包含上述这些描述轻核反应特征的功能. 因此这些程序都不能描述好这种轻核反应的行为. 这是目前在国际上尚不能用理论方法建立轻核的双微分截面文档的原因之所在.

由此可见, 建立一个比较完整的轻核反应理论模型是很必要的. 因为只有用理论模型做计算, 才能建立完整的双微分截面文档数据内容. 由轻核反应理论计算得到的双微分截面数据库中包含了全部出射粒子信息, 这是以前其他任何中子评价数据库所没有做到的.

为验证这个轻核反应理论的应用, 对 2s-1d 壳核的也成功进行了 $\mathrm{n}+{}^{19}\mathrm{F}$ 的试算 (Duan et al., 2007). 但这时剩余核的分立能级变得多而密, 应用连续能级的核反应统计理论也可以得到相似的结果. 研究结果表明, 对于质量再重的靶核, 由于能级纲图的能量区域变得越来越低, 必须应用连续能级. 另外, 剩余核为不稳定核素 ${}^{5}\mathrm{Li}$, ${}^{5}\mathrm{He}$, ${}^{6}\mathrm{He}$, ${}^{8}\mathrm{Be}$ 所表征的轻核反应特征会逐渐消失, 反冲效应也越来越弱. 轻核反应理论的优势就逐渐减弱, 而通常包含连续能级的核反应统计理论已经可以给出比较理想的计算结果了.

从整个中子引发轻核反应的理论计算表明, 除了 ${}^{16}\mathrm{O}$ 可以引入一些直接反应的非弹性散射成分外, 其他比较轻的 1p 壳核素不需要引入直接反应机制, 否则计

算结果反而会变的不好. 随靶核质量数的加大, 直接反应过程的成分会逐渐变得越来越明显, 这种趋势与目前通用的核反应统计理论的研究结果是相吻合的. 也就是说, 随核质量的加大, 1p 壳轻核的核反应的独特的特征会逐渐消失, 而过度到中重核的反应状态.

纵上所述, 为了能描述好中子引发的轻核反应行为, 预平衡发射机制是轻核反应机制中的主要成分. 在预平衡发射机制中加入角动量宇称守恒是关键点. 这是对预平衡反应机制的新认识.

在统一的 Hauser-Feshbach 和激子模型理论的基础上, 根据轻核反应的各种特点, 系统地发展了专门适用于轻核的核反应模型理论. 轻核反应理论的理论计算不仅能很好再现双微分截面的实验测量数据, 也同时可以制作出能很好符合基准检验的数据.

因此, 轻核反应理论的发展, 将核反应统计理论应用的核素范围拓宽到了 1p 壳核素.

至于比 1p 壳轻核更轻的 1s 壳核素, 诸如氘、氚、^{3}He 等核素, 它们没有任何的激发能级态存在, 上述的轻核反应理论对此无能为力. 这种核少体问题完全是属于另一个核反应理论的研究领域了.

参 考 文 献

丁大钊, 叶春堂, 赵志祥, 等. 2005. 中子物理学 —— 原理, 方法与应用. 北京: 原子能出版社.

阮锡超, 陈国长, 等. 2004. The neutron emission double-differential cross sections measurement for beryllium at 8.17 and 10.26 MeV Neutrons. 内部资料.

王竹溪, 郭敦仁. 1965. 特殊函数论. 北京: 科学出版社.

Abramowitz M, Stegun I A. 1970. Handbook of mathematical function. New York: Dover Publications, Inc.: 445.

Auce A, et al. 1996. Reacion cross sections for 38, 65, and 97 MeV deuterons on target from ^{9}Be to ^{208}Pb. Phys. Rev. C, 53: 2919-2925.

Baba M, et al. 1988. Double-differential neutron scattering cross sections of beryllium, carbon, oxygen. Nuclear Data for Science and Technology: 209.

Baba M, et al. 1990. Application of post acceleration beam chopper for neutron demission cross section measurements. TAERI-M-90-025: 383, Japan Atomic Energy Research Institute.

Chadwick M B, Oblozinsky P. 1994. Continuum angular distributions in pre-equilibrium nuclear reactions: Physical basis for Kalbach systematics. Phys. Rev. C, 50: 2490.

Chiba S, et al. 1985. J. Nucl. Sci. Tech., 22: 771.

Chiba K, et al. 1998. Measurement and theoretical analysis of neutron elastic scattering and inelastic leading to a three-body final state for ^{6}Li at 10 to 20 MeV. Phys. Rev. C, 58: 2205.

Chiba S, et al. 2001. 私人通讯.

Duan J F, Yan Y L, Sun X J, et al. 2007. Theoretical analysis of neutron double-differential cross section of n+^{19}F at 14.2MeV. Commun. Theor. Phys., 47: 102-106.

Duan J F, Yan Y L, Wang J M, et al. 2005. Further analysis of neutron double differential cross section of n+^{16}O at 14.1MeV and 18 MeV. Commun. Theor. Phys., 44: 701-706.

Firestone R B, Shirley V S. Table of isotopes 8th. New York: John Wiley & Sons.

Ibaraki M, Baba M. 1998. ^{6}Li, ^{7}Li and ^{9}Be neutron emission cross sections at 11.5∼18MeV neutron energy. J. NST, 35: 843.

Kalbach C, Mann F M. 1981. Phenomenology of continuum angular distributions, I. Systematics and parametrization . Phys. Rev., C23: 112.

Kalbach C. 1982. Possible energy parameters for continuum angular distributions. Phys. Rev. C, 25: 3197.

Kalbach C. 1987. Systematics of continuum angular distribution: Extensions to higher energies. Los Alamos National Laboratory, LA-UR-4139.

Kalbach C. 1988. Systematics of continuum angular distribution: Extensions to higher energies. Phys. Rev. C, 37: 2350.

Kunz P D. DWBA code DWUCK-4. University of Colorado USA (unpublished).

Liu Z H, et al. 2001. Asymptotic normalization coefficients and neutron halo of the excited states in ^{13}B and ^{13}C. Phys. Rev. C: 64.

MacFarlane R E, Muir D W. 1994. The NJOY nuclear data processing system. LA-12740-M, Los Alamos National Laboratory report.

Mclane V, Dunford C L, Rose P F. 1990. ENDF-102 data format and procedures for the evaluated nuclear data file ENDF-6. BNL-NCS-44945.

Muir D W, Herman M. 2001. Long term needs for nuclear data development. INDC(NDS)-423.

Oyama Y, Maekawa H. 1983. Measurements of angle-dependent neutron spectra from lithium-oxide slab assemblies by time-of-flight method. JAERI-M 83-195.

Oyama Y, Yamaguchi S, Maekawa H. 1985. Analysis of time-of-flight experiment on lithium-oxide assemblies by a two-dimensional transport code DOT3.5. JAERI-M 85-031.

Oyama Y, Maekawa H. 1987. Measurement and analysis of an angular neutron flux on a beryllium slab irradiated with deuteron-tritium neutrons. Nucl. Sci. Eng., 97: 220-234.

Oyama Y, Yamaguchi S, Maekawa H. 1988. Measurements and analyses of angular neutron flux spectra on graphite and lithium-oxide slabs irradiated with 14.8 MeV neutrons. J. Nucl. Sci. Technol., 25: 419-428.

Oyama Y, Yamaguchi S, Maekawa H. 1990. Experimental results of angular neutron spectra leaking from slabs of fusion reactor candidate materials (I). JAERI-M 90-092.

Oyama Y, Kosako K, Maekawa H. 1991. Measurements and analyses of angular neutron flux spectra on liquid nitrogen, liquid oxygen and iron slabs. Proc. Int. Conf. on Nuclear Data for Science and Technology, 13-17 May, Juelich.

Perkins S T, Plechaty E F, Howerton R J. 1985. A reevaluation of the ^{9}Be(n,2n) reaction and its effect on neutron multiplication in fusion blanket applications. Nucl. Sci. Eng., 90: 83.

Raynal J. 1994. Note on ECIS94, CEN-n2772, Calson B V. The optical model ECIS95. Workshop on nuclear reaction data and nuclear reaction-physics. Design and Safety, H4.3MR/921-3, 15 April-17 May 1996, Miramare, Trieste Italy.

Tilley D R, et al. 2002. Energy levels of light nuclei A=6. Triangle Universities Nuclear Laboratory, Durham, NC 27708-0308.

Tilley D R, et al. 2004. Energy levels of light nuclei A=8, 9, 10. Nucl. Phys. A, 745: 155-362.

Yan Y L, Duan J F, Sun X J, et al. 2005. Analysis of the neutron double-differential cross section of n+^{14}N at 14.2MeV. Commun. Theor. Phys., 44: 128-132.

Young P G, Arthur E D, Chadwick M B. 1996. Comprehensive nuclear model calculation. Theory and Use of ghash code, LA-UR-96-3739.

Zhang J S, et al. 1999. Model calculation of n+^{12}C reactions from 4.8 to 20 MeV. Nucl. Sci. Eng., 133: 218.

Zhang J S, Han Y L, Fan X L. 2001a. Theoretical analysis of the neutron double differential cross section of n+^{16}O at $E_{\rm n}$ =14.1MeV. Commun. Theor. Phys., 35: 579.

Zhang J S, Han Y L. 2001b. Model calculation of n+^{6}Li reactions below 20MeV. Commun. Theor. Phys., 36: 437-442.

Zhang J S. 2002a. UNF code for fast neutron reaction data calculations. Nucl. Sci. Eng., 142: 207.

Zhang J S, Han Y L. 2002b. Calculations of double differential cross sections of n+^{7}Li below 20MeV. Commun. Theor. Phys., 37: 465-474.

Zhang J S. 2003a. Theoretical analysis of the neutron double differential cross section of n+^{10}B at $E_{\rm n}$ =14.2MeV. Commun. Theor. Phys., 39: 433-438.

Zhang J S. 2003b. Theoretical analysis of the neutron double differential cross section of n+^{11}B at $E_{\rm n}$ =14.2MeV. Commun. Theor. Phys., 39: 83-88.

《现代物理基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1. 现代声学理论基础	马大猷 著	2004.03
2. 物理学家用微分几何 (第二版)	侯伯元，侯伯宇 著	2004.08
3. 数学物理方程及其近似方法	程建春 编著	2004.08
4. 计算物理学	马文淦 编著	2005.05
5. 相互作用的规范理论 (第二版)	戴元本 著	2005.07
6. 理论力学	张建树，等 编著	2005.08
7. 微分几何入门与广义相对论 (第二版.上)	梁灿彬，周彬 著	2006.01
8. 物理学中的群论 (第二版)	马中骐 著	2006.02
9. 辐射和光场的量子统计	曹昌祺 著	2006.03
10. 实验物理中的概率和统计 (第二版)	朱永生 著	2006.04
11. 声学理论与工程应用	朱海潮，等 编著	2006.05
12. 高等原子分子物理学 (第二版)	徐克尊 著	2006.08
13. 大气声学 (第二版)	杨训仁，陈宇 著	2007.06
14. 输运理论 (第二版)	黄祖洽 著	2008.01
15. 量子统计力学 (第二版)	张先蔚 编著	2008.02
16. 凝聚态物理的格林函数理论	王怀玉 著	2008.05
17. 激光光散射谱学	张明生 著	2008.05
18. 量子非阿贝尔规范场论	曹昌祺 著	2008.07
19. 狭义相对论 (第二版)	刘　辽，等 编著	2008.07
20. 经典黑洞与量子黑洞	王永久 著	2008.08
21. 路径积分与量子物理导引	侯伯元，等 著	2008.09
22. 量子光学导论	谭维翰 著	2009.01
23. 全息干涉计量——原理和方法	熊秉衡，李俊昌 编著	2009.01
24. 实验数据多元统计分析	朱永生 编著	2009.02
25. 微分几何入门与广义相对论 (第二版.中)	梁灿彬，周彬 著	2009.03
26. 中子引发轻核反应的统计理论	张竞上 著	**2009.03**